Oscar Schlömilch

Kompendium der höheren Analysis

In sechster Auflage bearbeitet von

Dr. Adolf Kneser
Geh. Regierungsrat, Professor an der Universität Breslau, Dr.-Ing. e. h., korrespondierendem Mitglied der Preuß. Akademie der Wissenschaften

Erster Band

Mit 91 Abbildungen

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
Braunschweig 1923

Vorwort zur sechsten Auflage.

Nach den Erfahrungen der Büchereien wird das Schlömilchsche Kompendium trotz seines Alters immer noch benutzt, und mehr als ein akademischer Lehrer hat mir gesagt, daß er gern zu dem trefflichen Buche greift, weil man soviel darin findet, was man fur die Vorlesung gebraucht. An den Technischen Hochschulen, aus deren Lehrbetrieb das Werk hervorgegangen ist, dient es immer noch als beliebtes wissenschaftliches Werkzeug. Aber der reine Mathematiker stößt sich an mangelhaften Konvergenzbeweisen und allzukühnen Betrachtungen über das Unendlichkleine, und mancher Lehrer, der das Werk gebraucht, sieht es vielleicht nicht gern in der Hand des Schülers, um diesen nicht der strengen Methoden, auf die die moderne Analysis stolz ist, zu entwöhnen.

Ist bei dieser Lage der Dinge eine Neubearbeitung des Werkes angebracht? Ich glaube ja.

Zwar warnt ein Schriftwort, man solle keinen neuen Lappen auf ein altes Kleid setzen; aber die Mahnung gilt nur für Festkleider, und die Mathematik kann ihr Arbeitskleid nicht ablegen, ohne sich ihres Wesens zu entäußern; so mag sie immerhin in gut geflicktem altem Gewande einherschreiten, wenn dieses nur zusammenhält. Und was ist eigentlich an Schlömilchs Kompendium zu flicken? Der Stoff ist gut; nur die Nähte halten nicht immer den modernen Ansprüchen stand; es gilt, den Zusammenhang des Ganzen durch strenge Schlußketten zu sichern.

Dadurch wird das Werk wieder brauchbar werden für den Studierenden der reinen Mathematik, und seine Brauchbarkeit für den Physiker und Techniker behalten. Denn was braucht dieser? Ein Werk, wie das des Herrn Stodola über Dampfturbinen oder eine theoretische Abhandlung von Helmholtz

kann man nicht verstehen, wenn man bloß die Methoden einer sogenannten Ingenieurmathematik beherrscht; was der Physiker und Techniker braucht, ist gründliche Kenntnis der naturwüchsigen analytischen Gebilde und Sicherheit im analytischen Rechnen; was er mit Recht ablehnt, sind die an sich bewundernswerten Überfeinerungen in der Theorie der reellen Funktionen, die Mengenlehre, die undifferenzierbaren Funktionen und ähnliche pathologische Erscheinungen; alle diese Dinge liegen der ganzen Art des Kompendiums fern. Es galt, diesen Vorzug des Werkes aufrecht zu erhalten, ohne seine Brauchbarkeit für das streng wissenschaftliche Studium zu gefährden. Die moderne Strenge mußte hineingearbeitet werden, aber mit strengster Sparsamkeit; das war auch zugunsten des Physikers und Technikers nötig, der schließlich beim Rechnen immer wieder scheitern wird, wenn er sich nicht klare Grundbegriffe und strenge Schlußweise zu eigen gemacht hat.

Beim Aufbau des Lehrgebäudes nach dieser Forderung waren Neuerungen gegenüber den vorliegenden strengen Darstellungen nötig, und hier berührte sich meine Arbeit mit einer bemerkenswerten Bewegung in der modernen Mathematik. Es ist bekannt, daß in den letzten Jahren namhafte Mathematiker dem festgefügten Gebäude der Analysis mit einer Revolution gedroht haben, die dann von zuständiger Stelle höchst witzig als Putsch bezeichnet wurde, wie ihn einst Kronecker mit größerer Schneidigkeit unternommen habe. Mein großer Lehrer Kronecker hatte einmal die Laune, den Gebrauch der Irrationalzahlen zu verbieten, ohne sich übrigens selbst an das Verbot zu kehren. Herr Weyl hat in seinem Werk über das Kontinuum, wie es scheint, die allgemeinen Sätze über die Existenz der oberen und unteren Grenze und des Häufungspunktes verbieten wollen, ein Verbot, das allerdings bis jetzt nicht viel beachtet zu sein scheint. Aber wie ein politischer Putsch, auch wenn er zusammenbricht, ein Blitzlicht auf die bestehenden Zustände wirft und damit vielleicht einer schiedlich-friedlichen Auseinandersetzung der verschiedenen Schichten der Gesellschaft vorarbeitet, so hat auch der Kroneckerputsch zur Scheidung der rein arithmetischen und der transzendenten

Methoden in der Algebra geführt, und das Unternehmen des Herrn Weyl weist ähnlich auf die grundsätzlichen Unterschiede in den allgemeinen infinitesimalen Beweismitteln hin, und kommt damit den Bedürfnissen des Unterrichts und der verständlichen Darstellung entgegen. Ich habe im ersten Bande des Kompendiums die allgemeinen Sätze über die Existenz der oberen und unteren Grenze und des Häufungspunktes vermieden und sie auf die funktionentheoretischen Abschnitte des zweiten Bandes verschoben. Um trotzdem durchzukommen, war es nötig, den herkömmlichen Begriff der Stetigkeit durch den der gleichmässigen Stetigkeit auf einer Strecke zu ersetzen, was für die Anwendungen keine Übelstände bringt, den Aufbau der Analysis aber erleichtert und die Unendlichkeitsbetrachtungen auf ein Mindestmaß zu beschränken erlaubt. Möge ein scharfer Kritiker prüfen, ob der Aufbau den geltenden Anforderungen an Strenge genügt.

Der Stoff des Werkes ist nicht sehr stark geändert worden. Die behagliche Stimme des erfahrenen Lehrers Schlömilch kommt möglichst ungestört zu Worte. Hinzugefügt ist am Anfang eine elementare Entwicklung der Eigenschaften der Wurzeln, Logarithmen und trigonometrischen Funktionen; bei letzteren ist die übliche, aber bedenkliche Bezugnahme auf die Flächeninhaltslehre der Elementargeometrie vermieden. An einer späteren Stelle ist die Lehre vom Flächen- und Rauminhalt, vom Inneren und Äußeren geschlossener Kurven so weit entwickelt, wie es für eine strenge Theorie der Doppelintegrale und Linienintegrale und damit für die im zweiten Bande behandelten Integrale der Funktionentheorie nötig ist. Hinzugefügt sind ferner die Sätze von Green und Stokes und die Grundlehren der Potentialtheorie, die seit den Arbeiten des Herrn E. Schmidt kurz und übersichtlich dargestellt werden können. Bei den Differentialgleichungen ist einiges gestrichen; die elementaren Integrationsmethoden werden im Sinne der Lieschen Anschauungen entwickelt, wie denn überhaupt die Invarianz gegenüber Transformationsgruppen an verschiedenen Stellen als Kennzeichen der einzelnen Untersuchungsgebiete hervortritt. Doch es lohnt nicht, alle Änderungen aufzuzählen;

mag der Leser, was ihm gefällt, gern dem würdigen Schlömilch zu gute schreiben.

Möge denn das Kompendium, das der Wissenschaft und dem Unterricht schon so treu und erfolgreich gedient hat, in erneuerter Gestalt seinen Weg in die Welt antreten; möge es Physikern und Technikern das brauchbare Rüstzeug scharf und rein darbieten, und möge es die Studierenden der Mathematik vor leerer Allgemeinheit und einseitiger Vertiefung in die Begriffskritik bewahren und zu tätiger Arbeit an den lebendigen und fruchtbaren Gebilden der Analysis anleiten.

Breslau, im September 1923.

Adolf Kneser.

Inhaltsverzeichnis.

Integralrechnung.

Berichtigung.

Seite 2, Zeile 17, 22, 24 von oben $\frac{1}{9}$ für $\frac{1}{11}$.

Einleitung.

I.

Das Rechnen mit rationalen Zahlen.

Im Gebiet der gewöhnlichen, mit einem Vorzeichen versehenen rationalen Zahlen, d. h. der positiven und negativen, ganzen oder gebrochenen Zahlen, beruht alles Rechnen, Vergleichen und alles arithmetische Schließen auf folgender Grundlage.

1. Jede von Null verschiedene Zahl ist entweder positiv oder negativ. Zu jeder Zahl a gibt es eine ihr entgegengesetzte $-a$ von demselben absoluten Betrag, den wir durch $|a|$ bezeichnen; er ist a oder $-a$, je nachdem a positiv oder negativ ist. 0 ist die einzige Zahl, die der ihr entgegengesetzten gleich ist.

2. Aus irgend zwei Zahlen a und b kann man durch die vier Grundrechnungen neue bilden, $a+b$, $a-b$, $a\,b$, a/b; bei der letzten muß b von Null verschieden vorausgesetzt werden. Diese Operationen sind den folgenden Regeln unterworfen:

$$a+b=b+a,\quad a+(b+c)=(a+b)+c,\qquad ab=ba,$$
$$a(bc)=(ab)c,\qquad a(b+c)=ab+ac,\quad (a-b)+b=a,$$
$$(a/b).b=a.$$

Beim Addieren zweier Summanden gleichen Vorzeichens erhält man eine Summe desselben Vorzeichens; beim Multiplizieren geben Faktoren gleichen Vorzeichens ein positives Produkt, Faktoren entgegengesetzten Vorzeichens ein negatives.

3. Die Beziehungen $a>b$, $a<b$ bedeuten, daß $a-b$ positiv ist im ersten, negativ im zweiten Falle. Die unter 2. angeführten Vorzeichenregeln ergeben dann, daß, wenn $a>b$ und $b>c$, auch die Ungleichung $a>c$ gilt; daß ferner, wenn $a>b$, von den Ungleichungen

$$ac>bc,\quad ac<bc,\quad 1/a<1/b$$

die erste oder zweite gilt, je nachdem c positiv oder negativ ist, die dritte gilt, wenn a und b dasselbe Vorzeichen haben.

Weiter ergeben die Vorzeichenregeln für die absoluten Beträge die Beziehungen

$$|a+b \qquad + |b|, \quad |a+b \qquad a| -$$

das Gleichheitszeichen gilt in der ersten von ihnen nur, wenn a und b dasselbe Vorzeichen haben, in der zweiten nur im entgegengesetzten Falle.

Zusammenfassend kann man sagen, daß der Unterschied des Vorzeichens und die Rechenregeln die Grundlage bilden für das Rechnen mit Gleichungen wie mit Ungleichungen. Wenn wir dabei die Worte Größe und Zahl als gleichwertig gebrauchen, so wird doch das erstere mehr an Eigenschaften der Ungleichheit, das letztere an solche der Gleichheit und die Rechenoperationen erinnern.

II.

Die irrationalen Zahlen.

Will man die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{11}$ in Dezimalbrüche entwickeln, so erhält man, wie man sagt, unendliche Dezimalbrüche 0,333... und 0,111... Das bedeutet, daß die Reihen bestimmter rationaler Brüche

$$(1) \qquad 0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ \ldots$$
$$0{,}1,\ 0{,}11,\ 0{,}111,\ \ldots$$

die Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{11}$ mit immer größerer Annäherung darstellen, je weiter man in den Reihen fortschreitet. Will man nun die Summe $\frac{1}{3}+\frac{1}{11}$ in Dezimalbrüchen ausrechnen, so findet man die annähernden Werte

$$0{,}3+0{,}1=0{,}4,\quad 0{,}33+0{,}11=0{,}44,\ \ldots;$$

will man dabei die Genauigkeit des Ergebnisses beliebig steigern, so muß man auch in der Reihe dieser Gleichungen immer weiter vorgehen; man rechnet mit den unendlichen Zahlreihen (1) und verbindet sie zu einer dritten, der Reihe 0,4, 0,44, 0,444, ... Das mag genügen, um vorläufig zu zeigen, was es heißt, mit unendlichen Zahlreihen rechnen, und wie man dazu kommt.

1. Allgemein sprechen wir von einer unendlichen Reihe von rationalen Zahlen $a_1, a_2, \ldots$, wenn zu jeder beliebigen natürlichen, d. h. positiven und ganzen Zahl n nach irgend einer Festsetzung ein bestimmter rationaler Wert a_n gehört; der Buchstabe n soll die an-

gegebene Bedeutung immer behalten; dieselbe Bedeutung möge auch den Buchstaben k, n_1 beigelegt werden.

Man setze z. B. $a_n = 1/n$; dann hat man eine Zahlreihe von der besonderen Beschaffenheit, daß ihre Glieder mit wachsenden Werten von n der Null immer näher kommen; sie werden, wie man sagt, bei großen Werten von n immer kleiner, so klein, wie man will. Genauer sei ε eine beliebig klein gegebene positive Größe; dann kann man n_1 so groß wählen, daß bei der Voraussetzung $n > n_1$ immer die Ungleichung $|a_n| < \varepsilon$ besteht; eine solche Zahlreihe heiße Elementarreihe. In dem angegebenen Beispiel braucht man nur $n_1 > 1/\varepsilon$ zu wählen; nach einer der Regeln I, 3. hat man dann $1/n_1 < \varepsilon$, also, wenn $n > n_1$, um so mehr $1/n < \varepsilon$ oder $|a_n| < \varepsilon$; das Zeichen des absoluten Betrages wäre hier wegzulassen, da alle Glieder der Zahlreihe positiv sind.

Wir nennen ferner eine Zahlreihe $c_1, c_2, \ldots$ beschränkt, wenn die absoluten Werte ihrer Glieder unter einer und derselben positiven Größe g liegen, so daß allgemein die Ungleichung $|c_n| < g$ gilt. Multipliziert man die Glieder einer Elementarreihe mit den entsprechenden, d. h. denselben Zeiger n enthaltenden Gliedern einer beschränkten Reihe, so erhält man wieder eine Elementarreihe. Denn sind wie oben a_n die Glieder einer Elementarreihe, so ist offenbar

$$|a_n c_n| < g\,|a_n|$$

und die rechts stehende Größe ist kleiner als ε, sobald

$$|a_n| < {}_{g}$$

was man, indem man in der oben für die Reihe $a_1, a_2, \ldots$ gegebenen Betrachtung ε durch ε/g ersetzt, bewirken kann, indem man $n > n_1$ nimmt. Dann folgt die Ungleichung $|a_n c_n| < \varepsilon$, womit die Reihe $a_1 c_1, a_2 c_2, \ldots$ als Elementarreihe erwiesen ist.

Die wichtigste Eigenschaft gewisser Zahlreihen, die auch die Reihen (1) aufweisen, ist die, daß ihre Glieder sich bei wachsenden Werten von n in gewisser Weise zusammendrängen. Es sei, wenn ε beliebig klein positiv vorgelegt wird, immer möglich, n_1 so zu bestimmen, daß bei der Annahme $n > n_1$ die Ungleichungen

$$(2) \qquad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

bei beliebigen Werten von k gelten. Das ist z. B. bei der Reihe 0,1, 0,11, 0,111, .. der Fall; vom dritten Gliede z. B. unterscheiden sich alle folgenden Glieder 0,1111 usf. um weniger als eine Einheit der dritten Dezimale, d. h. weniger als 10^{-3}; vom n^{ten} Gliede unter-

scheiden sich alle folgenden nur in der $(n+1)^{\text{ten}}$ Dezimale, also um weniger als 10^{-n}, d. h. beliebig wenig, wenn n hinreichend groß, etwa über n_1 angenommen wird. Reihen dieser Art, die die Ungleichung (2) in dem angegebenen Sinne darbieten, wollen wir brauchbare Zahlreihen nennen, weil sie sich zum Rechnen als brauchbar erweisen; das Rechnen mit ihnen bildet den Kern des Rechnens mit irrationalen Zahlen.

Eine erste Vorbemerkung ist, daß brauchbare Reihen beschränkt sind.

Denn wenn n hinreichend gewachsen ist, liegen alle Größen a_{n+k} zwischen $a_n + \varepsilon$ und $a_n - \varepsilon$, wobei ε wieder beliebig klein gegeben sein kann; alle Größen a_n liegen also zwischen der größten und kleinsten der endlich vielen Größen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon$.

Eine zweite Vorbemerkung ist, daß die Elementarreihen brauchbar sind. Denn ist $c_1, c_2, \ldots$ eine solche, so liegen alle c_n, sobald n eine gewisse Schranke überschritten hat, zwischen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$, die Differenzen $|c_n - c_{n+k}|$ also unter 2ε, und auch diese Größe kann wie ε als beliebig klein gegeben gelten.

Eine erste Haupteigenschaft der brauchbaren Reihen besteht darin, daß sie, wenn sie nicht Elementarreihen sind, in gewissem Sinne entschieden positiv oder entschieden negativ sind; damit meinen wir, daß im ersten Falle alle a_n, sobald n eine Schranke n_1 überschritten hat, nicht nur positiv sind, sondern auch über einer positiven Zahl α verbleiben; im zweiten Falle verbleiben sie unter einer negativen Größe $-\beta$. Wäre weder das eine noch das andere der Fall, so müßte $|a_n|$ noch für Werte n, die eine beliebig hohe Schranke n_1 überschreiten, unter jede gegebene positive Größe ε herabgehen. Wählt man dann n_1 so groß, daß für $n > n_1$ die Ungleichung

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

gilt, was bei der Brauchbarkeit der Reihe erlaubt ist, so ergäbe sich nach I, 3.

$$|a_{n+k}| = |a_n + (a_{n+k} - a_n)| < 2\varepsilon,$$

d. h. die Größen a wären von einer gewissen Stelle an absolut so klein, wie man will; die Reihe wäre Elementarreihe, entgegen der Voraussetzung. Daß aber Größen a_n sowohl größer als α wie kleiner als $-\beta$ werden könnten, wenn n eine beliebig hohe Schranke n_1 übersteigt, ist unmöglich, weil dann eine Ungleichung wie

$$|a_{n+k} - a_n| > \alpha + \beta$$

folgen würde, die, wenn $n > n_1$, der Brauchbarkeit der Zahlreihe $a_1, a_2, \ldots$ widerspricht.

Hiermit gewinnt die Gesamtheit der brauchbaren Zahlreihen einige der im Abschnitt I angeführten Grundeigenschaften des Gesamtreiches der rationalen Zahlen: sie sind wie diese positiv oder negativ, oder als Elementarreihen Verwandte der Null. Die einfachsten Beispiele positiver und negativer brauchbarer Zahlreihen sind die Annäherungswerte eines positiven oder negativen unendlichen Dezimalbruchs, wie etwa 0,111 ... oder — 0,333 ...

2. In der Vergleichung der Zahlreihen mit rationalen Zahlen kommen wir nun wesentlich weiter dadurch, daß man mit ersteren rechnen kann. Sind nämlich

$$A = [a_1, a_2, \ldots], \quad B = [b_1, b_2, \ldots]$$

zwei brauchbare Zahlreihen, so ist auch

$$C = [a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \ldots]$$

brauchbar und wir setzen $C = A + B$, womit die Summe zweier Zahlreihen definiert wird. Die Brauchbarkeit der Reihe C ergibt sich daraus, daß für $n > n_1$ die Ungleichungen

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon, \quad |b_n - b_{n+k}| < \varepsilon$$

gelten; aus ihnen folgt nach I, 3.

$$|a_n + b_n - (a_{n+k} + b_{n+k})| < 2\,\varepsilon,$$

womit, da auch $2\,\varepsilon$ wie ε als beliebig klein gegeben gelten kann, die Brauchbarkeit der Reihe C erhellt.

Wir setzen ferner

$$-B = [-b_1, -b_2, \ldots];$$

diese Reihe ist, da $-b_n - (-b_{n+k}) = -(b_n - b_{n+k})$ ebenso brauchbar wie B, und dient zur Erklärung der Subtraktion von Zahlreihen:

$$A - B = A + (-B) = [a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots];$$

die rechts erschienene Reihe ist wiederum wie C brauchbar. Man findet dabei ohne weiteres die im Abschnitt I, 2. erwähnten Grundregeln des Addierens und Subtrahierens

$$A + B = B + A, \; A + (B + C) = (A + B) + C, \; (A - B) + B = A.$$

Auch übersieht man, daß zwei positive Zahlreihen eine ebensolche als Summe ergeben; denn liegen a_n und b_n über der positiven Größe α, so gilt dasselbe von $a_n + b_n$.

Addiert oder subtrahiert man im besonderen zwei Elementarreihen

$$E = [e_1, e_2, \ldots], \quad E' = [e'_1, e'_2, \ldots],$$

so ist $E + E'$ wieder eine Elementarreihe, da allgemein nach I, 3.

$$|e_n + e'_n| \leqq |e_n| + |e'_n| < 2\,\varepsilon,$$

wenn $|e_n| < \varepsilon$, $|e'_n| < \varepsilon$, was bei hinreichend großen Zeigern n eintritt.

Weiter erklären wir das Produkt zweier brauchbarer Reihen durch die Gleichung

$$AB = [a_1 b_1, \ a_2 b_2, \ \ldots],$$

und da allgemein

$$a_n b_n - a_{n+k} b_{n+k} = (a_{n+k} - a_n) b_{n+k} + (b_{n+k} - b_n) a_n,$$

und die Größen a sowohl wie die Größen b nach der ersten Vorbemerkung des Abschnitts 1 beschränkte Reihen bilden, also etwa absolut unter der positiven Schranke g bleiben, so folgt, sobald die Ungleichungen

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon, \quad |b_n - b_{n+k}| < \varepsilon$$

durch eine Annahme $n > n_1$ gesichert sind, die weitere

$$|a_n b_n - a_{n+k} b_{n+k}| < 2 g \varepsilon,$$

und da auch hier rechts eine Größe erscheint, die ebensogut wie ε als beliebig klein gegeben gelten kann, so ist die Brauchbarkeit der Reihe AB bewiesen. Man übersieht nun sofort, daß die Grundregeln der Multiplikation gelten:

$$AB = BA, \quad A(BC) = (AB)C, \quad A(B + C) = AB + AC,$$

ferner auch die Gleichung

$$A(-B) = -AB,$$

aus der die gewöhnlichen Zeichenregeln der Multiplikation positiver und negativer Größen folgen, wenn man bedenkt, daß das Produkt zweier positiver Reihen wieder positiv ist, da, wenn a_n und b_n über der positiven Schranke α liegen, das Produkt $a_n b_n$ über α^2 liegt.

Multipliziert man im besonderen A mit der Elementarreihe $E = [e_1, e_2, \ldots]$, so ist auch $AE = E'$ eine Elementarreihe; denn ihre Glieder $a_n e_n$ liegen zunächst nach der ersten Vorbemerkung absolut unter $g\,|e_n|$, wobei g eine positive Größe bedeutet mit der allgemeinen Beziehung $g > |a_n|$; wenn nun $|e_n| < \varepsilon$, sobald $n > n_1$, so folgt unter derselben Annahme $a_n e_n < g\varepsilon$, und $g\varepsilon$ ist ebensogut beliebig klein gegeben wie ε. In der Tat ist also E' eine Elementarreihe.

Endlich die Division. Sei B keine Elementarreihe und enthalte keine Nullen, dann können wir erklären

$$\frac{1}{B} = \left[\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2},\right.$$

und die Reihe rechts ist brauchbar, da

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+k}} = - \frac{b_n - b_{n+k}}{b_n b_{n+k}}$$

und es nach Voraussetzung eine positive Zahl α von der Art gibt, daß, wenn $n > n_1$, die Ungleichungen

$$|b_n| > \alpha, \ |b_{n+k}| > \alpha, \ |b_n b_{n+k}| > \alpha^2$$

gelten; die letzte Gleichung ergibt also, sobald $|b_n - b_{n+k}| < \varepsilon$ geworden ist,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+k}}\right| < \frac{\varepsilon}{\alpha^2},$$

und die rechts erscheinende Größe kann wiederum ebensogut als beliebig klein gegeben gelten wie ε.

Weiter definieren wir jetzt

$$\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B},$$

immer unter der Annahme, daß B keine Elementarreihe sei und keine Nullen enthalte; nur dann gibt es eine Division durch B. Offenbar gilt dabei die Gleichung

$$B \cdot \frac{1}{B} = [1, 1, \ldots],$$

die Reihe rechts nennen wir [1] und erkennen ihre allgemeine Eigenschaft in der Gleichung

$$A \cdot [1] = A;$$

aus ihr folgt

$$\frac{A}{B} \cdot B = \left(A \cdot \frac{1}{B}\right) \cdot B = A \cdot \left(\frac{1}{B} \cdot B\right) = A \cdot [1] = A$$

und die unmittelbar ersichtliche Gleichung

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{C} = \frac{1}{BC} = \left[\frac{1}{b_1 c_1}, \frac{1}{b_2 c_2}, \ldots\right],$$

in der $C = [c_1, c_2, \ldots]$ eine brauchbare Zahlreihe von den für B geforderten Eigenschaften sei, ergibt

$$\frac{A}{BC} = A \cdot \frac{1}{BC} = \left(A \cdot \frac{1}{B}\right) \cdot \frac{1}{C} = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{C}.$$

Ebenso leicht erhält man, wenn D eine beliebige brauchbare Zahlreihe ist,

$$\frac{AD}{C} = AD \cdot \frac{1}{C} = A \cdot \frac{1}{C} \cdot D = \frac{A}{C} \cdot D,$$

und damit sind für die Division der Zahlreihen sämtliche Rechenregeln der gewöhnlichen Zahlendivision gesichert. Wie bei dieser die Null, so sind hier Elementarreihen als Divisoren ausgeschlossen.

3. In dieser ganzen Arithmetik der Zahlreihen wollen wir nun dem Gleichheitszeichen eine etwas allgemeinere Bedeutung geben. *Bis jetzt bedeutete die Gleichung* $A = B$ die volle Identität beider Reihen, Glied für Glied; jetzt sehen wir allgemein A und $A + E$ als gleich an, wenn E irgend eine Elementarreihe bedeutet.

Eine solche Gleichheit zweier zunächst nicht identischer Zahlen kommt beim Zahlenrechnen schon vor; wird doch der unendliche Dezimalbruch $0{,}999\ldots = 1$ gesetzt; das bedeutet nichts anderes als die Gleichheit der brauchbaren Zahlreihen

$$[0{,}9,\ 0{,}99,\ 0{,}999,\ \ldots] = [1,\ 1,\ \ldots];$$

die Unterschiede entsprechender Glieder bilden die Elementarreihe $[0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001,\ \ldots]$. Ebenso wird man auch setzen

$$[\tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{7}{8},\ \tfrac{15}{16},\ \ldots] = [1,\ 1,\ \ldots].$$

Eine besonders einfache Verwandlung einer brauchbaren Zahlreihe $A = [a_1, a_2, \ldots]$, bei der sie sich selbst gleich bleibt, erhält man, wenn man beliebig viele, etwa k Glieder aus ihr wegläßt. Schreibt man die neue Zahlreihe $A' = [a'_1, a'_2, \ldots]$, so ist $a'_n = a_{n+k}$, also $a'_n - a_n = a_{n+k} - a_n$, also kleiner als ε, sowie n hinreichend groß geworden ist; $A' - A$ ist also eine Elementarreihe, $A' = A$. Im besonderen kann man alle Nullen weglassen, wenn sie in endlicher Zahl auftreten, und so kann jede Zahlreihe, die nicht Elementarreihe ist, *einer anderen von Nullen freien gleichgesetzt werden*, also einer solchen, durch die man nach 2. dividieren kann.

Sind allgemein E und E' Elementarreihen, so ist $A + E' = A$ und $A + E = A$; aber auch $A + E$ und $A + E'$ unterscheiden sich nur um $E - E'$ und das ist, da $-E'$ eine Elementarreihe ist, wiederum eine solche; d. h. sind zwei Zahlreihen einer dritten gleich im jetzigen erweiterten Sinne, so sind sie unter sich gleich. Gleiche Zahlreihen können sich ferner bei den eingeführten Rechnungen ersetzen; denn offenbar ist z. B.

$$(A + E) + (B + E') = (A + B) + E + E' = A + B,$$
$$(A + E)B = AB + EB,$$

und EB ist, wie oben bemerkt, wieder eine Elementarreihe, also

$$(A + E)B = AB.$$

Das bedeutet die beim Rechnen selbstverständliche Tatsache, daß z. B. in den obigen beiden Beispielen die Addition $1 + 1 = 2$ durch die Summen

$$\tfrac{1}{2} + 0{,}9, \quad \tfrac{3}{4} + 0{,}99, \ldots$$

mit immer wachsender Annäherung dargestellt wird, und daß die Produkte

$$\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}9, \quad \tfrac{3}{4} \cdot 0{,}99, \quad \tfrac{7}{8} \cdot 0{,}999, \ldots$$

sich dem Produktwerte $1 \,.\, 1 = 1$ immer mehr annähern.

Die Elementarreihen ihrerseits sind alle einander gleich und gleich der Reihe

$$[0] = [0,\ 0,\ \ldots],$$

die hier beim Rechnen dieselbe Rolle spielt, wie die Null beim Zahlenrechnen, auch darin, daß sie nicht als Divisor auftreten darf.

Man sieht, soweit gerechnet wird und Gleichungen auftreten, haben wir für die brauchbaren Zahlreihen ein sehr ähnliches Bild der Arithmetik der rationalen Zahlen entwickelt. Beide Operationsgebiete können nun in der Weise verstanden werden, daß das Rechnen mit rationalen Zahlen als Sonderfall des Rechnens mit Zahlreihen erscheint. Um dies zu erreichen, brauchen wir nur grundsätzlich die rationale Zahl a durch die Zahlreihe $[a,\ a,\ \ldots]$ zu ersetzen, die wir durch $[a]$ bezeichnen. Dann werden Summe, Differenz, Produkt und Quotient von zwei rationalen Zahlen von selbst durch die Summe usf. der entsprechenden Zahlreihen ersetzt; offenbar ist z. B. $[ab] = [a]\,[b]$, ähnliches gilt für die anderen Operationen, und da die Rechenregeln bei den Zahlreihen dieselben sind wie bei den rationalen Zahlen, entspricht jeder richtigen Gleichung zwischen solchen die genau ebenso gebaute Gleichung zwischen den entsprechenden Zahlreihen, die man aber dann noch durch Reihen, die ihnen im erweiterten Sinne gleich sind, ersetzen darf. Umgekehrt geht eine Gleichung, in der nur Zahlreihen von der Form $[a]$ oder ihnen gleiche vorkommen, in eine genau ebenso gebaute Gleichung zwischen rationalen Zahlen über; ist z. B.

$$A = [a], \quad B = [b], \quad C = [c], \quad A + B = C,$$

so folgt, da man gleiches durch gleiches ersetzen darf,

$$C = [a] + [b] = [a + b] = [c];$$

$[a + b - c]$ ist eine Elementarreihe, deren Glieder alle gleich, also Null sind: $a + b = c$.

Auf diese Weise kann jede in rationalen Zahlen durchgeführte Rechnung dem Rechnen mit brauchbaren Zahlreihen eingeordnet werden.

4. Entscheidend für die Verwendbarkeit der Zahlreihen ist aber erst, daß auch die Begriffe des Größeren und Kleineren auf sie ausgedehnt und auch bezüglich der Größe die rationalen Zahlen ihnen eingeordnet werden können; diesen gegenüber erscheinen dann die nicht in der Form $[a]$ darstellbaren Zahlreihen als die irrationalen Größen.

Sind zwei Zahlreihen A und B nicht gleich, so ist ihre Differenz $A - B$ keine Elementarreihe, also positiv oder negativ. Entsprechend beiden Fällen sagen wir $A > B$, $B < A$ oder $A < B$, $B > A$. Da die Summe positiver Zahlreihen, wie oben bemerkt, positiv ist, so folgt aus den Ungleichungen

$$A > B, \quad B > C,$$

da $A - B$ und $B - C$ positive Zahlreihen sind, daß $(A - B) + (B - C) = A - C$ positiv ist, also $A > C$. Damit ist die Hauptregel für das Arbeiten mit dem Ungleichheitszeichen auf das jetzt betrachtete allgemeinere Gebiet übertragen. Hat man im besonderen $A = [a]$ und $B = [b]$, so ist $A - B = [a - b]$, die Ungleichung $A > B$ ergibt also auch $a > b$ und umgekehrt; also auch die Ungleichheiten zwischen rationalen Zahlen sind hiermit den Ungleichungen zwischen Zahlreihen eingeordnet; wir wollen demgemäß rationale Zahlen und Zahlreihen als Größen bezeichnen und bei den Reihen $[a]$ bisweilen die Klammern weglassen.

Sind im besonderen die Zahlen $c - a_n$, sobald $n > n_1$, alle positiv und über einer positiven Schranke gelegen, so ist die Zahlreihe $[c - a_1, c - a_2, \ldots]$ positiv, also $[c] - A$ positiv oder $c > A$.

Jetzt vergleichen wir die Reihe $A = [a_1, a_2, \ldots]$ mit der Gesamtheit der Reihen $[a_1], [a_2], \ldots$; man hat dann

$$A - a_n = A - [a_n] = [a_1 - a_n, a_2 - a_n, \ldots, 0, a_{n+1} - a_n, \ldots].$$

Wenn nun $n > n_1$, so ist $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$, also sind $2\varepsilon - (a_{n+1} - a_n)$, $2\varepsilon - (a_{n+2} - a_n)$, ... größer als ε und Glieder einer positiven Zahlreihe, die Größen $(a_{n+1} - a_n) - 2\varepsilon$, ... kleiner als $-\varepsilon$ und Glieder einer negativen Zahlreihe; also folgt nach der obigen Sonderbemerkung $(c > A)$

$$[2\varepsilon] > A - [a_n] > [-2\varepsilon]$$

oder

$$2\varepsilon > A - a_n > -2\varepsilon.$$

Das drücken wir durch folgenden Satz, den Grenzsatz, aus: Ist die Größe A durch eine Zahlreihe $[a_1, a_2, \ldots]$ dargestellt, so ist sie die Grenze, der sich die Größen a_n bei wachsenden Werten von n immer mehr annähern: $A = \lim a_n = \lim [a_n]$.

Das entspricht der gewöhnlichen Anschauung, daß z. B. die Zahl 1 die Grenze ist, der sich die Glieder der ihr gleichen Zahlreihe 0,9, 0,99, ... immer mehr annähern.

Überhaupt sagen wir, die Größen $A_1, A_2, \ldots$ streben dem Grenzwert A zu, in Zeichen

$$\lim A_n = A, \quad \lim_{n=\infty} A_n = A,$$

wenn die Differenz $A_n - A$ absolut genommen unter einer beliebig gegebenen positiven Größe ε liegt, sobald n eine gewisse Schranke n_1 überschritten hat. Dabei verstehen wir unter dem absoluten Betrag einer Größe B die Größe selbst, wenn sie positiv, die Größe $-B$, wenn sie negativ, die Null, streng genommen, die Zahlreihe $[0]$, wenn B eine Elementarreihe ist; wir bezeichnen den absoluten Betrag durch $|B|$. In der Untersuchung der Differenzen $A - a_n$ hat sich herausgestellt, daß $A - a_n$ ebenso wie $a_n - A$ zwischen -2ε und $+2\varepsilon$ liegt; also fand man

$$|a_n - A| < 2\varepsilon,$$

so daß die soeben gegebene Definition des Strebens zur Grenze dort in der Tat schon angewandt ist.

5. Jetzt sind wir in der Lage, einen Satz zu beweisen, auf dem im Grunde alle Schlüsse der über die elementare Arithmetik hinausgehenden Analysis beruhen, der diese Disziplin kennzeichnet und als allgemeiner Kernsatz der Analysis gelten kann. Sei eine unendliche Größenreihe $A_1, A_2, \ldots$ so beschaffen, daß bei beliebig klein gegebenem, positivem Wert ε die Ungleichung

$$|A_n - A_{n+k}| < \varepsilon$$

gilt, sobald n eine Schranke n_1 überschritten hat; dann gibt es eine bestimmte Größe A, der die Größen A_n als ihrer Grenze zustreben: $\lim A_n = A$.

Um dies einzusehen, werde jeder Größe A_n eine rationale Zahl a_n auf folgende Weise zugeordnet. Ist A_n rational, so sei $a_n = A_n$. Ist A_n nur durch eine Zahlreihe $[c_1, c_2, \ldots]$ darstellbar, und $[\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \ldots]$ eine Elementarreihe, deren Glieder von Null verschieden sind, so kann man nach dem Grenzsatz des Abschnitts 4 die Zahl m so groß wählen, daß die Ungleichung

$$|A_n - c_m| < \varepsilon_{0n}$$

gilt; wir setzen dann $a_n = c_m$. Auf diese Weise gilt die Ungleichung

$$|A_n - a_n| < \varepsilon_{0n}$$

allgemein; im Falle rationaler A_n ist ihre linke Seite ja Null. Aus ihr schließt man nach I, 3.

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n+k}| &= |A_n - A_{n+k} + (a_n - A_n) - (a_{n+k} - A_{n+k})| \\ &\leqq |A_n - A_{n+k}| + |a_n - A_n| + |a_{n+k} - A_{n+k}| \\ &\leqq |A_n - A_{n+k}| + 2\,\varepsilon_{0n}; \end{aligned}$$

wenn nun $n > n_1$ gewählt wird, folgt weiter

$$|a_n - a_{n+k}| \leqq \varepsilon + 2\,\varepsilon_{0n}.$$

Die Verbindung $\varepsilon + 2\,\varepsilon_{0n}$ ist aber ebenso wie ihre Bestandteile als beliebig klein anzusehen, sobald n_1 hinreichend groß genommen wird; die Reihe $[a_1, a_2, \ldots]$ ist also brauchbar und werde durch A bezeichnet. Sie ist die gesuchte Grenze; denn offenbar ist nach I, 3.

$$\begin{aligned} |A - A_n| = |(A - a_n) + (a_n - A_n)| &\leqq |A - a_n| + |a_n - A_n| \\ &\leqq |A - a_n| + \varepsilon_{0n}; \end{aligned}$$

da nun die rechts stehenden Größen beide beliebig klein werden, wenn n hinreichend groß gewählt wird, so nähern sich die Größen A_n dem Werte A bei wachsenden Werten von n unbeschränkt: $A = \lim A_n$, wie behauptet wurde.

Sei besonders eine Reihe wachsender oder doch nicht abnehmender Größen $A_1, A_2, \ldots$ gegeben, die alle unter einer Schranke G bleiben, $G > A_n$; alsdann streben die Größen A_n einer Grenze zu. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es solche positive Werte α, daß oberhalb jeder Schranke n_1 noch Zeigerpaare n, $n + k$ lägen, die die Ungleichung $A_{n+k} - A_n > \alpha$ lieferten; denn die Verneinung dieses Satzes würde bedeuten, daß die Voraussetzungen des Kernsatzes erfüllt wären; die Behauptung wäre schon erwiesen. Gibt es Werte α der angegebenen Beschaffenheit, so kann oberhalb des Zeigerwertes $n + k$ wieder ein Zeigerpaar n', $n' + k'$ gefunden werden, so daß $A_{n'+k'} - A_{n'} > \alpha$; so fortfahrend erhält man beliebig viele positive Differenzen $-A_n + A_{n+k}$, $-A_{n'} + A_{n'+k'}$, $-A_{n''} + A_{n''+k''}$, die größer als α sind und in denen die Zeiger so, wie wir geschrieben haben, wachsen. Da nun die Größen A mit wachsenden Zeigern nicht abnehmen, so ist z. B. die Summe der ersten drei Differenzen nicht größer als $-A_n + A_{n''+k''}$; diese Summe ist größer als $3\,\alpha$, und ebenso können wir Differenzen $-A_n + A_{n+m}$ finden, die größer sind als ein beliebiges ganzes Vielfaches von α. Daraus folgt, daß die Größen A den Wert A_n um beliebig hohe Vielfache von α überschreiten, also beliebig groß werden und besonders auch den Wert G überschreiten, entgegen der Voraussetzung. Genau in derselben Weise zeigt man, daß auch abnehmende Größen

A_n, wenn sie über einer unteren Schranke H bleiben, $A_{n+k} \leqq A_n$, $A_n > H$, einer Grenze zustreben. Damit ist die wichtigste Anwendung des allgemeinen analytischen Kernsatzes bewiesen. Nennen wir die Reihe der Größen A_n nach oben oder unten beschränkt, wenn die eine oder andere der Ungleichungen $G > A_n$, $H < A_n$ gilt, so können wir sagen: Eine nach oben beschränkte Reihe wachsender oder doch nicht abnehmender Größen, eine nach unten beschränkte Reihe abnehmender oder doch nicht zunehmender Größen streben bestimmten Grenzen zu. Diesen Satz nennen wir den besonderen Kernsatz der Analysis oder Kernsatz schlechthin, weil aus ihm die ganze Differentialrechnung entspringt.

6. Das Zeichen lim kann als Operationszeichen den Zeichen der vier Grundoperationen beigesellt werden, da sich für die Kombination mit diesen einfache Rechenregeln angeben lassen, die folgenden nämlich:

$$\lim a_n + \lim b_n = \lim (a_n + b_n),$$
$$\lim a_n - \lim b_n = \lim (a_n - b_n),$$
$$\lim a_n \,.\, \lim b_n = \lim (a_n b_n), \quad \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \lim \frac{a_n}{b_n}.$$

In diesen Gleichungen, die wir künftig als Limesregeln bezeichnen wollen, bedeuten a_n, b_n beliebige, rationale oder irrationale Größen und es wird vorausgesetzt, daß die Grenzwerte

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b$$

existieren, was unter Umständen nach 5. bewiesen werden kann. In der auf die Division bezüglichen Gleichung wird b als von Null verschieden vorausgesetzt. Der Inhalt der aufgestellten Gleichungen kann dahin zusammengefaßt werden, daß das Zeichen lim mit dem Zeichen jeder der vier Grundoperationen vertauscht werden kann.

Der Beweis dieser Gleichungen ist leicht und beruht darauf, daß, wenn zwei von n abhängige Größen d_n, e_n absolut unter eine beliebig klein gegebene Größe ε durch Steigerung des Wertes von n herabgedrückt werden können, dasselbe von ihrer Summe $d_n + e_n$ gilt und von dem Produkt $g_n e_n$, wenn der Faktor g_n eine beliebige beschränkte Größenreihe durchläuft. Sei nämlich $a - a_n = d_n$, $b - b_n = e_n$; dann findet man

$$a \pm b - (a_n \pm b_n) = d_n + e_n, \quad ab - a_n b_n = b_n d_n + a_n e_n + e_n d_n,$$
$$\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n d_n - a_n e_n}{b b_n};$$

ist b von Null verschieden, so gibt es eine positive Größe α, derart, daß $|b| > \alpha$, $|b_n| > \alpha$, und die letzte Gleichung ergibt

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{|b_n d_n - a_n e_n|}{\alpha^2}.$$

Aus diesen Beziehungen ergibt sich das Behauptete auf Grund der über die Größen e_n und d_n gemachten Bemerkungen; offenbar ist ja nach der Definition des Grenzwertes $|e_n| < \varepsilon$, $|d_n| < \varepsilon$, sobald der Zeiger n hinreichend gewachsen ist. An die zweite der vier Hauptgleichungen $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$ kann eine fruchtbare Bemerkung geknüpft werden, die man als Kern des alten Exhaustionsverfahrens ansehen kann. Setzt man voraus $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, und weiß man, daß $\lim(a_n - b_n) = 0$, so folgt $a = b$. Damit ist der folgende Exhaustionssatz bewiesen:

A. Nähern sich zwei Größen, deren Unterschied beliebig herabgedrückt werden kann, bestimmten Grenzen, so sind diese gleich.

Endlich sei noch bemerkt, daß, wenn $a = \lim a_n$ positiv ist, die Differenzen $a - a_n$ schließlich, d. h. wenn n groß genug geworden ist, kleiner als z. B. $\frac{1}{2}a$ werden; die Größen a_n liegen dann in der Strecke von $\frac{1}{2}a$ bis a, sind also schließlich positiv. Sind daher die Größen a_n negativ, so folgt, wenn $\lim a_n = a$, notwendig $a \leqq 0$. Oder ist allgemeiner $a_n < g$, so ist $\lim(a_n - g) \leqq 0$, $a \leqq g$. Ebenso folgt, wenn $a_n > g$, die Ungleichung $\lim a_n \geqq g$. Damit ist folgender Satz, den wir den Schrankensatz nennen wollen, bewiesen:

B. Liegen die Größen a_n entweder unter oder über einer Schranke, so liegt der Grenzwert $\lim a_n$ im ersten Falle unter, im zweiten über der Schranke, kann aber in beiden Fällen auch der Schranke gleich sein.

7. Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, daß man, wenn $\lim a_n = a$, auch schreibt

$$a_n \longrightarrow a, \qquad \lim_{n=\infty} a_n = a;$$

aus $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b$ folgt dann $a_n b_n \longrightarrow ab$ usf.

Die häufig gebrauchte Bezeichnung $n = \infty$ führt zur Definition des Zeichens ∞. Wenn die Größen a_n bei wachsenden Zeigern über jede positive Grenze hinaus gelangen, so daß, wenn g beliebig groß positiv gegeben ist, $a_n > g$ ist, sobald n eine gewisse Schranke n_1 übersteigt, wie z. B., wenn $a_n = n$ oder $= n^2$ gesetzt wird, so schreiben wir

$$a_n \longrightarrow +\infty, \quad \lim a_n = +\infty, \quad \lim_{n=\infty} a_n = +\infty,$$

ebenso, wenn in der soeben getroffenen Festsetzung g durch eine absolut beliebig große negative Größe h, und die Ungleichung $a_n > g$ durch $a_n < h$ ersetzt wird,

$$a_n \longrightarrow -\infty, \quad \lim a_n = -\infty, \quad \lim_{n=\infty} a_n = -\infty.$$

Beispiele sind die Reihen $a_n = n$, $a_n = n^2$, $a_n = -n$, $a_n = -n^2$; bei der immer festgehaltenen Bedeutung der Zahl n kann man sagen, daß bisher immer die Gleichung $\lim n = +\infty$ im Hintergrunde stand. Wo das Zeichen ∞ ohne Vorzeichen gebraucht wird, soll darunter $+\infty$ verstanden werden.

Neben diesem uneigentlichen gibt es noch einen in gewissem Sinne unbestimmten Gebrauch des Zeichens lim, wenn es sich nämlich um Größen y handelt, bei deren Definition eine Größe x vorkommt, die wir während der Rechnung als veränderlich ansehen in einem gewissen Wertbereich, z. B. auf der durch eine Ungleichung $a \leqq x \leqq b$ bestimmten Strecke, der Strecke $a \ldots b$, wie wir schreiben wollen. Wir nennen dann y eine Funktion von x in dem betreffenden Wertbereich, auf der angegebenen Strecke z. B., und schreiben $y = f(x)$ oder $y = \varphi(x)$ u. dgl. Durchläuft dann die Größe x in ihrem Wertbereich die Werte $x_1, x_2, \ldots$ und ist dabei $\lim x_n = x_0$, so kann es sein, daß die zugehörigen Werte von y, also $f(x_1), f(x_2), \ldots$, auch einer Grenze zustreben. Ist etwa $y = f(x) = x^2$, so ist klar, daß, wenn $\lim x_n = 0$ angenommen wird, $\lim f(x_n) = \lim x_n^2 = 0$ folgt, und dieser Grenzwert bleibt derselbe, wenn eine andere Reihe von Werten $\bar{x}_n$ genommen wird, für die $\lim \bar{x}_n = 0$ ist; offenbar hat man auch $\lim f(\bar{x}_n) = \lim \bar{x}_n^2 = 0$. Wenn überhaupt die Gleichung

$$\lim f(x_n) = a$$

besteht, sobald $\lim x_n = b$ vorausgesetzt wird, wie immer sonst die Größenreihe x_n gewählt wird, so drücken wir das durch die Gleichung

$$\lim_{x=b} f(x) = a$$

aus; in dem Beispiel $f(x) = x^2$ ergab sich, $b = 0$ angenommen, immer $a = 0$. Der hier gebrauchte Grenzübergang der Größe x kann als unbestimmt bezeichnet werden. Es kann ferner vorkommen, daß der Wert für $\lim f(x)$ nur dann sich $= a$ ergibt, wenn die Größen x sich von einer Seite, nur von oben oder nur von unten her der Grenze b annähern; dann schreibt man

$$\lim_{x=b+0} f(x) = a, \quad \lim_{x=b-0} f(x) = a.$$

Sei z. B. $f(x) = +1$, wenn $x \geqq 0$, dagegen $f(x) = -1$, wenn x negativ ist, so hat man die Gleichungen

$$\lim_{x=+0} f(x) = +1, \qquad \lim_{x=-0} f(x) = -1,$$

wobei zu bemerken ist, daß $f(0) = +1$ ist.

Auch uneigentliche Grenzwerte können in unbestimmter Weise angestrebt werden; z. B.:

$$\lim_{x=a+0} \frac{1}{x-a} = +\infty, \qquad \lim_{x=a-0} \frac{1}{x-a} = -\infty.$$

Wenn ferner irgendwie $\lim x_n = +\infty$, erhalte man immer $\lim f(x_n) = a$; dann schreiben wir

$$\lim_{x=\infty} f(x) = a,$$

und das Beispiel

$$f(x) = a + \frac{1}{x}$$

zeigt uns, wie eine solche Gleichung zustande kommt; wie immer die positiven Größen x_n gewählt werden, ist nur $\lim x_n = \infty$, so folgt

$$\lim \frac{1}{x_n} = 0,$$

oder es gilt die unbestimmte Grenzgleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \doteq 0.$$

Der Sinn einer der Gleichungen

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x=+\infty} f(x) = -\infty$$

ist hiernach ebenfalls leicht ersichtlich, und man kann auch die Symbole

$$\lim_{x=-\infty} f(x)$$

ebenso gebrauchen.

Die Regeln der Grenzwertrechnung bleiben für unbestimmte Grenzübergänge dieselben, wie früher, wenn alle Zeichen lim durch denselben Grenzübergang der Größe x bestimmt sind; z. B. wenn

$$\lim_{x=b} f(x) = a, \quad \lim_{x=b} \varphi(x) = a',$$

so folgt

$$\lim_{x=b} [f(x) \cdot \varphi(x)] = a\,a' \text{ usf.}$$

III.

Beispiele von Grenzwerten.

Die Beispiele, auf die wir die entwickelten Grundbegriffe anwenden wollen, haben sämtlich für den Aufbau der Analysis grundlegende Bedeutung: die Potenzen mit gebrochenem Exponenten, die Logarithmen, die trigonometrischen Funktionen.

1. Sei a eine beliebige positive Größe; dann gibt es unter den positiven ganzen Zahlen mit Einschluß der Null zwei aufeinanderfolgende k und $k+1$, derart, daß

$$k^2 \leqq a < (k+1)^2.$$

Unter den Zahlen k und $k+\frac{1}{2}$ gibt es eine größte, deren Quadrat noch $\leqq a$ ist, d. h. entweder ist $(k+\frac{1}{2})^2 > a$ oder $(k+\frac{1}{2})^2 \leqq a$. Im ersten Falle setzen wir $k_1 = k$, im zweiten $k_1 = k+\frac{1}{2}$ und haben dann immer die Ungleichheiten

$$k_1 \geqq k, \quad k+1 \geqq k_1 + \tfrac{1}{2}, \quad {k_1}^2 \leqq a, \quad (k_1+\tfrac{1}{2})^2 > a.$$

Ebenso bestimmen wir unter den beiden Zahlen k_1 und $k_1 + (\frac{1}{2})^2$ die größte, deren Quadrat a nicht überschreitet, und nennen sie k_2, dann ist

$$k_2 \geqq k_1, \quad k_1 + \tfrac{1}{2} \geqq k_2 + (\tfrac{1}{2})^2, \quad {k_2}^2 \leqq a, \quad [k_2 + (\tfrac{1}{2})^2]^2 > a.$$

Auf diese Weise fortfahrend, erhält man die Zahlen $k, k_1, k_2, \ldots$, derart, daß allgemein

$$k \leqq k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots, \quad k+1 \geqq k_1 + \tfrac{1}{2} \geqq k_2 + (\tfrac{1}{2})^2 \geqq k_3 + (\tfrac{1}{2})^3 \geqq \ldots$$
$$k_n^2 \leqq a, \quad [k_n + (\tfrac{1}{2})^n]^2 > a, \quad k_n < k+1, \quad k_n + (\tfrac{1}{2})^n > k.$$

Nach dem Kernsatz der Analysis (II, 5.) existieren Grenzwerte für die zunehmende Reihe der Größen k_n, die alle unter $k+1$ bleiben, und für die abnehmende Reihe der Größen $k_n + (\frac{1}{2})^n$, die alle über k bleiben, Grenzwerte

$$\alpha = \lim k_n, \quad \beta = \lim [k_n + (\tfrac{1}{2})^n],$$

und da die Differenz der beiden unter lim stehenden Größen $(\frac{1}{2})^n$ ist, also beliebig klein wird mit wachsenden Werten von n, so ergibt sich nach dem Exhaustionssatz [II, 6. (A)] die Gleichung $\alpha = \beta$.

Nun ist nach einer der Limesregeln (II, 6.)

$$\lim k_n^2 = (\lim k_n)^2 = \alpha^2;$$

anderseits zeigen die obigen Ungleichungen $\lim k_n^2 = a$; also folgt $\alpha^2 = a$, und es ist hiermit die Existenz einer Quadratwurzel $\sqrt{a}$ nachgewiesen, die nach dem Schrankensatze [II, 6. (B)] nicht negativ sein kann, also, da der Wert Null offenbar ausgeschlossen ist, positiv sein muß.

Ersetzt man in der soeben durchgeführten Schlußreihe die Quadrate durch m^{te} Potenzen, so findet man ebenso, daß eine positive m^{te} Wurzel $\sqrt[m]{a}$ existiert, für die man auch $a^{1/m}$ schreibt; unter $\sqrt{a}$ verstehen wir immer die positive Quadratwurzel.

2. Wenn $a = 1 + c$ und c positiv ist, so sieht man durch Ausmultiplizieren unmittelbar, daß $(1 + c)^n$ aus den Gliedern $1 + nc$ und weiteren positiven Gliedern besteht, also, wenn $nc = c_1$ gesetzt wird,

$$\left(1 + \frac{c_1}{n}\right)^n > 1 + c_1,$$

also

$$\sqrt[n]{1 + c} < 1 + \frac{c_1}{n};$$

hieraus folgt sofort

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{1}$$

Wenn es sich nun, wie wir sehen werden, zeigen läßt, daß auch $\lim n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$ immer existiert, d. h. endlich und bestimmt ist, so zeigt die Umformung

$$\sqrt[n]{ab} - 1 = \sqrt[n]{a} - 1 + \sqrt[n]{b} - 1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\left(\sqrt[n]{b} - 1\right),$$

in der auch $b > 1$ sei, indem man mit n multipliziert und $n = \infty$ werden läßt,

$$\lim\left(n\sqrt[n]{ab} - 1\right) = \lim n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) + \lim n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right)$$
$$+ \lim\left\{\frac{1}{n} \cdot n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) . n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right)\right\},$$

und der dritte Grenzwert rechts ist Null, da er nach der Regel (II, 6.) für $\lim a . \lim b$ als Produkt

$$\lim \frac{1}{n} \cdot \lim n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) . \lim\left(n\sqrt[n]{b} - 1\right)$$

dargestellt werden kann, und die Gleichung $\lim(1/n) = 0$ gilt. Somit folgt

$$\lim\left(n\sqrt[n]{ab} - 1\right) = \lim n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) + \lim n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right),$$

oder, wenn wir schreiben

$$\lim n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \lg a$$

und diesen Grenzwert den natürlichen Logarithmus von a nennen,

$$\lg a\, b = \lg a + \lg b.$$

Gelingt es also, die Grenzwerte $\lg a$ usw. zu bestimmen, so haben wir ein praktisch brauchbares Größensystem, das erlaubt, Multiplikation durch Addition der Logarithmen zu ersetzen.

Wir führen den angedeuteten Grenzübergang in der besonderen Weise durch, daß wir n durch 2^n ersetzen. Sei $x > 1$; dann bilden wir die Größen

$$x_1 = \sqrt{x}, \quad x_2 = \sqrt{x_1}, \ldots x_n = x^{2^{-n}}, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n}, \ldots$$

und schließen aus der allgemeinen Ungleichung (1) sofort $\lim x_n = 1$, wobei $x_n > 1$. Weiter setzen wir:

$$\xi_1 = 2(x_1 - 1), \quad \xi_2 = 2^2(x_2 - 1), \ldots \xi_n = 2^n(x_n - 1), \ldots$$

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{x_1} = 2\left(1 - \frac{1}{x_1}\right), \quad \eta_2 = \frac{\xi_2}{x_2} = 2^2\left(1 - \frac{1}{x_2}\right), \ldots$$

Dann ist allgemein

$$\begin{aligned}\xi_n &= 2^n\left(\sqrt{x_n} - 1\right)\left(\sqrt{x_n} + 1\right)\\ &= 2^{n+1}(x_{n+1} - 1)\cdot\frac{x_{n+1}+1}{2} = \xi_{n+1}\cdot\frac{x_{n+1}+1}{2};\end{aligned}$$

ebenso findet man

$$\eta_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) = \eta_{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right).$$

Hieraus folgt, da $x_{n+1} > 1$ ist,

$$\xi_{n+1} < \xi_n, \quad \eta_{n+1} > \eta_n, \quad \xi_n = x_n\,\eta_n > \eta_n,$$

und weiter, indem man kombiniert

$$\xi_1 > \eta_n, \quad \eta_1 < \xi_n. \tag{2}$$

Die Größen η_n bilden also eine zunehmende, nach oben beschränkte Reihe, die Größen ξ_n nehmen ab, sind aber nach unten beschränkt; der Kernsatz der Analysis (II, 5.) ergibt also die Existenz der Grenzwerte

$$\xi = \lim \xi_n, \quad \eta = \lim \eta_n,$$

und da nach einer Limesregel (II, 6.)

$$\lim \xi_n = \lim \eta_n \, x_n = \lim \eta_n \,.\, \lim x_n,$$

$\lim x_n$ aber, wie bemerkt, $= 1$ ist, folgt

$$\lim \xi_n = \lim \eta_n, \quad \xi = \eta.$$

Da ferner

$$x - 1 = (x_1 - 1)(x_1 + 1), \quad 1 - \frac{1}{x} = \left(1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_1}\right), \quad x_1 > 1,$$

so folgt

$$x - 1 > \xi_1 > \eta_1 > 1 - \frac{1}{x},$$

also nach (2) und nach dem Schrankensatze [II, 6. (B)]

$$(3) \qquad \xi_1 \geqq \xi \geqq \eta_1, \quad x - 1 > \xi > 1 - \frac{1}{x}.$$

Hiermit ist nun der natürliche Logarithmus $\xi = \lg x$ endgültig definiert; wir rechtfertigen diese Bezeichnung in folgender Weise. Sei $u > 1$, $v > 1$, $x = uv$, und seien die Größen u_n aus u, v_n aus v ebenso gebildet wie x_n aus x; dann ist offenbar

$$u_1 = \sqrt{u}, \quad v_1 = \sqrt{v}, \quad x_1 = \sqrt{uv} = u_1 v_1, \quad x_n = u_n v_n,$$
$$\xi_n = 2^n (x_n - 1) = 2^n (u_n - 1) + 2^n (v_n - 1)$$
$$+ \frac{1}{2^n} \cdot 2^n (u_n - 1) \,.\, 2^n (v_n - 1).$$

Läßt man nun n wachsen, so ergeben die Limesregeln (II, 6.)

$$\lg x = \lim \xi_n = \lg u + \lg v + \lim \frac{1}{2^n} \cdot \lg u \,.\, \lg v,$$

also, da $\lim 2^{-n} = 0$,

$$(4) \qquad \lg uv = \lg u + \lg v,$$

womit die Grundeigenschaft der Logarithmen hergeleitet ist. Setzt man noch

$$\lg 1 = 0, \quad \lg \frac{1}{x} = -\lg x,$$

so ist der Logarithmus jeder positiven Zahl erklärt, und man übersieht leicht, daß die Gleichung (4) allgemein gilt.

Die zweite Ungleichung (3) ergibt, wenn $h > 0$, $x = 1 + h$ gesetzt wird,

$$(5) \qquad h > \lg(1 + h) > \frac{h}{1 + h}, \quad 1 > \frac{\lg(1 + h)}{h} > \frac{1}{1 + h};$$

macht man also den unbestimmten Grenzübergang $\lim h = +0$, so ergibt sich

$$(6)\qquad \lim_{h=+0} \frac{\lg(1+h)}{h} = 1.$$

Dies Ergebnis kann ungenau dahin ausgesprochen werden, daß $\lg(1+h)$ bei kleinen Werten von h diesem Werte nahezu gleich ist.

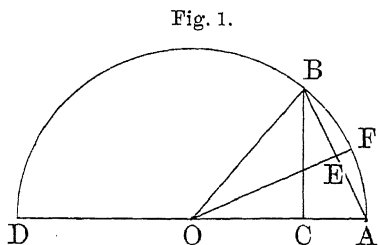
Der gewöhnliche Tafellogarithmus wird jetzt einfach durch die Gleichung

$$\log x = \frac{\lg x}{\lg 10}$$

erklärt, die die Hauptgleichung (4) auf die Logarithmen log zu übertragen erlaubt.

3. Ebenso wichtig wie der Logarithmus sind die Grenzprozesse, die den Kreisbogen durch seine Sehne oder eine seiner trigonometrischen Funktionen ausdrücken lehren.

Fig. 1.

Sei $\alpha = AOB$ ein spitzer Zentriwinkel im Kreis mit dem Radius $OA = OB = 1$, sei ferner $OD = OA$ und C der Fußpunkt des von B auf OA gefällten Lotes; dann gibt die Gleichung $AC \cdot AD = AB^2$ (Fig. 1). Fällt man ferner von O auf AB das Lot OE, das den Kreisbogen AB in F trifft, so ist nach der üblichen Bezeichnung

$$OC = \cos\alpha,\ BC = \sin\alpha,\ AE = EB = \sin\frac{\alpha}{2},\ AC = 1 - \cos\alpha,$$

und die angeführte Gleichung ergibt

$$(1)\qquad AB^2 = \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2(1-\cos\alpha),$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Ebenso findet man, indem man α durch $\frac{\alpha}{2}$ ersetzt,

$$BF = 2\sin\frac{\alpha}{4},\quad BF + FA = 2^2\sin\frac{\alpha}{2^2},$$

und hat in dieser Summe eine zweite, in der Sehne AB die erste Annäherung an den Bogen AB. Halbiert man weiter die Bögen

AF und FB und fährt so fort, so erhält man allgemein die Ausdrücke $2^n \sin(\alpha/2^n)$ als Länge eines dem Kreisbogen AB eingeschriebenen gleichseitigen Vieleckszuges von 2^n Seiten, und die Werte der trigonometrischen Funktionen $\sin(\alpha/2^n)$ ergeben sich durch stufenweise fortschreitende Anwendung der Formeln (1). Als Länge des Kreisbogens betrachtet man die Grenze, der sich die Länge jenes Vieleckszuges annähert, d. h.

$$\lim 2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}. \tag{2}$$

Diese Erinnerungen aus der Geometrie veranlassen uns, einen rein arithmetischen Grenzübergang zu untersuchen, der die trigonometrischen Funktionen in strenger Weise der Analysis eingliedert und ihr dienstbar macht. Für $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ schreiben wir $\bar{x}$ und x und verstehen hierunter irgend zwei nicht negative Größen, die die Gleichung

$$x^2 + \bar{x}^2 = 1$$

erfüllen. Wir setzen dann, immer mit positiver Quadratwurzel,

$$\bar{x}_1 = \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{2}}, \qquad x_1 = \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{2}};$$

allgemein

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{1+x_{n-1}}{2}}, \quad x_n = \sqrt{\frac{1-\bar{x}_{n-1}}{2}}.$$

Immer liegen alle diese Größen auf der Strecke $0 \ldots 1$ einschließlich der Grenzen; denn gilt dies für x_{n-1} und $\bar{x}_{n-1}$, so können auch x_n und $\bar{x}_n$ nicht aus jener Strecke herausfallen. Da dies für x und $\bar{x}$ vorausgesetzt wird, ist allgemein

$$0 \leqq x_n \leqq 1, \quad 0 \leqq x_n \leqq 1. \tag{3}$$

Im Falle $x = 1$ sind alle $\bar{x}_n = 1$, alle $x_n = 0$; von diesem Falle sehen wir fortan ab. Setzen wir für einen Augenblick $x = \cos\alpha$, $\bar{x} = \sin\alpha$, so ist den Formeln (1) zufolge

$$x_n = \sin\frac{\alpha}{2^n}, \quad \bar{x}_n = \cos\frac{\alpha}{2^n}$$

und die dem Winkel α entsprechende Bogenlänge im Kreise vom Radius 1 ist die Größe (2) oder $\lim 2^n x_n$. Diesen Grenzwert wollen wir untersuchen, ohne fortan die trigonometrische Bedeutung der Größen x und $\bar{x}$ zu benutzen.

Aus der Erklärung der Größen x_n und $\overline{x}_n$ folgt

$$(4)\qquad 2\,x_n\,\overline{x}_n = \sqrt{1-\overline{x}_{n-1}^2} = x_{n-1},$$

also wegen der Ungleichungen (3)

$$x_{n-1} \leqq 2\,x_n,$$

also weiter

$$x \leqq 2\,x_1 \leqq 2^2\,x_2 \leqq \ldots$$

Zum Nachweis, daß diese Größenreihe nach oben beschränkt ist, führen die Größen

$$x^0 = \frac{x}{\overline{x}}, \quad x_n^0 = \frac{x_n}{\overline{x}_n},$$

von denen die erste im Falle $\overline{x} = 0$ keinen Sinn hat und dann in den folgenden Formeln einfach wegzulassen ist. Man findet nämlich nach (4), indem man $x_0 = x$, $\overline{x}_0 = \overline{x}$ setzt, allgemein, wenn $n \geqq 1$ ist,

$$x_{n-1}^0 = \frac{x_{n-1}}{\overline{x}_{n-1}} = \frac{2\,x_n\,\overline{x}_n}{\overline{x}_{n-1}} = 2\,x_n^0 \cdot \frac{\overline{x}_n^2}{\overline{x}_{n-1}},$$

dabei ist

$$\frac{\overline{x}_n^2}{\overline{x}_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\overline{x}_{n-1}}\right) \geqq 1,$$

also

$$x_{n-1}^0 \geqq 2\,x_n^0$$

oder auch

$$x^0 \geqq 2\,x_1{}^0 \geqq 2^2\,x_2{}^0 \geqq \ldots$$

Nun ist $\overline{x}_n < 1$, sobald n mindestens den Wert 1 hat, abgesehen vom Falle $\overline{x} = 1$, den wir ja schon erledigt haben; daraus folgt

$$x_n^0 > x_n,$$

also allgemein

$$(5)\qquad x^0 \geqq 2\,x_1{}^0 \geqq 2^n\,x_n^0 > 2^n\,x_n \geqq x.$$

Die Größen $2^n\,x_n$ bilden also eine nach oben beschränkte zunehmende oder doch nicht abnehmende Reihe, die Größen $2^n\,x_n^0$ eine nach unten beschränkte, nicht zunehmende Reihe; beide streben nach dem Kernsatz Grenzen zu, etwa

$$\xi = \lim 2^n\,x_n, \quad \xi^0 = \lim 2^n\,x_n^0;$$

daraus folgt, da 2^n unbeschränkt wächst, $\lim x_n = 0$, und, da $x_n^2 + \overline{x}_n^2 = 1$, folgt weiter

$$\lim \overline{x}_n = 1, \quad \lim 2^n\,x_n = \lim 2^n\,x_n^0\,\overline{x}_n = \lim 2^n\,x_n^0 . \lim \overline{x}_n, \quad \xi = \xi^0.$$

Damit ist rein arithmetisch der gemeinsame Grenzwert der Größen

$$2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}, \quad 2^n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^n}$$

nachgewiesen, der in der Geometrie als Bogenlänge erscheint. Wir setzen demgemäß

$$\xi = \arcsin x = \operatorname{arctg} x^0 = \arccos \bar{x}, \quad x = \sin \xi, \quad \bar{x} = \cos \xi,$$
$$x^0 = \operatorname{tg} \xi.$$

Nach dem, was wir über den Fall $x = 0$ wissen, ist offenbar $\arcsin 0 = 0$; der Fall $x = 1$ gibt $\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$, wodurch eine bestimmte Zahl π erklärt wird; man hat in diesem Falle

$$\bar{x}_1 = x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

indem man die weiteren Zahlen $2^2 x_2$, $2^3 x_3, \ldots$ berechnet, hat man ein erstes, wenn auch unpraktisches Verfahren, die Zahl π zu bestimmen.

Mit dieser Bezeichnung schließen wir aus den Ungleichungen (5), sowie $\bar{x} > 0$, $x > 0$,

$$(6) \qquad x \leqq \xi \leqq x^0, \quad 1 \leqq \frac{\arcsin x}{x} \leqq \frac{1}{\bar{x}}.$$

Vollziehen wir den unbestimmten Grenzübergang $\lim x = 0$, so ergibt sich

$$(7) \qquad \lim_{x=0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Da ferner die Größen x_2, $\bar{x}_2$ genau so aus x_1, $\bar{x}_1$ gebildet werden, wie diese aus x, $\bar{x}$, so hat die Reihe x_1, $2 x_2, \ldots$, deren Glieder halb so groß sind wie die der Reihe x, $2 x_1$, $2^2 x_2, \ldots$, den Grenzwert $\arcsin x_1$ und man findet

$$2 \arcsin x_1 = \arcsin x.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1 - \bar{x}}{\arcsin x} = \frac{2 x_1^2}{2 \arcsin x_1} = x_1 \cdot \frac{x_1}{\arcsin x_1};$$

da nun, wenn $\lim x = 0$, offenbar auch $\lim x_1 = 0$ ist, folgt nach (7)

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \bar{x}}{\arcsin x} = 0,$$

wovon später Gebrauch gemacht wird.

Im Anschluß an die abgeleiteten Grundeigenschaften der Größe arcsin leiten wir noch, wie beim Logarithmus, die Additionsformel her, mittels deren die Summe zweier arcsin in einen dritten von übersichtlicher Bauart verwandelt werden kann; sie ist im Grunde die Formel $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

Seien $y, \bar{y}$ und $z, \bar{z}$ Zahlenpaare, für die dieselben Voraussetzungen gelten wie für $x, \bar{x}$; die Größen $y_n, \bar{y}_n$ werden aus $y, \bar{y}$, die Größen z_n, $\bar{z}_n$ aus $z, \bar{z}$ ebenso gebildet wie $x_n, \bar{x}_n$ aus $x, \bar{x}$. Sei dabei

$$(8) \qquad \bar{x} > 0, \quad \bar{x}\bar{y} - xy \geqq 0,$$

was erreicht wird durch die gleichbedeutenden Annahmen $y \leqq \bar{x}$, $\bar{y} \geqq x$. Dann können wir setzen

$$(9) \qquad \bar{z} = \bar{x}\bar{y} - xy, \quad z = \bar{x}y + x\bar{y},$$

da die allgemeine Gleichung

$$z^2 + \bar{z}^2 = (xy - \bar{x}\bar{y})^2 + (x\bar{y} + \bar{x}y)^2 = (x^2 + \bar{x}^2)(y^2 + \bar{y}^2) = 1$$

gilt, und man findet

$$\bar{x}_1\bar{y}_1 - x_1 y_1 = \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{2}}\sqrt{\frac{1+\bar{y}}{2}} - \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{2}}\sqrt{\frac{1-\bar{y}}{2}} > 0,$$

$$(x_1\bar{y}_1 + \bar{x}_1 y_1)^2 = \frac{1-\bar{x}}{2}\,\frac{1+\bar{y}}{2} + \frac{1+\bar{x}}{2}\,\frac{1-\bar{y}}{2} + 2\sqrt{\frac{1-\bar{x}^2}{4}}\sqrt{\frac{1-\bar{y}^2}{4}}$$
$$= \frac{2 - 2\bar{x}\bar{y}}{4} + \frac{xy}{4} = \frac{1-\bar{z}}{2},$$

also $z_1 = x_1\bar{y}_1 + \bar{x}_1 y_1$, und da die Gleichung

$$(x_1 y_1 - \bar{x}_1\bar{y}_1)^2 + (x_1\bar{y}_1 + \bar{x}_1 y_1)^2 = 1$$

gilt, gibt die letzte Ungleichung den positiven Wert

$$\bar{z}_1 = \bar{x}_1\bar{y}_1 - x_1 y_1.$$

Die Größen $x_1, y_1, z_1, \bar{x}_1, \ldots$ haben nun alle von $x, y, z, \bar{x}, \ldots$ geforderten Eigenschaften; man kann also in derselben Weise fortgehen und erhält die Gleichungen

$$\bar{z}_2 = \bar{x}_2\bar{y}_2 - x_2 y_2, \quad z_2 = x_2\bar{y}_2 + \bar{x}_2 y_2, \ldots,$$
$$\bar{z}_n = \bar{x}_n\bar{y}_n - x_n y_n, \quad z_n = x_n\bar{y}_n + \bar{x}_n y_n.$$

Setzen wir wie oben

$$\lim 2^n x_n = \xi, \quad \lim 2^n y_n = \eta, \quad \lim 2^n z_n = \zeta,$$
$$x = \sin\xi, \quad y = \sin\eta, \quad z = \sin\zeta$$

und bedenkt die Gleichungen $\lim \bar{x}_n = \lim \bar{y}_n$ 1, so ergibt sich aus der Gleichung

$$2^n z_n = \bar{x}_n \,.\, 2^n y_n + \bar{y}_n \,.\, 2^n x_n$$

mittels der Limesregeln (II, 6.), da $\lim \bar{x}_n = \lim \bar{y}_n = 1$, die Beziehung

$$(10) \qquad \zeta = \xi + \eta, \quad \arcsin(x\bar{y} + \bar{x}y) = \arcsin x + \arcsin y,$$

oder auch

$$\sin \zeta = x\bar{y} + \bar{x}y = \sin \xi \cos \eta + \sin \eta \cos \xi.$$

Im besonderen ist die Voraussetzung (8) erfüllt, wenn $y = \bar{x}$, $\bar{y} = x$ gesetzt wird; dann ist $x\bar{y} + \bar{x}y = 1$ und man findet

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = \arcsin \bar{x} + \arcsin x;$$

setzt man $\xi' = \arcsin \bar{x}$, so daß $\bar{x} = \sin \xi' = \cos \xi$, so ist

$$(11) \qquad \xi + \xi' = \frac{\pi}{2}.$$

IV.

Veränderliche, Funktionen, Stetigkeit.

1. Stellen wir eine Untersuchung an, bei der einer Größe x ein willkürlicher Wert eines beliebig festgesetzten Zahlengebiets beigelegt werden kann, so betrachten wir x als unabhängige Veränderliche oder kurz als Unabhängige. Hängt in derselben Untersuchung eine zweite Größe y von x derart ab, daß der Wert der ersteren dann und nur dann bestimmt ist, wenn der Größe x ein bestimmter der zugelassenen Werte beigelegt wird, z. B. $y = x^2$, so nennen wir y eine abhängige Veränderliche und näher eine auf jenem Zahlgebiet definierte Funktion von x, und bezeichnen sie wie schon im Abschnitt II durch $f(x)$, $\varphi(x)$, oder ähnliche Symbole, die man auch fx, φx, ... schreibt, wenn feststeht, daß f, φ, ... nicht Faktoren, sondern Funktionszeichen sind. Als Zahlgebiet kommt meistens eine Strecke in Betracht, d. h. die Gesamtheit der Zahlen, für die die Beziehung $a \leqq x \leqq b$ gilt; das ist die Strecke $a \ldots b$, der wir ihre Endpunkte immer zurechnen. Es kann auch eine nach oben oder unten unbegrenzte Strecke sein, d. h. die Gesamtheit der Zahlen, für die eine der Beziehungen $a \leqq x$, $x \leqq b$ gilt; wir nennen sie die Strecken $a \cdots + \infty$ und $-\infty \cdots b$. Endlich sei die Gesamtheit aller Zahlen die Strecke $-\infty \cdots + \infty$. Im Sinne dieser Bezeichnungen ist z. B. x^2 als eine Funktion von x auf der Strecke $-\infty \cdots + \infty$ definiert, $\lg x$

auf der Strecke $a \cdots + \infty$, wenn $a > 0$, $\arcsin x$ auf der Strecke $0 \ldots 1$, $\sqrt{x}$ auf der Strecke $0 \cdots + \infty$.

Den Veränderlichen gegenüber nennen wir Konstante, Festwerte solche Größen, die im Lauf einer Untersuchung denselben Wert erhalten, was natürlich nicht ausschließt, daß sie in einer anschließenden Untersuchung auch wieder veränderlich gemacht werden. Festwerte werden wir bis auf weiteres durch die ersten Buchstaben des Alphabets, Veränderliche und Funktionen durch x, y, z, u, t bezeichnen; eine Konstante, auf deren Wert es nicht ankommt, wird auch bisweilen in der Formel einfach durch const. bezeichnet.

Die als Beispiele erwähnten Funktionen werden durch bestimmte endliche oder unendliche Rechenarbeiten hergestellt und solche Funktionen werden wir vorzugsweise behandeln. Die einfachsten ergeben sich, wenn wir auf die Unabhängige x und beliebig viele Festwerte die Operationen der vier Spezies eine endliche Anzahl von Malen anwenden. Schließen wir zunächst die Division aus, so erhalten wir die Polynome wie

$$y = a + b x^n, \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

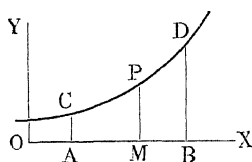
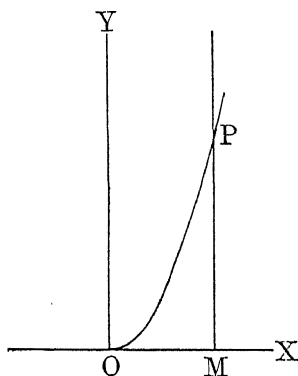
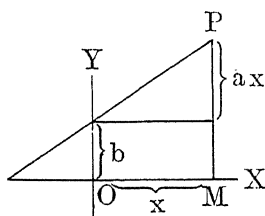
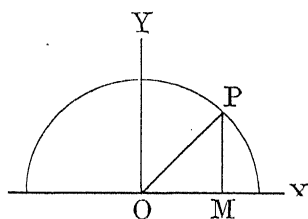
die auf der Strecke $-\infty \cdots + \infty$ erklärt sind; durch Division ergeben sich Funktionen

$$y = \frac{a}{x^n}, \quad y = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m},$$

in denen m wie n eine positive ganze Zahl ist; sie sind auf jeder Strecke definiert, auf der der Nenner von Null verschieden bleibt. Alle diese Funktionen heißen rational, die Polynome auch ganze rationale Funktionen.

Weitere mit Hilfe von Wurzelzeichen gebildete Funktionen wie $\sqrt{a + b x}$, $\sqrt[n]{x}$ heißen algebraisch, ohne daß damit der Sinn dieses Wortes erschöpft sein soll; $\lg x$, $\arcsin x$ sind transzendente Funktionen.

Neben den durch endliche und unendliche Rechnungen gegebenen Funktionen können auch solche untersucht werden, die nur, wie man sagt, empirisch gegeben sind, etwa durch Beobachtung, Zeichnung oder willkürliche Festsetzung. Das ist immer nur für eine begrenzte Zahl von x-Werten möglich, für die man zugehörige Werte y mit oft nur begrenzter Genauigkeit erhält. Will man also über eine empirische Funktion Aussagen haben, die für eine Strecke $a \ldots b$ gelten, so muß man die gegebenen Funktionswerte einer irgendwie konstruierten Funktion einordnen, der man allgemeine Eigenschaften beilegt, die sich empirisch weder bestätigen noch widerlegen lassen.

Man übersieht den Sachverhalt am besten bei der allgemeinen zeichnerischen Darstellung beliebiger Funktionen. Eine solche erhält man in folgender bekannter Weise. Man trägt, um die Funktion $y = f(x)$ darzustellen, auf einer Geraden, der Abszissenachse möglichst viele Werte von x als Abszissen auf, d. h. man bezeichnet Punkte, die von einem Nullpunkte nach rechts oder links den Abstand $|x|$ haben, je nachdem x positiv oder negativ ist, und errichtet in dem Endpunkte der so erhaltenen Abszissenstrecke die Ordinate, ein Lot von der

Länge $|f(x)|$ oder $|y|$ nach oben oder unten, je nachdem y positiv oder negativ ist; die Endpunkte dieser Lote bilden die Kurve, durch welche die Funktion $y = f(x)$ dargestellt wird. Oder kurz: diese Kurve ist der geometrische Ort der Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y in einem Koordinatensystem oder Bezugssystem, dessen x-Achse die Abszissenachse, dessen y-Achse die Ordinatenachse ist, d. h. das Lot, das auf der Abszissenachse im Punkte $x = 0$ errichtet ist. Diesen bezeichnen wir häufig durch O und nennen ihn den Anfangspunkt des Bezugssystems. Die Kurve stellt die Funktion nur mit begrenzter Genauigkeit dar und nur in einer durch die Möglichkeit des Zeichnens begrenzten Anzahl von Punkten. In Fig. 2

z. B. sei $OA = a$, $OM = x$, $OB = b$; dann ist $AC = f(a)$, $MP = y = f(x)$, $AD = f(b)$. Die Funktionen $y = ax + b$, $y = x^2$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ werden, wie in den Elementen der analytischen Geometrie gezeigt wird, durch Gerade, Parabel, Halbkreis dargestellt; $y = \lg x$ und $y = \arcsin x$ durch Kurven, für deren Untersuchung wir später Hilfsmittel gewinnen. In Fig. 3, 4, 5 ist überall $OM = x$, $MP = y$. Umgekehrt wird durch eine beliebig gezeichnete Kurve, bei der zu jeder Abszisse x höchstens eine Ordinate y gehört, y als Funktion von x mit der oben angegebenen Ungenauigkeit und Beschränkung definiert; will man auf diese Funktion Sätze und Begriffe anwenden, die wir über Funktionen, die im obigen Sinne auf einer Strecke $a \dots b$ definiert sind, entwickeln werden, so muß eine über die Zeichnung hinausgehende, für alle x nach irgend einem Verfahren genau bestimmte Funktion zugrunde gelegt werden, die in den in der Figur greifbaren Abszissen möglichst genau die Ordinate als Funktionswerte liefert. Man bezeichnet diese Operation als Interpolation.

2. Die Haupteigenschaft, die wir Funktionen auf gewissen Strecken beilegen müssen, um von ihnen etwas aussagen zu können, ist die Stetigkeit. Unbestimmt gesprochen: lassen wir x allmählich von a in b übergehen, so möge der zugehörige Wert y seine Werte von $f(a)$ bis $f(b)$ allmählich durchlaufen, so daß einem kleinen Fortgang der Größe x eine kleine Änderung von $f(x)$ entspreche. Eine kleine Änderung von x bedeutet den Übergang zu $x + h$, wobei h positiv oder negativ, $|h|$ klein ist; gehören x und $x + h$ der Strecke $a \dots b$ an, so möge die Differenz $|f(x + h) - f(x)|$ klein sein. Ganz genau: sei die Größe ε positiv und beliebig klein vorgeschrieben, so wird die Ungleichung

$$(1) \qquad |f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$$

erreicht, sobald $|h| < \delta$, wobei δ eine passend gewählte, nur von ε, nicht von x abhängige Größe bedeutet; x sei dabei eine beliebige Stelle der Strecke $a \dots b$, der auch $x + h$ angehöre. Halten wir im besonderen den Wert x fest und nähern uns ihm mit Werten x_1, $x_2, \dots$, so daß $\lim x_n = x$, so wird die Differenz $|f(x) - f(x_n)|$ nach (1) kleiner als ε, sobald $|x_n - x| < \delta$, also sobald n hinreichend groß geworden ist, d. h.

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n);$$

bei stetigen Funktionen ist das Zeichen lim mit dem Funktionszeichen vertauschbar.

Eine erste Eigenschaft der stetigen Funktionen ist folgende. Sei $a < b < c$ und $f(x)$ stetig auf den Strecken $a \dots b$ und $b \dots c$; dann

gilt dasselbe für die Strecke $a \dots c$. In der Tat gehören zu einem Werte ε auf den beiden Strecken vielleicht verschiedene Werte von δ, etwa δ_1 und δ_2; ist die kleinere von beiden δ_0, so genügt die Annahme $|h| < \delta_0$, um die beiden Ungleichungen $|h| < \delta_1$ und $|h| < \delta_2$ zu sichern, aus deren erster oder zweiter die Beziehung (1) folgt, je nachdem x und $x + h$ der Strecke $a \dots b$ oder der Strecke $b \dots c$ angehören. Ist endlich $x < b < x + h$, so folgt

$$|f(b) - f(x)| < \varepsilon, \quad |f(x+h) - f(b)| < \varepsilon,$$

und hieraus nach I, 3.

$$|f(x+h) - f(x)| < 2\varepsilon;$$

diese Beziehung gilt, da sie aus der Ungleichung (1) folgt, bei beliebiger Lage der Stellen x und $x + h$ auf der Strecke $a \dots c$, und beweist die Stetigkeit, da auch 2ε als beliebig klein gegeben gelten kann.

Eine zweite leicht ersichtliche Eigenschaft der stetigen Funktionen erhält man, wenn man die Strecke $a \dots b$ in Teilstrecken teilt, deren jede kleiner als δ ist und deren Anzahl m sei. Dann unterscheiden sich auf einer Teilstrecke die Funktionswerte um weniger als ε, auf zwei benachbarten um weniger als 2ε; liegt x_1 auf der ersten, x_ν auf der ν^{ten} Teilstrecke, so ist allgemein

$$|f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)| < 2\varepsilon,$$

also nach I, 3., wenn ϱ eine ganze Zahl ist und $\nu + \varrho \leqq m$,

$$\begin{aligned} |f(x_{\nu+\varrho}) - f(x_\varrho)| &= |[f(x_{\nu+\varrho}) - f(x_{\nu+\varrho-1})] + [f(x_{\nu+\varrho-1}) - f(x_{\nu+\varrho-2})] \\ &\quad + \cdots + [f(x_{\varrho+1}) - f(x_\varrho)]| \\ &\leqq |f(x_{\nu+\varrho}) - f(x_{\nu+\varrho-1})| + |f(x_{\nu+\varrho-1}) - f(x_{\nu+\varrho-2})| + \cdots \\ &< 2\varepsilon\nu < 2\varepsilon m. \end{aligned}$$

Irgend zwei Funktionswerte der Strecke $a \dots b$ unterscheiden sich also um nicht mehr als eine bestimmte Größe $2m\varepsilon$, in der die positive Größe ε beliebig festgelegt und dann m in passender Weise bestimmt zu denken ist. Die Funktionswerte können also im besonderen nicht über alle Grenzen wachsen. Die Werte einer auf einer Strecke $a \dots b$ stetigen Funktion sind beschränkt.

Hieraus folgt weiter, daß das Produkt und die Summe zweier auf einer Strecke $a \dots b$ stetiger Funktionen wieder stetig sind. In der Tat gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} f(x+h)\,\varphi(x+h) - f(x)\cdot\varphi(x) &= [f(x+h) - f(x)]\,\varphi(x+h) \\ &\quad + [\varphi(x+h) - \varphi(x)]\,f(x), \end{aligned}$$

also, wenn $|f(x)|$ und $|\varphi(x)|$ kleiner als g und g_1 sind, was nach der eben erhaltenen zweiten Eigenschaft der stetigen Funktionen angenommen werden darf,

$$|f(x+h)\,\varphi(x+h) - f(x) \cdot \varphi(x)| < g\,|f(x+h) - f(x)| \\ + g_1\,|\varphi(x+h) - \varphi(x)|;$$

hat nun δ' für $\varphi(x)$ dieselbe Bedeutung wie δ für $f(x)$ und ist δ_0 die kleinere der beiden Größen δ und δ', so ist bei der Annahme $|h| < \delta_0$ offenbar

$$|f(x+h)\,\varphi(x+h) - f(x) \cdot \varphi(x)| < \varepsilon\,(g + g_1),$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung kann ebensogut wie ε selbst als beliebig klein gegeben gelten. Betreffs der Summe $f(x) + \varphi(x)$ findet man unmittelbar

$$|[f(x+h) + \varphi(x+h)] - [f(x) + \varphi(x)]| \leqq |f(x+h) - f(x)| \\ + |\varphi(x+h) - \varphi(x)| < 2\,\varepsilon,$$

und $2\,\varepsilon$ ist wiederum ebensogut beliebig klein wie ε. Damit ist die Stetigkeit der Funktionen $f(x) + \varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ erwiesen.

Bei den Quotienten muß die Voraussetzung hinzugefügt werden, daß der Nenner auf der Strecke $a \ldots b$ absolut über einer positiven Schranke g_0 verbleibt, also besonders auch nicht verschwindet. Dann hat man die Beziehungen

$$\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{[f(x+h) - f(x)]\,\varphi(x) - f(x) \cdot [\varphi(x+h) - \varphi(x)]}{\varphi(x) \cdot \varphi(x+h)}$$

$$\left|\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \leqq \frac{\varepsilon\,(g + g_1)}{g_0^2},$$

womit die Stetigkeit wie beim Produkt ersichtlich wird.

3. Die einfachsten Beispiele stetiger Funktionen sind $f(x) = x$ und $f(x) = c$; bei ersterer für jede beliebige Strecke $a \ldots b$ kann $\delta = \varepsilon$, bei der zweiten δ ganz beliebig genommen werden; wenn $|h| < \delta$, ist ersichtlich in beiden Fällen

$$f(x+h) - f(x)| \qquad |h \qquad \varepsilon, \quad f(x+h) - f(x) = 0 < \varepsilon.$$

Daraus folgt sofort, indem man mehrmals stetige Funktionen multipliziert und addiert, daß $c\,x^n$ und Polynome $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ stetig sind. Die Potenz x^{-n} ist stetig auf jeder Strecke $a \ldots b$, wenn $0 < a < b$; denn auf einer solchen ist $|x^n| > a^n$; man kann $g_0 = a^n$ setzen und den Quotienten $1/x^n$ bilden. Dasselbe folgt ebenso leicht, wenn $a < b < 0$, also auf jeder Strecke, die nur negative Werte umfaßt, nicht aber z. B. auf der Strecke $0 \ldots a$.

Eine rationale Funktion $f(x):\varphi(x)$, deren Zähler und Nenner Polynome sind, ist stetig auf jeder Strecke, auf der $|\varphi(x)|$ über einer positiven Schranke verbleibt. Bei der Quadratwurzel $\sqrt{x}$ zeigt die Gleichung

$$\sqrt{x+h}-\sqrt{x}=\frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

auf jeder Strecke $0\ldots a$ oder $a\ldots b$, mit der Bedingung $a>0$ für $h>0$

$$\left|\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right|\leqq\sqrt{h};$$

daraus folgt, wenn $x>0$ und $x-h$ der betrachteten Strecke angehört,

$$\left|\sqrt{x-h}-\sqrt{x}\right|<\sqrt{h};$$

man braucht also immer nur $\delta<\varepsilon^2$ anzusetzen, um bei der Annahme $|h|<\delta$ die Ungleichung

$$\left|\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right|<\varepsilon$$

zu sichern.

Ohne große Schwierigkeiten erweisen sich auch die transzendenten Funktionen $\lg x$ und $\arcsin x$ als stetig. Es gelten (III, 2.) die Beziehungen

$$\lg(x+h)-\lg x=\lg\frac{x+h}{x}=\lg\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

Nun sei $0<a\leqq x\leqq b$, $|h|<\delta$, $h=xh_1$, dann ist

$$\left|\frac{h}{x}\right|<\frac{\delta}{a},\quad |h_1|<\frac{\delta}{a};$$

wenn $h_1>0$, gilt nach III, 2. (5) die Ungleichung

$$h_1>\lg(1+h_1)>\frac{h_1}{1+h_1}>0,$$

also

$$|\lg(x+h)-\lg x|<\varepsilon,$$

sobald $\delta<a\varepsilon$. Hieraus folgt, wenn $x>a+\delta$, die Ungleichung

$$|\lg x-\lg(x-h)|<\varepsilon;$$

damit ist die Stetigkeit für jede Strecke $a_1\ldots b$, wenn $a_1>a$, bewiesen, mithin, da a nur positiv zu sein brauchte, für jede Strecke $a\ldots b$.

Um die Stetigkeit der Funktion $\arcsin x$ auf der Strecke $0\ldots 1$ zu beweisen, seien x und z irgend zwei Werte derselben und $x<z$; setzt man dann

$$(1)\qquad \overline{y}=xz+\overline{x}\,\overline{z},\quad y=x\overline{z}-\overline{x}z$$

und hält die gewöhnlichen Beziehungen

$$x^2 + \overline{x}^2 = z^2 + \overline{z}^2 = 1, \quad \overline{z} \geqq 0, \quad \overline{x} \geqq 0$$

fest, so folgt, da $\overline{x} > \overline{z}$,

$$y^2 + \overline{y}^2 = 1, \quad y > 0, \quad \overline{y} > 0;$$

multipliziert man die Gleichungen (1) mit x und $\overline{x}$ und addiert oder subtrahiert, so ergibt sich

$$\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y} - xy, \quad z = x\overline{y} + \overline{x}y,$$

und da offenbar $y < \overline{x}z + x\overline{z}$, folgt

$$(2) \quad \arcsin z = \arcsin x + \arcsin y, \quad y^2 < (\overline{x}z - x\overline{z})(x\overline{z} + \overline{x}z) = x^2 z^2 - x^2 \overline{z}^2 = z^2 - x^2$$

oder, wenn $z - x = h$ gesetzt wird,

$$y^2 < 2hx + h^2 < 2h\left(x + \frac{h}{2}\right) < 2hz \leqq 2h, \quad y < \sqrt{2h}.$$

Nun ist [III, 3. (6)] allgemein

$$\arcsin y < \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}},$$

also, wenn $y^2 < 2h$, weiter

$$1 - y^2 > 1 - 2h, \quad \arcsin y < \sqrt{\frac{2h}{1 - 2h}},$$

und wenn $h < \frac{1}{4}$, folgt hieraus, da $1 - 2h > \frac{1}{2}$,

$$\arcsin y < 2\sqrt{h}.$$

Wenn also $z - x < \frac{1}{4}$, folgt allgemein

$$\arcsin z - \arcsin x < 2\sqrt{z - x},$$

woraus die Stetigkeit ersichtlich ist; soll die linke Seite dieser Ungleichung $< \varepsilon$ sein, so braucht nur $|z - x| < \frac{1}{2}\varepsilon^2$ genommen zu werden, gleichviel, wo die Werte x und z auf der Strecke $0 \ldots 1$ gelegen sind.

4. Wir beweisen noch folgenden Hilfssatz. Ist $f(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ stetig, $\varphi(x)$ auf der Strecke $\alpha \ldots \beta$, und liegt $f(x)$ in dieser Strecke, wenn x auf der Strecke $a \ldots b$ liegt, so ist auch die zusammengesetzte Funktion $\psi(x) = \varphi[f(x)]$ auf der Strecke $a \ldots b$ stetig. Sei in der Tat

$$|\varphi(u + k) - \varphi(u)| < \varepsilon,$$

sobald u, $u + k$ der Strecke $\alpha \ldots \beta$ angehören und $|k| < \delta$, so kann δ_1 so bestimmt werden, daß

$$|f(x + h) - f(x)| < \delta,$$

sobald $|h| < \delta_1$ und x und $x + h$ der Strecke $a \ldots b$ angehören; dann setzen wir $u = f(x)$, $u + k = f(x + h)$, und nach Voraussetzung fallen diese Werte in die Strecke $\alpha \ldots \beta$; da alsdann $\psi(x) = \varphi(u)$, $\psi(x + h) = \varphi(u + k)$ gesetzt werden muß, so ergibt sich

$$|\psi(x + h) - \psi(x)| < \varepsilon,$$

sobald $|h| < \delta_1$. Da nun ε beliebig klein gegeben sein kann, so ist die Stetigkeit von $\psi(x)$ bewiesen.

Der Hilfssatz gibt z. B. die allgemeineren Ergebnisse, daß $\lg f(x)$ und $\arcsin f(x)$ auf einer Strecke $a \ldots b$ stetig sind, wenn auf dieser $f(x)$ stetig ist und im ersten Falle einer positiven Strecke, im zweiten der Strecke $0 \ldots 1$ angehört.

V.

Umkehrung stetiger Funktionen.

Die fruchtbarste, weil zur Erzeugung neuer Funktionen führende Eigenschaft der stetigen Funktionen besteht darin, daß eine solche, wenn sie auf der Stetigkeitsstrecke zwei verschiedene Werte $f(a) = A$ und $f(b) = B$ annimmt, immer auch auf dieser Strecke alle zwischen A und B liegenden Werte erreicht. Das ist einleuchtend aus der Vorstellung heraus, daß die Funktion sich allmählich ändernd vom Werte A in den Wert B übergeführt werden kann, indem die unabhängige Veränderliche allmählich von a zu b übergeht.

1. Um streng zu verfahren, nehmen wir an, es sei $a < b$, $f(a) > m > f(b)$, und die Funktion $f(x)$ stetig auf der Strecke $a_0 \ldots b_0$, der auch a und b angehören. Dann gibt es, wie wir zeigen wollen, einen Wert ξ auf der Strecke $a \ldots b$, der die Gleichung $f(\xi) = m$ liefert. Wäre ein solcher Wert ξ nicht vorhanden, und setzen wir $c = \frac{1}{2}(a + b)$, $c' = \frac{1}{2}(b - a)$, so ist $f(c) > m$ oder $f(c) < m$; von den Werten a, c und b, deren Differenzen $= c'$ sind, ist nach oben hin einer der letzte, der noch einen Funktionswert $> m$ liefert; diesen, der nicht b sein kann, nennen wir a_1, so daß in den beiden möglichen Fällen $a_1 = a$ oder $a_1 = c$ gesetzt wird, und haben dann die Ungleichungen

$$f(a_1) > m, \quad f(a_1 + c') < m, \quad b \geqq a_1 + c';$$

$a_1 + c'$ ist c oder $b = c + c'$. In allen Fällen ist

$$b > a_1 \geqq a.$$

Die Strecke von a_1 bis $a_1 + c'$ halbieren wir durch den Wert $c_1 = \frac{1}{2}(2a_1 + c') = a_1 + \frac{1}{2}c'$. Unter den Werten a_1, c_1, $a_1 + c'$, deren Differenzen $\frac{1}{2}c'$ sind, ist ein letzter, der noch $f(x) > m$ liefert, der aber nicht $a_1 + c'$ sein kann; wir nennen ihn a_2; dann ist

$$b > a_2 \geqq a_1, \quad f(a_2) > m, \quad f\left(a_2 + \frac{c'}{2}\right) < m, \quad b \geqq a_2 + \frac{c'}{2}.$$

So fortfahrend, erhält man eine Reihe von Stellen $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots < b$ mit den Beziehungen

$$f(a_n) > m, \quad f\left(a_n + \frac{c'}{2^{n-1}}\right) < m.$$

Die Größen a_n bilden eine beschränkte zunehmende oder doch nicht abnehmende Reihe, streben also noch dem Kernsatz einer Grenze $\alpha = \lim a_n$ zu, die nach dem Schrankensatz [II, 6. (B)] $\leqq b$ sein muß; wir behaupten $f(\alpha) = m$.

In der Tat sei ε beliebig klein gegeben; dann kann n so groß gewählt werden, daß

$$|\alpha - a_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

und außerdem

$$\frac{c'}{2^{n-1}} < \tfrac{1}{2}\varepsilon;$$

hieraus folgt

$$\left|\alpha - a_n - \frac{c'}{2^{n-1}}\right| \leqq |\alpha - a_n| + \frac{c'}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Auf der Strecke $\alpha - \varepsilon \ldots \alpha + \varepsilon$ liegen also die Werte a_n und $a_n + c'/2^{n-1}$ mit der Eigenschaft

$$f(a_n) > m, \quad f\left(a_n + \frac{c'}{2^{n-1}}\right) < m. \tag{1}$$

Wäre nun $f(\alpha) = m_1$ von m verschieden, z. B. $m_1 > m$, so unterschieden sich bei passender Wahl von ε alle Werte $f(\alpha + h)$, in denen $|h| < \varepsilon$, um beliebig kleine Beträge, z. B. um weniger als $\frac{1}{2}(m_1 - m)$ von $f(\alpha) = m_1$, könnten also nicht $< m$ werden, während der Wert $h = c'/2^{n-1}$ nach (1) einen Funktionswert $< m$ liefern würde. Der hier erscheinende Widerspruch zeigt, daß die Annahme $f(\alpha) > m$ unzulässig ist; ebenso natürlich die Annahme $f(\alpha) < m$, so daß $f(\alpha) = m$ übrig bleibt, und der Satz ist bewiesen: **Eine auf einer bestimmten Strecke stetige Funktion nimmt auf derselben jeden Wert an, der zwischen zwei angenommenen Werten liegt.**

Ist also z. B. eine stetige Funktion auf der betrachteten Strecke sowohl positiv wie negativ, so verschwindet sie auch auf dieser Strecke mindestens einmal.

Sei z. B. $f(x) = x^n - a$ und a positiv, dann ist $f(0) < 0$, und wenn $x_0 > 1$ und $x_0 > a$ angenommen wird, ist $x_0^n > a$, also $f(x_0) > 0$; zwischen 0 und x_0 liegt also mindestens ein solcher Wert ξ, daß $f(\xi) = 0$; wir setzen $\xi = \sqrt[n]{a}$.

Sei allgemeiner $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ ein beliebiges Polynom, in welchem die höchste Potenz x^n wirklich vorkommt, d. h. $a_0 \gtrless 0$, dann kann man setzen:

$$f(x) = x^n \left\{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right\},$$

und alle Glieder der Klammer nach dem ersten sind absolut beliebig klein, sobald $|x|$ eine gewisse Schranke g überschreitet; mithin kann durch passende Wahl von g erreicht werden, daß die Klammer von Null verschieden ist und das Vorzeichen mit a_0 gemein hat. Wenn nun n ungerade ist, so hat x^n das Vorzeichen von x, kann also sowohl positiv wie negativ werden; nimmt man Werte, für die $|x| > g$, so sieht man, daß $f(x)$ positiv wie negativ werden kann, also auch einmal mindestens verschwindet. Jede Gleichung ungeraden Grades hat also mindestens eine reelle Wurzel. Im Falle eines geraden Wertes n sei $a_0 = 1$; die Gleichung

$$f(x) = 0, \quad x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

hat, da $f(x)$ bei der Annahme $> g$ stets mit x^n positiv ist, je eine positive und negative Wurzel, wenn $a_n < 0$.

2. Von einer beliebigen Funktion sagen wir, sie sei auf der Strecke $a \ldots b$ monoton oder einsinnig, wenn bei der Annahme $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ entweder immer die Ungleichung

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

oder immer die Ungleichung

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

gilt. Im ersten Falle nennen wir die Funktion monoton wachsend, im zweiten monoton abnehmend. Hätte man immer nur eine der allgemeineren Beziehungen

$$f(x_1) - f(x_2) \leqq 0, \quad f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

so heißt die Funktion halbmonoton. Sei nun etwa $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, und möge $f(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ monoton wachsen.

Bei einer monotonen Funktion läßt sich die Stetigkeit auf der Strecke $a \dots b$ aus folgender Eigenschaft ableiten. Ist ε beliebig klein gegeben, so kann man eine solche Reihe von Werten x_ν bestimmen, daß die Ungleichungen

$$(2) \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_{\nu+1} > x_\nu, \quad |f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)| < \varepsilon$$

gelten. Denn ist dann $|h|$ kleiner als die kleinste der Strecken $x_{\nu+1} - x_\nu$, so liegen die Werte x und $x + h$ immer innerhalb zweier anstoßender Strecken $x_\nu \dots x_{\nu+1}$ und $x_{\nu+1} \dots x_{\nu+2}$; auf dem aus diesen beiden bestehenden Gebiet hat aber der Unterschied des größten und kleinsten Wertes von $f(x)$ den absoluten Wert $|f(x_{\nu+2}) - f(x_\nu)|$, ist also kleiner als $2\,\varepsilon$; dasselbe gilt somit von $|f(x) - f(x+h)|$, womit die Stetigkeit erwiesen ist. Bemerken wir noch, daß die größte der Differenzen $x_{\nu+1} - x_\nu$ beliebig klein gemacht werden kann, ohne daß die Reihe x_ν ihre Eigenschaften verliert; jede Verkleinerung einer solchen Differenz verkleinert bei monoton wachsenden Funktionen auch die Differenz $f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)$. Man erhält z. B. so eine besondere, die Ungleichungen (2) erfüllende Größenreihe x_ν mit den Ungleichungen

$$(3) \qquad x_{\nu+1} - x_\nu < \varepsilon, \quad |f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)| < \varepsilon.$$

Sei nun $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ und etwa $\beta > \alpha$, dann gibt es nach 1. zu jedem Wert der Strecke $\alpha \dots \beta$, etwa γ, einen zugehörigen c der Strecke $a \dots b$, der $\gamma = f(c)$ ergibt; und da auf letzterer Strecke $f(x)$ mit x beständig wächst, gibt es nur einen solchen Wert; wir setzen $c = \varphi(\gamma)$. Wenn dann $\gamma_1 < \gamma_2$ und $c_1 = \varphi(\gamma_1)$, $c_2 = \varphi(\gamma_2)$ gesetzt wird, so ist $\gamma_1 = f(c_1)$, $\gamma_2 = f(c_2)$, also notwendig $c_1 < c_2$, da sich sonst $\gamma_1 \geqq \gamma_2$ ergeben würde, gegen die Voraussetzung. $\varphi(\gamma)$ ist also eine auf der Strecke $\alpha \dots \beta$ monoton wachsende Funktion. Setzt man jetzt $\varphi(x_\nu) = \xi_\nu$, so hat man nach (2) und (3) die Ungleichungen

$$\xi_0 = \alpha, \ \xi_n = \beta, \ \xi_{\nu+1} > \xi_\nu, \ \varphi(\xi_{\nu+1}) - \varphi(\xi_\nu) < \varepsilon, \ \xi_{\nu+1} - \xi_\nu < \varepsilon;$$

damit ist für die monotone Funktion $\varphi(\xi)$ die Eigenschaft abgeleitet, aus der, wie oben bemerkt, ihre Stetigkeit folgt; denn ε ist beliebig klein gegeben.

Erwägt man, daß offenbar für eine einsinnig abnehmende Funktion $f(x)$ eine entsprechende Betrachtung durchgeführt werden kann, so ist folgender Satz erwiesen: *Eine auf der Strecke $a \dots b$ monotone stetige Funktion $f(x)$ wird umgekehrt durch eine Funktion $\varphi(\xi)$, die, wenn $\alpha = f(a)$ und $\beta = f(b)$ ist, auf der Strecke $\alpha \dots \beta$ stetig und monoton ist;* auf der Strecke $a \dots b$

gilt die Gleichung $\varphi[f(x)] = x$, auf der Strecke $\alpha \ldots \beta$ die Gleichung $f[\varphi(\xi)] = \xi$.

Beispielsweise nimmt $\xi = f(x) = x^n$ auf jeder Strecke $0 \ldots a$, wenn $a > 0$, einsinnig zu, da jedes Produkt positiver Faktoren mit diesen wächst; die umkehrende Funktion $\varphi(\xi) = \sqrt[n]{\xi}$ ist also eindeutig bestimmt und nimmt auf der Strecke $0 \ldots \sqrt[n]{a}$ monoton zu.

3. Ausführlicher betrachten wir die Umkehrung der Funktion $\lg x = \xi$. Da $\lg x$ positiv ist, wenn $x > 1$ und die Gleichung

$$\lg(x + h) = \lg x + \lg\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

gilt, so ist, wenn $h > 0$, offenbar $\lg(x + h) > \lg x$; dabei ist x immer positiv, da nur für solche Werte $\lg x$ erklärt ist. Die Funktion kann also auf jeder x-Strecke $a \ldots b$, wenn $0 < a < b$, umgekehrt werden; man erhalte $x = E(\xi) = E\xi$; das ist dann eine Größe, für welche $\lg E\xi = \xi$. Da ferner die Gleichungen

$$\xi = \lg x, \quad \eta = \lg y, \quad \xi + \eta = \lg(xy)$$

zusammen bestehen, so folgt

$$E\xi \,.\, E\eta = E(\xi + \eta). \tag{1}$$

Das Gebiet, in dem die Funktion $E(\xi)$, die **Exponentialfunktion** existiert, reicht von $-\infty$ bis $+\infty$; denn $\lg x$ kann, wie schon die Formel $\lg x^n = n \lg x$ zeigt, bei der Annahme $x > 1$ beliebig große positive Werte erreichen; und da $\lg(1/x) = -\lg x$, kann $\lg x$ bei positiven gebrochenen Werten von x auch negative Werte beliebig großen absoluten Betrages erreichen. Ist α beliebig groß positiv, β beliebig klein negativ, so kann man also immer $\alpha = \lg a$, $\beta = \lg b$ setzen, wobei a und b positiv sind; die Umkehrung von $\lg x$ auf der Strecke $a \ldots b$ liefert also $E(\xi)$ auf der Strecke $\alpha \ldots \beta$, also auf einer beliebig ausgedehnten Strecke. Im besonderen gibt es einen Wert $E(1) = e$, für den $\lg e = 1$; offenbar ist ferner $E(0) = 1$.

Weiter gibt die Grundgleichung (1) offenbar

$$E\xi \,.\, E\eta \,.\, E\zeta \ldots = E(\xi + \eta + \zeta + \cdots),$$
$$E(n\xi) = (E\xi)^n,$$
$$\left[E\left(\frac{n}{n_1}\right)\right]^{n_1} = E(n) = e^n,$$

also nach der bekannten Definition der Bruchpotenzen durch die Gleichung

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

ergibt sich

$$E\left(\frac{n}{n_1}\right) = e^{\frac{n}{n_1}},$$

d. h. für rationale Werte von x ist $E(x) = e^x$. Ist ferner x beliebig und $a > 0$, $a = E(\alpha)$, so können wir als Erklärung ansetzen

$$a^x = E(\alpha x) = e^{\alpha x}$$

und erhalten dann aus der Gleichung (1) die Grundeigenschaften der Potenz übertragen auf beliebige Exponenten.

Man kann, da $\alpha = \lg a$, offenbar auch setzen

$$a^x = e^{x \lg a}$$

und erhält hieraus, indem man a als Basis eines künstlichen Logarithmensystems log nimmt, die Gleichung

$$\log c = \frac{\lg c}{\lg a}.$$

Ferner ergibt sich hier eine neue brauchbare Grenzformel. Sei δ positiv, μ positiv oder negativ,

$$A = (1 + \delta)^\mu - 1, \quad \lg(A + 1) = \mu \lg(1 + \delta),$$

dann ist

$$\frac{A}{\delta} = \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \frac{A}{\lg(1+A)} \cdot \frac{\lg(1+\delta)}{\delta} \cdot \mu;$$

läßt man δ unendlich abnehmen, so gilt dasselbe von $|A|$; die beiden Quotienten rechts streben dann zufolge der in III, 2. unter (6) aufgestellten Gleichung

$$\lim_{h=0} \frac{\lg(1+h)}{h} = 1 \tag{2}$$

der Grenze 1 zu, und man erhält nach einer Limesregel

$$\lim_{\delta=0} \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu. \tag{3}$$

4. Einen analytischen Ausdruck der Exponentialfunktion mit Benutzung des Zeichens lim liefert die soeben wiederholte Gleichung (2). Man schließt aus ihr, indem man $h = x/n$ setzt,

$$\lim \frac{n}{x} \lg\left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1,$$

oder, da x dem Grenzübergange $n = \infty$ gegenüber fest bleibt,

$$\lim\left[n \lg\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] = x = \lim \lg\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Setzen wir also $u_n = \lg(1 + x/n)^n$, so ist $x = \lim u_n$, und da $E(x)$ eine stetige Funktion ist, können nach IV, 2. die Zeichen E und lim vertauscht werden:

$$E(x) = E(\lim u_n) = \lim E(u_n).$$

Nun ist allgemein $E(\lg z) = z$, also

$$E(u_n) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

und die vorletzte Gleichung ergibt

$$E(x) = \lim\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Diese Formel gibt eine praktische Bedeutung der Exponentialfunktion. Wird ein Kapital K zu p vom Hundert verzinst, so hat es sich nach einem Jahr auf $K(1 + 0{,}01p)$ vermehrt; werden die Zinsen des Kapitals K, nachdem $1/n$ des Jahres verflossen ist, jeweils zum Kapital geschlagen, so erhält man das Kapital $K(1 + 0{,}01\,p/n)$. Setzt man also $p = 100\,x$, so hat man am Ende des Jahres das Kapital $K(1 + x/n)^n$, und $K E(x)$ ist der Endwert des Kapitals nach einem Jahre in der Grenze, wenn die Zinsen nach immer kleineren Bruchteilen des Jahres dem Kapital zugeschlagen werden.

Einen noch bequemeren Ausdruck ergibt der Binomialsatz für ganzzahlige Exponenten

$$(1 + u)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} u + \binom{n}{2} u^2 + \cdots + \binom{n}{n} u^n,$$

in welchem, wenn $k \leqq n$, gesetzt ist

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}, \quad k! = 1 \cdot 2 \ldots k.$$

Die Richtigkeit dieser Formel ergibt sich aus den leicht beweisbaren Formeln

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

durch Schluß von n auf $n + 1$.

Man schließt beiläufig aus der Binomialformel, wenn u positiv ist,

$$(1 + u)^n > 1 + nu;$$

die Potenz jeder Zahl > 1 wächst mit dem Exponenten über alle Grenzen. Geht man zu den reziproken Werten über und setzt $v = 1/(1+u)$, so daß v ein beliebiger positiver echter Bruch ist, so folgt

$$\lim v^n = 0;$$

die Potenzen eines echten Bruches werden mit wachsendem Exponenten beliebig klein.

Setzt man nun $u = x/n$, so folgt

$$(1)\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!}x^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}x^3 + \cdots;$$

die Entwicklung geht rechts bis zum Gliede x^n. Die in den Zählern der letzten Formel vom dritten Gliede an auftretenden Faktoren sind alle echte Brüche, die einzelnen Glieder also absolut kleiner als die entsprechenden

$$\frac{x^2}{2!},\quad \frac{x^3}{3!},\cdots\quad \frac{x^n}{n!}.$$

Sondern wir also in der Reihe (1) die Glieder bis zu dem mit x^m behafteten ab, wobei $|x| < m+1 < n$ sei, so ist die Summe der folgenden, die wir R nennen, absolut kleiner als

$$\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{|x|^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots + \frac{|x|^n}{n!}.$$

Diese Summe aber ist kleiner als

$$\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{m+1} + \frac{|x|^2}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{|x|^{n-m-1}}{(m+1)^{n-m-1}}\right)$$

$$(2)\qquad = \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\frac{1-\left(\frac{|x|}{m+1}\right)^{n-m}}{1-\frac{|x|}{m+1}},$$

wobei die elementare Formel

$$\frac{1-u^k}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}$$

benutzt ist; die Größe (2) ist aber offenbar, da $x/(m+1)$ ein echter Bruch ist, kleiner als

$$(3)\qquad \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{|x|}{m+1}}.$$

Sei nun k die erste ganze Zahl, die den Wert $|x|$ überschreitet, und $m > k$; dann ist

$$(4)\quad \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} = \left[\frac{|x|^k}{k!}\right] \frac{|x|}{k+1} \frac{|x|}{k+2} \cdots \frac{|x|}{m+1} < \frac{|x|^k}{k!} \left(\frac{|x|}{k+1}\right)^{m+1-k}$$

und man sieht, daß rechts eine von m unabhängige Größe mit einer Potenz eines echten Bruches multipliziert wird, dessen Exponent mit m beliebig groß wird. Da nun der zweite Faktor der Größe (3) mit wachsenden Werten von m dem Grenzwerte 1 zustrebt, die rechte Seite der Ungleichung (4) aber bei derselben Annahme beliebig klein wird, so gilt dasselbe von der ganzen Größe (2). Ist also ε beliebig klein gegeben, kann man m so groß wählen, daß man, wenn $n > m + 1$ ist, setzen kann:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{m!} x^m + R,$$

wobei $|R| < \varepsilon$. Die Bestimmung der Zahl m geschieht offenbar unabhängig von n, so daß man n nachträglich ändern kann, ohne die letzte Gleichung mit der Ungleichung $|R| < \varepsilon$ zu gefährden. Jetzt halten wir m fest und lassen n über alle Grenzen wachsen; dann nähert sich die Summe der $m + 1$ ersten Glieder in der letzten Gleichung rechts dem Grenzwerte

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}$$

an, so daß man setzen darf

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + R' + R,$$

wobei $|R'| < \varepsilon$, sobald n eine gewisse Schranke n_1 überschritten hat dann ist $|R + R'| < 2\,\varepsilon$, und die linke Seite unterscheidet sich auch wenn n hinreichend groß genommen wird, um weniger als ε von e^x Somit folgt die Gleichung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + R'',$$

wobei $|R''| < 3\,\varepsilon$. Da nun die Größe $3\,\varepsilon$ als beliebig klein gegeben gelten kann, so ist hiermit bewiesen

$$e^x = \lim_{m=\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}\right).$$

Dafür schreibt man auch

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \text{ i. inf.},$$

liest in infinitum und sagt, e^x sei die Summe der rechtsstehenden unendlichen Reihe. Allgemein verstehen wir unter der Summe der unendlichen Reihe

$$C = c_1 + c_2 + \cdots \text{ i. inf.}$$

den Grenzwert $\lim(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$, wenn ein solcher existiert.

Als Sonderfall heben wir noch, indem wir $x = 1$ setzen, hervor

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \text{ i. inf.}$$

Sind die Größen c_n alle positiv, so wachsen die Teilsummen $c_1 + c_2 + \cdots c_n$ mit n; also folgt

$$C > c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

Hieraus ergibt sich z. B., daß

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

und da die rechte Seite bei wachsenden Werten von x über alle Grenzen wächst, folgt im Sinne der eingeführten Bezeichnung (II, 7.)

$$\lim_{x=+\infty} e^x = +\infty.$$

Ebenso ergibt sich, wenn m eine ganze Zahl ist,

$$\frac{e^x}{x^m} = \frac{1}{x^m} + \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{1}{2!}\frac{1}{x^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{m!} + \frac{x}{(m+1)!} + \frac{x^2}{(m+2)!} + \cdots \text{ i. inf.}$$

und die linksstehende Größe ist größer als die rechtsstehende Reihe, wenn diese etwa mit dem Gliede

$$\frac{x^k}{(m+k)!}$$

abgebrochen wird. Läßt man jetzt x über alle Grenzen wachsen, so werden die ersten m Glieder beliebig klein, die folgenden beliebig groß, so daß wiederum folgt

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty,$$

oder auch

$$\lim_{x=+\infty} x^m e^{-x} = 0. \tag{5}$$

Setzt man endlich $e^{-x} = u$, so hat man (II, 7.) die Gleichung

$$\lim_{x=+\infty} u = +0, \quad x = -\lg u;$$

die Gleichung (5) ergibt also

$$\lim_{u=+0} u(\lg u)^m = 0.$$

5. Kürzer können wir entsprechende Entwicklungen für die Funktion arcsin fassen. Daß diese auf der Strecke $0 \dots 1$ monoton wächst, zeigt schon die Gleichung (2) in IV, 3. Setzen wir also $\xi = \arcsin x$, so gibt es, da $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$ ist, eine auf der Strecke $0 \cdots \frac{1}{2}\pi$ einsinnig wachsende Umkehrfunktion $x = \sin\xi$, die gekennzeichnet wird durch die Gleichungen

$$\arcsin(\sin\xi) = \xi, \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad \sin 0 = 0,$$
$$\sin\frac{\pi}{2} = 1; \quad \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Setzen wir weiter auf dieser Strecke

$$\cos\xi = \bar{x} = \sqrt{1 - \sin^2\xi}, \quad y = \sin\eta, \quad z = \sin\zeta,$$
$$\bar{y} = \cos\eta, \quad \bar{z} = \cos\zeta,$$

so ergeben die Gleichungen (9), (10) in III, 3., solange ξ und η die Grenze $\frac{1}{4}\pi$ nicht überschreiten,

$$(1) \quad \zeta = \xi + \eta, \quad \sin\zeta = \sin(\xi + \eta) = \sin\xi\cos\eta + \cos\xi\sin\eta,$$
$$\cos\zeta = \cos(\xi + \eta) = \cos\xi\cos\eta - \sin\xi\sin\eta.$$

Früher aufgestellte Formeln [III, 3. (6), (7), (11)] lauten jetzt

$$\cos\xi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right), \quad \sin\xi < \xi < \operatorname{tg}\xi, \quad \operatorname{tg}\xi = \frac{\sin\xi}{\cos\xi};$$
$$\lim_{\xi=0} \frac{\sin\xi}{\xi} = 1,$$

in der zweiten ist $\xi > 0$ zu nehmen. Damit sind Grundeigenschaften der trigonometrischen Funktionen im ersten Quadranten, d. h. auf der Strecke $0 \cdots \frac{1}{2}\pi$, auf arithmetischer Grundlage abgeleitet.

Für größere Werte der Unabhängigen definieren wir die Funktionen sin und cos ein für allemal durch die Gleichungen

$$(2) \qquad \cos\left(\xi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\xi, \quad \sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\xi,$$

die die Eigenschaft haben, die Grundeigenschaften der Funktionen festzuhalten. Denn wenn z. B. die Additionsformeln (1) unter der

Voraussetzung $a > \xi > 0$, $a > \eta > 0$ bewiesen sind, wie es für $a = \frac{1}{4}\pi$ feststeht, so folgt aus den Gleichungen (2), indem man $\xi_1 = \xi + \frac{1}{2}\pi$ setzt,

$$\sin(\xi_1 + \eta) = \quad \cos(\xi + \eta) = \sin\xi_1 \cos\eta + \sin\eta \cos\xi_1,$$
$$\cos(\xi_1 + \eta) = -\sin(\xi + \eta) = \cos\xi_1 \cos\eta - \sin\xi_1 \sin\eta,$$

wobei nun ξ_1 beliebig zwischen 0 und $a + \frac{1}{2}\pi$ gelegen sein kann. Ebenso folgt, daß die Formeln auch gelten, wenn man η durch η_1 ersetzt und η_1 beliebig zwischen 0 und $a + \frac{1}{2}\pi$ gelegen ist. Die Additionsformeln gelten also unter der weiteren Annahme

$$a + \frac{\pi}{2} > \xi > 0, \quad a + \frac{\pi}{2} > \eta > 0,$$

und indem man, mit $a = \frac{1}{4}\pi$ beginnend, in derselben Weise fortschließt, erkennt man die Formeln als allgemein gültig.

Aus den Formeln (1) folgt weiter, indem man mit $\cos\eta$ und $\sin\eta$ oder mit $\sin\eta$ und $\cos\eta$ multipliziert und addiert, indem man sodann $\zeta = \xi + \eta$ setzt,

$$\sin(\zeta - \eta) = \sin\zeta \cos\eta - \sin\eta \cos\zeta, \tag{3}$$
$$\cos(\zeta - \eta) = \cos\zeta \cos\eta + \sin\zeta \sin\eta,$$

und die Voraussetzungen fordern zunächst $\zeta > \eta$. Bisher waren $\sin\xi$ und $\cos\xi$ nur für positive oder verschwindende Werte von ξ erklärt; setzt man nun allgemein $\xi > 0$ und

$$\sin(-\xi) = -\sin\xi, \quad \cos(-\xi) = \cos\xi, \tag{4}$$

so sieht man aus den Formeln (3), daß die Gleichungen (1) für positive und negative Werte von ξ und η gültig bleiben.

Die Gleichungen (4) führen auch dazu, die Funktionen $\arcsin x$ und $\operatorname{arctg} x$ für negative Werte von x nach den Gleichungen

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

zu erklären; dann bleiben die Gleichungen

$$\xi = \arcsin x, \quad x = \sin\xi$$

und ebenso die Gleichungen

$$\xi = \operatorname{arctg} x, \quad x = \operatorname{tg}\xi$$

gleichzeitig richtig. Die Funktionen $\arcsin x$ und $\operatorname{arctg} x$ sind dann die auf der Strecke von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen Werte ξ, die die Gleichungen $x = \sin\xi$ und $x = \operatorname{tg}\xi$ ergeben; $\arcsin x$ ist als stetige Funktion auf der Strecke von -1 bis $+1$, $\operatorname{arctg} x$ ebenso auf jeder endlichen Strecke $a \ldots b$ gegeben, und man hat die Beziehungen

$$\lim_{\xi = 1/2\pi - 0} \operatorname{tg}\xi = +\infty, \quad \lim_{\xi = 1/2\pi + 0} \operatorname{tg}\xi = -\infty.$$

Differentialrechnung.

Kapitel I.

Einfache Differentiation.

§ 1. Differenzen und Differentiale.

Beziehen wir, wie es schon in Beispielen geschehen ist, eine Kurve auf eine wagerecht gedachte Abszissenachse oder x-Achse und eine lotrechte Ordinatenachse oder y-Achse, und ist die Kurve das Bild einer Funktion $y = f(x)$, so wird man den Verlauf der Kurve aus den Eigenschaften der Funktion zu erkennen suchen. Beim Verlauf der Kurve fragt man naturgemäß zuerst nach ihrem Steigen und Fallen; mißt y die lotrechte Ordinate, x die wagerechte Abszisse, so ist jene Frage gleichbedeutend mit der Frage nach dem Zunehmen oder Abnehmen der Funktion $f(x)$, wenn die unabhängige Größe x in bestimmtem Sinne sich ändert, etwa zunimmt. Seien A_1 und A_2 (Fig. 6) zwei Punkte der Kurve, und seien x_ν, y_ν die Koordinaten des Punktes A_ν, dann wird der Übergang von A_1 zu A_2 eine Steigung oder Senkung bedeuten, die durch die Neigung der Geraden $A_1 A_2$ gegen die Horizontalebene, also die Abszissenachse, dargestellt wird. Unter Steigung verstehen wir, wie im gewöhnlichen Leben etwa bei der Beurteilung der Steilheit einer Straße, das Verhältnis der lotrechten Erhebung zum wagerechten Fortgang, also den Quotienten

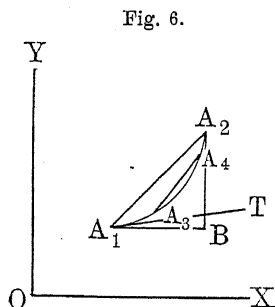



Fig. 6.

$$s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{B A_2}{A_1 A_2}.$$

Dieser hat die wichtige Eigenschaft, nicht nur die absolute Größe, sondern auch den Sinn der Steigung, ob nämlich eine Steigung im

eigentlichen Sinne oder eine Senkung vorliegt, anzuzeigen; das beruht darauf, daß wir bisher stillschweigend die Koordinaten mit einem Vorzeichen in die Rechnung eingesetzt haben, etwa die Abszisse von der Ordinatenachse nach rechts positiv, nach links negativ, die Ordinaten von der Abszissenachse nach oben positiv, nach unten negativ. Hieraus folgt, daß die Differenz $y_2 - y_1 = BA_2$ stets die lotrechte Steigung beim Übergang von A_1 zu A_2 mit ihrem Vorzeichen angibt; ebenso $x_2 - x_1$ den wagerechten Fortgang von A_1 nach A_2 mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem die durch A_2 gehende Lotlinie rechts oder links von der durch A_1 gehenden liegt. Hiernach ist s die Steigung mit ihrem Vorzeichen bei dem durch $x_2 - x_1$ gekennzeichneten wagerechten Fortgang; z. B. wenn $x_2 - x_1 = 1$, so wird $s = y_2 - y_1$ mit der entsprechenden Steigung bestimmten Vorzeichens identisch.

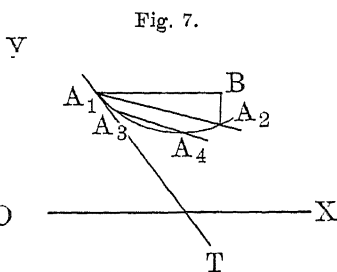
Fig. 7.

Die Größe s kennzeichnet nun offenbar die Steigung der Kurve $A_1 A_2$ nur sehr wenig; ist sie doch für alle die beiden Endpunkte verbindenden Kurven dieselbe. Sie ist die trigonometrische Funktion tg des spitzen oder stumpfen Winkels, den die durch die Abszissenachse oder x-Achse abgeschnittene obere Hälfte der Geraden $A_1 A_2$ mit der Richtung nach rechts, d. h. mit der positiven x-Richtung bildet. Dieser Winkel, den wir α nennen, ist stumpf (Fig. 7), wenn eine Senkung vorliegt, spitz bei einer Steigung, und die Funktion tg ist negativ im ersten, positiv im zweiten Falle (Fig. 6). Ist allgemein $y_\nu = f(x_\nu)$, so haben wir

$$s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Hat diese Größe den festen Wert a, so erhält man sofort bei fester Lage von A_1 die Gleichung

$$f(x_2) = a x_2 + b,$$

wobei b eine neue Konstante bedeutet. Die lineare Funktion $f(x) = ax + b$ ist also die einzige von konstanter Steigung. Geometrisch bedeutet die konstante Steigung den geraden Fortgang von A_1 nach A_2; die lineare Funktion wird durch eine gerade Linie dargestellt, und umgekehrt wird jede nicht lotrechte Gerade durch eine Gleichung $y = ax + b$ dargestellt.

Ist die Kurve $A_1 A_2$ nicht gerade und sind A_3 und A_4 zwei andere Punkte derselben zwischen A_1 und A_2, so lehrt die Anschauung, daß die Steigung von A_3 nach A_4 hin im allgemeinen verschieden ausfällt nach der Wahl dieser Punkte; analytisch ausgedrückt, ändert sich s mit x_1 und x_2. Die Steigung eines endlichen Bogens läßt sich also durch eine Größe s nicht genügend kennzeichnen; nur wenn der Bogen $A_1 A_2$ sehr klein ist, wird seine Steigung dem des kleineren Bogens $A_3 A_4$ nahezu gleich. Die Werte aller dieser Steigungen liegen, wenn man A_1 festhält und A_2, A_3, A_4 heranrücken läßt, in der Nähe eines bestimmten Wertes s_0, der Grenze, der die Größe s zustrebt. Diese vorläufigen Erwägungen führen dazu, indem man $x_2 = x_1 + h$ setzt, die Größe

$$\lim_{x_2 = x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

zu betrachten, wenn sie existiert; sie ist die Steigung der Geraden $A_1 T$, in die die Sekante $A_1 A_2$ mehr und mehr übergeht, wenn A_2 an A_1 heranrückt, d. h. der Tangente der Kurve im Punkte A_1.

Um nun genaue Begriffsbestimmungen zu geben, bezeichnen wir durch Δx oder h einen Zuwachs der Größe x, durch Δy den entsprechenden der Größe y oder $f(x)$, d. h.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y, \quad \Delta x = h,$$

und setzen weiter

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

vorausgesetzt, daß dieser Grenzwert existiert; das Zeichen $\lim\limits_{h=0}$ bedeute den unbestimmten Grenzübergang im Sinne von II, 5.; nur wenn x etwa der größte oder kleinste Wert einer Strecke ist, auf die man die Untersuchung beschränkt, ist h auf negative oder positive Werte beschränkt. $f'(x)$ ist die oben unbestimmt erörterte Größe s_0, die Steigung der Tangente der Kurve $y = f(x)$ an der durch die Abszisse x bestimmten Stelle; wir nennen sie die aus der Funktion $f(x)$ abgeleitete, die Ableitung; von der Tangente kann gesprochen werden, wenn der Grenzwert $f'(x)$ existiert, was sich an Beispielen nachweisen läßt; sie ist die Gerade durch den betrachteten Kurvenpunkt, deren Steigung $f'(x)$ ist.

Sei zunächst $f(x) = ax + b$, so ist

$$\Delta y = a \Delta x, \quad f'(x) = a.$$

Die Kurve ist eine Gerade, bei der für den oben eingeführten Winkel α die Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = a$ gilt. Ist $a = 0$, so ist $f(x)$ die Konstante b, $f'(x) = 0$; die Konstante hat die Ableitung Null.

Die Gleichung

$$y = f(x) = x^2$$

stellt eine Parabel dar; man findet

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

also, $\Delta x = h$ gesetzt,

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x = f'(x).$$

Die Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = 2x$ kann geschrieben werden

$$\operatorname{tg}\alpha = y : \frac{x}{2}$$

und gibt dann die Eigenschaft der Parabel, daß die Abszisse von der Tangente halbiert wird.

Die Definition der Ableitung kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varrho\Delta x,$$

wobei $\lim_{h=0} \varrho = 0$; der Zuwachs der Funktion erscheint zerlegt in zwei Teile; der eine ist dem Zuwachs Δx bei festem Wert von x proportional, der andere ein Produkt aus Δx und einem Faktor, der mit Δx zugleich der Grenze Null zustrebt. Ersteren Teil nennt man das Differential von y oder $f(x)$,

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x;$$

setzt man im besonderen $f(x) = x$, so ist $dx = \Delta x$ und man kann daher die Definition des Differentials in der Form

$$dy = f'(x)\,dx$$

schreiben; hierdurch wird die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

und die Bezeichnung der Ableitung als Differentialquotient von y nach x gerechtfertigt. Die Bildung der Ableitung einer Funktion wird danach auch als Differenzieren bezeichnet; man differenziert eine Gleichung, wie $y = f(x)$, deren beide Seiten bei veränderlichen

Werten von x übereinstimmen, indem man die Ableitungen oder Differentiale gleich setzt:

$$dy = f'(x)\,dx, \qquad dy = y'\,dx;$$

der Ableitungsstrich kann, wenn die unabhängige Veränderliche, nach der man differenziert, feststeht, auch an den die Funktion darstellenden Einzelbuchstaben geheftet werden.

Geometrisch kann man das Differential deuten, indem man davon ausgeht, daß, wenn x, η die Koordinaten eines Punktes der Tangente sind, die die Kurve im Punkte (x_0, y_0) berührt, die Gleichung

$$\eta - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

besteht; man hat dann nach der eingeführten Schreibweise

$$\varDelta \eta = f'(x_0)\,\varDelta x;$$

das Differential ist also der Zuwachs der Ordinate eines Punktes der Tangente bei beliebiger Änderung der Abszisse.

§ 2. Differentiale der einfachsten Funktionen.

I. Die Potenz. Als Zuwachs der Potenz x^μ, in der μ eine beliebige reelle Zahl bedeutet, erhält man

$$\varDelta (x^\mu) = (x + \varDelta x)^\mu - x^\mu = \left[\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)^\mu - 1\right] x^\mu,$$

oder, wenn $\frac{\varDelta x}{x} = \delta$ gesetzt wird,

$$\varDelta (x^\mu) = \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta}\, x^{\mu-1} \varDelta x.$$

Jetzt strebt der Bruch auf der rechten Seite nach Einl. V, 3. (3) der Grenze μ zu, wenn δ oder auch $\varDelta x$ unendlich abnimmt; somit ergibt sich

$$\varDelta (x^\mu) = (\mu + \varrho)\, x^{\mu-1} \varDelta x, \qquad \lim_{\varDelta x = 0} \varrho = 0,$$

also, da hiermit die in § 1 angestrebte Zerlegung des Zuwachses der Funktion x^μ erzielt ist,

$$d(x^\mu) = \mu\, x^{\mu-1}\, dx,$$

oder auch

$$D(x^\mu) = \lim_{\varDelta x = 0} \frac{\varDelta (x^\mu)}{\varDelta x} = \mu\, x^{\mu-1}.$$

II. Der Logarithmus. Aus der Grundeigenschaft dieser Funktion folgt

$$\lg(x + \Delta x) - \lg x = \lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

oder, wenn wieder $\frac{\Delta x}{x} = \delta$ gesetzt wird,

$$\Delta \lg x = \frac{\lg(1+\delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{x} \cdot \Delta x;$$

wenn nun Δx und damit δ unendlich abnimmt, nähert sich der erste Bruch rechts nach Einl. III, 2. der Grenze 1 an; somit folgt

$$\Delta \lg x = (1 + \varrho)\frac{\Delta x}{x}, \quad \lim_{\Delta x = 0} \varrho = 0,$$

also

$$d \lg x = \frac{dx}{x}.$$

III. Die Exponentialfunktion. Ihre Grundeigenschaft gibt nach Einl. V, 3.

$$\Delta e^x = e^{x + \Delta x} - e^x = e^x \cdot \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \cdot \Delta x;$$

der Bruch rechts kann, wenn h sein Zähler ist, geschrieben werden:

$$\frac{h}{\lg(1+h)},$$

und h verschwindet mit Δx wegen der Stetigkeit der Funktion e^x; jener Bruch nähert sich also nach Einl. III, 2. der Grenze 1 an, wenn Δx verschwindet; also folgt in der bisherigen Bezeichnung

$$\Delta e^x = (1 + \varrho) e^x \Delta x = e^x \Delta x + \varrho_1 \Delta x,$$

wobei ϱ_1 ebenso wie ϱ mit Δx verschwindet. Hiermit ist gezeigt

$$d e^x = e^x dx,$$

oder auch, wenn $e^x = f(x)$ gesetzt wird,

$$f'(x) = f(x).$$

IV. Die Funktion arcsin. Man findet für sie nach Einl. III, 3., wenn $x + \Delta x = z$ gesetzt wird und die dortigen Bezeichnungen gelten,

$$\text{(1)} \qquad \arcsin z - \arcsin x = \arcsin y,$$

wobei

$$y = z\bar{x} - \bar{z}x, \quad \bar{y} = \bar{z}\bar{x} + zx, \quad z = x\bar{y} + \bar{x}y,$$

also

$$z - x = -x(1-\bar{y}) + \bar{x}y. \tag{2}$$

Nun ist

$$\frac{1-\bar{y}}{y} < \frac{(1-\bar{y})(1+\bar{y})}{y} = \frac{1-\bar{y}^2}{y} = y,$$

also folgt

$$\lim_{y=0} \frac{1-\bar{y}}{y} = 0$$

und die Gleichung (2) gibt

$$\lim_{y=0} \frac{z-x}{y} = \bar{x} = \sqrt{1-x^2}.$$

Schreibt man daher die Gleichung (1) in der Form

$$\frac{\arcsin z - \arcsin x}{z-x} = \frac{\arcsin y}{y} \cdot \frac{y}{z-x},$$

so strebt rechts der erste Bruch der Einheit, der zweite dem Werte $1/\bar{x}$ zu, wenn Δx oder $z - x$ unendlich abnimmt, und man kann für die letzte Gleichung schreiben:

$$\Delta \arcsin x = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \varrho\right) \Delta x;$$

dabei hat ϱ die frühere Bedeutung und muß nur $\bar{x}$ von Null verschieden, also $x < 1$ sein. Dann ist das erhaltene Ergebnis:

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V. Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. Man findet aus der Additionsformel Einl. V, 5.

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x . \sin \Delta x;$$
$$1 - \cos \Delta x < (1 - \cos \Delta x)(1 + \cos \Delta x) = 1 - \cos^2(\Delta x) = \sin^2 \Delta x,$$

also

$$\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x} < \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \sin \Delta x; \tag{3}$$

bei unendlich abnehmenden Werten von Δx verschwindet der letzte Faktor rechts, und der Bruch strebt nach Einl. III, 3. oder V, 5. dem Grenzwert 1 zu; daraus folgt mit der bekannten Bedeutung von ϱ

$$\Delta \sin x \quad \varrho + \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\Big) \Delta x,$$

oder, indem wir durch das Zeichen ϱ_1 dieselben Eigenschaften wie durch ϱ andeuten,

$$\varDelta \sin x = (\cos x + \varrho_1)\varDelta x, \qquad d \sin x = \cos x \,.\, d x.$$

Ähnlich ergibt sich

$$\varDelta \cos x = \cos(x + \varDelta x) - \cos x = \cos x(\cos \varDelta x - 1) - \sin x \sin \varDelta x,$$

also, wenn man durch $\varDelta x$ dividiert und wieder die Beziehung (3) bedenkt,

$$\varDelta \cos x = \left(-\sin x \cdot \frac{\sin \varDelta x}{\varDelta x} + \varrho\right)\varDelta x = (-\sin x + \varrho_1)\varDelta x,$$

also

$$d \cos x = -\sin x\, d x.$$

Zusammengefaßt in etwas anderer Form kann man sagen: Wenn nach und nach

$$y = x^\mu, \quad \lg x, \quad e^x, \quad \arcsin x, \quad \sin x, \quad \cos x$$

gesetzt wird, folgt entsprechend für die Ableitung

$$y' = \mu x^{\mu - 1}, \quad \frac{1}{x}, \quad e^x, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \cos x, \quad -\sin x.$$

Alle diese Funktionen sind stetig mit Ausschluß der bei einigen auftretenden besonderen Werte $x = 0$ und $x = 1$.

Wir führen endlich noch eine dritte Bezeichnung für die Ableitung ein und schreiben für y' auch $D_x y$ oder kürzer $D y$; der Ursprung dieses Zeichens dürfte die ältere Bezeichnung Derivierte für Ableitung sein. Diese Bezeichnung hat den Vorzug, daß man die unabhängige Veränderliche, nach der die Ableitung gebildet wird, sichtbar machen kann. Man hat also die vollständigen Bezeichnungen

$$y = f(x), \quad f'(x) = \frac{d y}{d x} = D_x y = D_x f(x),$$

unvollständig sind die Bezeichnungen y' und $D y$, bei denen die unabhängige Veränderliche besonders angegeben sein muß.

§ 3. Rechenregeln des Differentialzeichens.

I. Differential der Summe. Der Zuwachs einer Summe $y + z$, in der $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$ zwei Funktionen von x sind, ist die Summe der Zuwüchse der einzelnen Summanden:

$$\varDelta(y + z) = \varDelta y + \varDelta z.$$

Kann man nun $f(x)$ und $\varphi(x)$ differenzieren, so ist

$$\varDelta y = [f'(x) + \varrho]\varDelta x, \qquad \varDelta z = [\varphi'(x) + \varrho_1]\varDelta x,$$

wobei die Größen ϱ und ϱ_1 mit Δx verschwinden; dann folgt

$$\Delta(y+z) = [f'(x) + \varphi'(x)]\Delta x + (\varrho + \varrho_1)\Delta x,$$

und da nach Einl. II, 5. aus den Gleichungen $\lim \varrho = \lim \varrho_1 = 0$ auch folgt $\lim(\varrho + \varrho_1) = 0$, so hat $\varrho + \varrho_1$ die eben bezeichnete Eigenschaft mit ϱ gemein, und mit der letzten Gleichung ist bewiesen

$$d(y+z) = [f'(x) + \varphi'(x)]\,dx = dy + dz,$$

oder auch

$$D(y+z) = Dy + Dz, \quad (y+z)' = y' + z'.$$

II. Differential eines Produkts. Aus den Gleichungen

$$\Delta y = (y' + \varrho)\Delta x, \qquad \Delta z = (z' + \varrho_1)\Delta x,$$

in denen ϱ und ϱ_1 mit Δx verschwinden, ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta(yz) &= (y + \Delta y)(z + \Delta z) - yz = y\Delta z + z\Delta y + \Delta y \,.\, \Delta z\\ &= (yz' + zy')\Delta x + \Delta x \,.\, [y\varrho_1 + z\varrho + \Delta x \,.\, (y' + \varrho)(z' + \varrho_1)]\\ &= (yz' + zy')\Delta x + \varrho_2 \Delta x,\end{aligned}$$

und ϱ_2 teilt die bezeichnete Eigenschaft der Größen ϱ und ϱ_1; also folgt nach dem Begriff des Differentials

$$d(yz) = (yz' + zy')\,dx = y\,dz + z\,dy,$$

oder auch

$$D(yz) = y\,Dz + z\,Dy.$$

Im besonderen folgt, wenn $z = a$ eine Konstante, $Dz = 0$ ist,

$$D(ay) = a\,Dy,$$

was natürlich auch direkt leicht einzusehen ist; ein konstanter Faktor kann mit dem Differentialzeichen vertauscht werden.

III. Differential des Quotienten. Sei y an der betrachteten Stelle, mithin auch in ihrer Umgebung von Null verschieden; dann ist

$$\Delta\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y + \Delta y} - \frac{1}{y} = -\frac{\Delta y}{y^2}\,\frac{1}{1 + \frac{\Delta y}{y}},$$

und da, wenn Δx unendlich abnimmt, nach den Limesregeln Einl. II, 6.

$$\lim\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) = 1 = \lim \frac{1}{1 + \frac{\Delta y}{y}}, \quad \Delta y = dy + \varrho\,\Delta x,$$

so folgt

$$\Delta\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2} + \varrho_1 \Delta x, \quad d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2}.$$

Hieraus ergibt sich weiter mittels der Produktregel

$$d\left(\frac{z}{y}\right) = z\,d\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{dz}{y} = \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2}.$$

Beispiele. Aus I folgt, da man nach II jeden konstanten Faktor beim Differenzieren heraussetzen darf, daß man Aggregate, d. h. Summen von Funktionen mit konstanten Koeffizienten, differenzieren kann, wenn man die einzelnen Funktionen, wie Potenzen nach § 2, differenzieren kann, z. B.:

$$d[(a+bx)^3] = d(a^3 + 3a^2bx + 3ab^2x^2 + b^3x^3)$$
$$= d(a^3) + 3a^2b\,dx + 3ab^2.2x + b^3.3x^2 = 3b(a+bx)^2.$$

Ein zweites Beispiel ist

$$(1 \qquad d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = d(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$
$$= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2}.$$

Als Beispiel zu II nehmen wir $y = x^\alpha$, $z = x^\beta$:

$$d(x^\alpha x^\beta) = x^\alpha \beta x^{\beta-1} + x^\beta \alpha x^{\alpha-1} = (\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1},$$

was sich auch durch Differenzieren der Potenz $x^{\alpha+\beta}$ ergibt.

Zu III bilden wir

$$d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{(1-x)(-nx^{n-1}) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2};$$

in Verbindung mit der Gleichung (1) findet man so die Formel

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} = \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}.$$

Sei ferner $y = \sin x$, $z = \cos x$; wir finden nach III und § 2

$$d\left(\frac{y}{z}\right) = d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{\cos x\,d\sin x - \sin x\,d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

ebenso

$$d\,\mathrm{cotg}\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x};$$

setzt man wie üblich sec = 1/cos, cosec = 1/sin, so ergibt sich nach III

$$d\sec x = -\frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}, \quad d\,\mathrm{cosec}\,x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}.$$

§ 4. Funktionen von Funktionen.

Wenn z Funktion von y ist und y Funktion von x, etwa

$$z = f[y], \quad y = \varphi(x),$$

so kann man schreiben

$$z = f[\varphi(x)],$$

und nennt z eine zusammengesetzte Funktion. Ebenso kann umgekehrt eine Gleichung der letzteren Art in zwei Gleichungen zerlegt werden, z. B. $z = \lg \sin x$ in $z = \lg y$ und $y = \sin x$. Einer Änderung von x um Δx entspricht nun bei z der Zuwachs

$$\Delta z = \Delta f[y] = \frac{\Delta f[y]}{\Delta y} \cdot \Delta y = \frac{f[y + \Delta y] - f[y]}{\Delta y} \cdot \Delta y.$$

Wenn also f und φ differenzierbare Funktionen sind, kann man setzen

$$\Delta z = \Delta f[y] = \{f'[y] + \varrho\} \Delta y, \quad \Delta y = [\varphi'(x) + \varrho_1] \Delta x,$$

wobei ϱ_1 mit Δy, ϱ mit Δx unendlich abnimmt; da nun Δy mit Δx unendlich abnimmt, gilt dies von beiden Größen ϱ und ϱ_1, und man findet

$$\Delta z = \{f'[y] \varphi'(x) + \varrho_1 f'[y] + \varrho \varphi'(x) + \varrho \varrho_1\} \Delta x,$$

also kurz, indem ϱ_2 wieder eine Größe wie ϱ ist,

$$\Delta z = \{f'[y] \varphi'(x) + \varrho_2\} \Delta x,$$

oder, wenn wir auf z als Funktion von x den Begriff des Differentials anwenden,

$$dz = f'[y] \varphi'(x) dx,$$

oder hiermit gleichbedeutend

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad D_x z = D_y z \,.\, D_x y; \quad dz = f'[y] dy.$$

Die erste und zweite dieser Formen des Ergebnisses werden als Kettenregel bezeichnet; in der letzten ist $dy = \varphi'(x) dx$ eingesetzt zu denken; das Differential von z als Funktion von x hat also dieselbe Form wie als Funktion von y. Hierauf beruht der praktische Vorzug des Differentialzeichens: die mit ihm erzielten Formeln sind von der Wahl der Unabhängigen unabhängig; die Formel bleibt richtig bei geändertem Sinn der Differentiale; dy ist das eine Mal der genaue Zuwachs von y, das andere Mal der abgekürzte $\varphi'(x) dx = \Delta y - \varrho dx$.

Die einfachsten Anwendungen bieten Ausdrücke $z = f(ax)$; man findet sofort

$$dz = f'(ax) \,.\, a dx, \qquad D_x z = a f'(ax);$$

Einzelfälle sind

$$\begin{aligned} D_x \sin ax &= a \cos ax, & d \sin ax &= a \cos ax\, dx, \\ D_x \cos ax &= -a \sin ax, & d \cos ax &= -a \sin ax\, dx, \\ D_x e^{ax} &= a e^{ax}, & d(e^{ax}) &= a e^{ax} dx \text{ usf.} \end{aligned}$$

In der Anwendung auf das Beispiel

$$z = (a + b x^n)^p$$

gestaltet sich die Sache folgendermaßen. Statt der vorstehenden Gleichung schreibt man die beiden Gleichungen

$$z = y^p, \qquad y = a + b x^n$$

und erhält daraus

$$\frac{dz}{dy} = p y^{p-1}, \quad \frac{dy}{dx} = b n x^{n-1},$$

mithin durch Multiplikation dieser Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx} = b n p y^{p-1} x^{n-1}$$

oder endlich, wenn man für y und z ihre Werte setzt,

$$\frac{d[(a + b x^n)^p]}{dx} = b n p (a + b x^n)^{p-1} x^{n-1}.$$

Bei mehrfacher Übung in diesem Verfahren wird man finden, daß es nicht notwendig ist, die Veränderlichen y und z in Rechnung zu bringen, weil sie später doch wieder daraus verschwinden; vielmehr kann man diese Substitutionen im Gedächtnis behalten und dadurch eine wesentliche Abkürzung herbeiführen. Auch ist es wegen der angegebenen Eigenschaft des Differentials bequemer, dieses zugrunde zu legen. So würde man bei dem vorigen Beispiel sagen: analog der Formel $d(y^p) = p y^{p-1} dy$ ist

$$\begin{aligned} d[(a + b x^n)^p] &= p (a + b x^n)^{p-1} d(a + b x^n) \\ &= p (a + b x^n)^{p-1} b\, d(x^n) \\ &= p (a + b x^n)^{p-1} b n x^{n-1} dx, \end{aligned}$$

was mit dem früheren Ergebnis übereinstimmt.

Als letztes Beispiel diene die Differentiation von x^x. In der Form einer Exponentialgröße dargestellt, ist dieser Ausdruck

$$x^x = (e^{\lg x})^x = e^{x \lg x};$$

nach der Regel $d(e^y) = e^y dy$ erhält man daraus

$$\begin{aligned} d(x^x) &= e^{x \lg x} d(x \lg x) \\ &= e^{x \lg x} (x\, d \lg x + \lg x\, dx) \\ &= e^{x \lg x} \left(x \frac{1}{x} dx + \lg x\, dx \right) \\ &= x^x (1 + \lg x)\, dx. \end{aligned}$$

Auf demselben Wege gelangt man zu der folgenden kleinen Formelsammlung, welche später von Nutzen sein wird:

$$d\left[\frac{1}{b}\lg(a+bx)\right] = \frac{dx}{a+bx},$$

$$d\left[-\frac{1}{b(a+bx)}\right] = \frac{dx}{(a+bx)^2},$$

$$d\left[\frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\frac{\beta x}{\alpha}\right] = \frac{dx}{\alpha^2+\beta^2x^2},$$

$$d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\lg\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)\right] = \frac{dx}{\alpha^2-\beta^2x^2},$$

$$d\left[\frac{1}{2b}\lg(a+bx^2)\right] = \frac{x\,dx}{a+bx^2},$$

$$d\left[\frac{2\sqrt{a+bx}}{b}\right] = \frac{dx}{\sqrt{a+bx}},$$

$$d\left[\frac{\lg\left(\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)}{\beta}\right] = \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}},$$

$$d\left[\frac{1}{\beta}\arcsin\frac{\beta x}{\alpha}\right] = \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}},$$

$$d\left[\frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}\right] = \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}},$$

$$d\left[\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}},$$

$$d\left[-\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}},$$

$$d[x\lg x - x] = \lg x\,dx,$$

$$d[-\lg\cos u] = \operatorname{tg} u\,du,$$

$$d[\lg\sin u] = \cot u\,du,$$

$$d\left[\frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta\operatorname{tg}u}{\alpha}\right)\right] = \frac{du}{\alpha^2\cos^2 u+\beta^2\sin^2 u},$$

$$d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\lg\left(\frac{\alpha+\beta\operatorname{tg}u}{\alpha-\beta\operatorname{tg}u}\right)\right] = \frac{du}{\alpha^2\cos^2 u-\beta^2\sin^2 u}.$$

§ 5. Weitere Anwendungen.

I. Einen belangreichen Sonderfall der allgemeinen Formel des § 4 erhalten wir, wenn $\varphi(x)$ die Umkehrung der Funktion $f(x)$ ist (Einl. V, 2.). Sei die differenzierbare Funktion $f(x)$ auf der Strecke

$a \ldots b$ monoton abnehmend oder zunehmend, und ihre Ableitung von Null verschieden, sei ferner $\varphi(x)$ ihre stetige Umkehrung auf der Strecke von $\alpha = f(a)$ bis $\beta = f(b)$, dann hat diese ebenfalls eine Ableitung; denn sind ξ_1 und ξ_2 zwei Werte der Strecke $\alpha \ldots \beta$, so kann man $\xi_1 = f(x_1)$, $\xi_2 = f(x_2)$ setzen und x_1, x_2 sind Werte der Strecke $a \ldots b$; man hat also

$$\frac{\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

Läßt man von ξ_2 an ξ_1 heranrücken, so rückt x_2 an x_1 heran und die rechte Seite nähert sich dem Grenzwerte $1/f'(x_1)$, der immer endlich und bestimmt ist, da $f'(x_1)$ nicht verschwindet. Also nähert sich auch die linke Seite demselben Grenzwert, und dieser ist sinngemäß durch $\varphi'(\xi_1)$ zu bezeichnen; damit folgt

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{1}{f'(x_1)},$$

wobei nach Belieben x_1 auf der Strecke $a \ldots b$ oder ξ_1 auf der Strecke $\alpha \ldots \beta$ gewählt sein kann und immer $\xi_1 = f(x_1)$, $x_1 = \varphi(\xi_1)$ gesetzt wird. Setzt man allgemein

$$y = f(x), \qquad x = \varphi(y),$$

so hat man hiernach die Gleichung

$$1 : \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dy}, \quad 1 : D_x y = D_y x, \quad \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad dx = \frac{dy}{f'(x)}.$$

Man bestätigt diese Rechenregel an Beispielen, die wir kennen:

$$y = x^2, \; x = \sqrt{y}, \; dx = d\sqrt{y} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}, \; dy = 2x\,dx = 2\sqrt{y}\,dx;$$

$$y = e^x, \qquad x = \lg y, \quad dx = \frac{dy}{y} = \frac{e^x\,dx}{e^x};$$

$$y = \sin x, \qquad x = \arcsin y, \quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2};$$

$$dy = \cos x\,dx, \qquad dx = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{dy}{\cos x}.$$

II. Eine neue Anwendung des Differentialzeichens ergibt sich aus folgender Betrachtung. Setzt man zur Abkürzung

$$P_n = \frac{\cos nu}{\cos^n u}, \qquad Q_n = \frac{\sin nu}{\cos^n u},$$

so findet man sehr leicht folgende zwei Relationen

$$P_{n+1} = P_n - Q_n \operatorname{tg} u, \qquad Q_{n+1} = Q_n + P_n \operatorname{tg} u;$$

von den Werten $P_0 = 1$ und $Q_0 = 0$ ausgehend, kann man diese Formeln der Reihe nach für $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ anwenden und erhält

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 1, & Q_1 &= \operatorname{tg} u, \\
P_2 &= 1 - \operatorname{tg}^2 u, & Q_2 &= 2 \operatorname{tg} u, \\
P_3 &= 1 - 3 \operatorname{tg}^2 u, & Q_3 &= 3 \operatorname{tg} u - \operatorname{tg}^3 u, \\
P_4 &= 1 - 6 \operatorname{tg}^2 u + \operatorname{tg}^4 u, & Q_4 &= 4 \operatorname{tg} u - 4 \operatorname{tg}^3 u, \\
& \ldots\ldots & & \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Die vorstehenden Gleichungen berechtigen zu dem allgemeinen Schluß, daß für jedes ganze positive m sein werde

$$(1) \quad P_m = \frac{\cos m u}{\cos^m u} = 1 - C_2 \operatorname{tg}^2 u + C_4 \operatorname{tg}^4 u - C_6 \operatorname{tg}^6 u + \cdots,$$

$$(2) \quad Q_m = \frac{\sin m u}{\cos^m u} = C_1 \operatorname{tg} u - C_3 \operatorname{tg}^3 u + C_5 \operatorname{tg}^5 u - \cdots$$

worin C_1, C_2, C_3 usw. gewisse vorläufig unbekannte Zahlenkoeffizienten bedeuten. Um diese zu bestimmen, differenzieren wir jede der vorigen Gleichungen und bemerken dabei, daß

$$
\begin{aligned}
\frac{d P_m}{d u} &= - m Q_m + m P_m \operatorname{tg} u, \\
\frac{d Q_m}{d u} &= + m P_m + m Q_m \operatorname{tg} u, \\
\frac{d (\operatorname{tg}^k u)}{d u} &= k \operatorname{tg}^{k-1} u \sec^2 u
\end{aligned}
$$

ist, wie sich bei wirklicher Ausführung der Differentiation leicht findet; wir erhalten

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad & - m P_m \operatorname{tg} u + m Q_m \\
&= (2 C_2 \operatorname{tg} u - 4 C_4 \operatorname{tg}^3 u + 6 C_6 \operatorname{tg}^5 u - \cdots) \sec^2 u,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad & m P_m + m Q_m \operatorname{tg} u \\
&= (1 C_1 - 3 C_3 \operatorname{tg}^2 u + 5 C_5 \operatorname{tg}^4 u - 7 C_7 \operatorname{tg}^6 u + \cdots) \sec^2 u.
\end{aligned}
$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\operatorname{tg} u$ und ziehen das Produkt von der zweiten Gleichung ab, so bleibt linker Hand $m P_m (1 + \operatorname{tg}^2 u) = m P_m \sec^2 u$ übrig, wobei sich der Faktor $\sec^2 u$ hebt; gleichzeitig setzen wir statt P_m den in **(1)** verzeichneten Ausdruck und gelangen so zu der Gleichung

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & m - m C_2 \operatorname{tg}^2 u + m C_4 \operatorname{tg}^4 u - m C_6 \operatorname{tg}^6 u + \cdots \\
&= 1 C_1 - (2 C_2 + 3 C_3) \operatorname{tg}^2 u + (4 C_4 + 5 C_5) \operatorname{tg}^4 u \\
&\quad - (6 C_6 + 7 C_7) \operatorname{tg}^6 u + \cdots
\end{aligned}
$$

Das Seitenstück hierzu ergibt sich, wenn wir aus den Gleichungen (3) und (4) die Größe P_m eliminieren und statt des übrig bleibenden Q_m den in (2) verzeichneten Ausdruck setzen; es wird

$$(6)\qquad m\,C_1\operatorname{tg}u - m\,C_3\operatorname{tg}^3 u + m\,C_5\operatorname{tg}^5 u - \cdots$$
$$= (1\,C_1 + 2\,C_2)\operatorname{tg}u - (3\,C_3 + 4\,C_4)\operatorname{tg}^3 u + (5\,C_5 + 6\,C_6)\operatorname{tg}^5 u - \cdots$$

Vergleichen wir nun wechselweise in (5) und (6) die Koeffizienten gleicher Potenzen von $\operatorname{tg}u$, so erhalten wir

$$C_1 = \frac{m}{1},\quad C_2 = C_1\frac{m-1}{2} = \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2},$$
$$C_3 = C_2\frac{m-2}{3} = \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3},\ \text{usf.}$$

woraus augenblicklich hervorgeht, daß C_1, C_2, C_3 usw. mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{m}{1}$, $\binom{m}{2}$, $\binom{m}{3}$ usf. (Einl. V, 3.) identisch sind. Demnach haben wir nach (1) und (2) folgende Formeln

$$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = \binom{m}{0} - \binom{m}{2}\operatorname{tg}^2 u + \binom{m}{4}\operatorname{tg}^4 u - \binom{m}{6}\operatorname{tg}^6 u + \cdots,$$
$$\frac{\sin mu}{\cos^m u} = \binom{m}{1}\operatorname{tg}u - \binom{m}{3}\operatorname{tg}^3 u + \binom{m}{5}\operatorname{tg}^5 u - \cdots,$$

oder auch durch beiderseitige Multiplikation mit $\cos^m u$

$$(7)\qquad \cos mu = \binom{m}{0}\cos^m u - \binom{m}{2}\cos^{m-2}u\sin^2 u + \binom{m}{4}\cos^{m-4}u\sin^4 u - \cdots,$$

$$(8)\qquad \sin mu = \binom{m}{1}\cos^{m-1}u\sin u - \binom{m}{3}\cos^{m-3}u\sin^3 u + \binom{m}{5}\cos^{m-5}u\sin^5 u - \cdots$$

Diese Formeln lassen noch einige Umgestaltungen zu, die wir kurz andeuten wollen. Die Gleichung (7) erhält nur gerade Potenzen von $\sin u$, d. h. ganze Potenzen von $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$; man kann daher den binomischen Satz anwenden, indem man

$$\sin^{2k}u = (1-\cos^2 u)^k$$
$$= 1 - \binom{k}{1}\cos^2 u + \binom{k}{2}\cos^4 u - \binom{k}{3}\cos^6 u + \cdots$$

und $k = 1, 2, 3$ usw. setzt; nach Zusammenfassung aller Glieder, welche gleiche Potenzen von $\cos u$ zu Faktoren haben, gelangt man zu einem Ergebnis von der Form

$$\cos m u = A_0 \cos^m u + A_2 \cos^{m-2} u + \cdots,$$

worin A_0, A_2, A_4 usw. gewisse konstante Koeffizienten bedeuten, deren Werte sich durch Ausführung der angedeuteten Operationen von selbst ergeben. Schreibt man ferner statt der Gleichung (8)

$$\sin m u = \sin u \left[\binom{m}{1} \cos^{m-1} u - \binom{m}{2} \cos^{m-3} u \sin^2 u + \cdots \right],$$

so ist innerhalb der Klammer wieder die vorige Transformation anwendbar und führt zu einem Resultat von folgender Form:

$$\sin m u = \sin u \, [B_1 \cos^{m-1} u + B_3 \cos^{m-3} u + \cdots].$$

Will man die Kosinuspotenzen in Sinuspotenzen umsetzen, so braucht man nur $u = \frac{1}{2}\pi - v$ zu substituieren, doch hat man dann linker Hand gerade und ungerade m zu unterscheiden.

§ 6. Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrem Differentialquotienten.

I. Wie in § 1 bezeichnen wir mit ϱ den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten einer Funktion $f(x)$, wir setzen also

$$\frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = f'(x) + \varrho,$$

wo ϱ zwar nicht näher bekannt ist, aber gleichzeitig mit $\varDelta x$ gegen die Null konvergiert. Eben deswegen läßt sich auch, wenn $\varDelta x$ hinreichend klein genommen wird, ϱ so weit verringern, daß sein absoluter Wert weniger als der absolute Wert von $f'(x)$ beträgt, wenn dieser von Null verschieden ist; für noch kleinere $\varDelta x$ findet diese Ungleichung um so mehr statt wegen der weiteren Abnahme des ϱ. Die rechte Seite der obigen Gleichung hat jetzt dasselbe Vorzeichen wie $f'(x)$, mithin kommt das nämliche Vorzeichen auch der linken Seite zu. Ist nun $f'(x)$ und daher $f'(x) + \varrho$ positiv, so folgt, $\varDelta x$ immer als positiv vorausgesetzt, daß $f(x + \varDelta x) > f(x)$ sein muß; in diesem Fall entspricht dem größeren Werte der Unabhängigen ein größerer Funktionswert. Wenn dagegen $f'(x)$, mithin auch $f'(x) + \varrho$ negativ ist, so ergibt sich $f(x + \varDelta x) < f(x)$, und hier gehört zur größeren Unabhängigen ein kleinerer Funktionswert. Man hat daher folgenden Satz: Je nachdem der Differential-

quotient einer Funktion das positive oder negative Vorzeichen besitzt, ist die Funktion selber im Wachsen oder im Abnehmen begriffen, und umgekehrt.

Hieraus erklärt sich z. B., warum der Differentialquotient des Sinus positiv, der des Kosinus negativ ist, wenn der Bogen im ersten Quadranten liegt.

II. Die vorstehende Betrachtung gibt aber nur Auskunft über das Verhalten der Funktion $f(x)$ in der Umgebung einer bestimmten Stelle, und diese Umgebung ist vielleicht klein; es kann somit nicht erschlossen werden, daß eine Funktion auf einer gegebenen endlichen Strecke wächst, wenn auf dieser Strecke die Ableitung positiv ist. Dazu bedarf es zweier wichtiger Sätze, des Rolleschen und des Mittelwertsatzes.

Sei die Funktion $f(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ mit ihrer Ableitung $f'(x)$ stetig, und sei $f(a) = f(b)$; dann gibt es, so sagt der Rollesche Satz, einen Wert c, derart, daß $a < c < b$ und $f'(c) = 0$.

Zum Beweis dient eine Betrachtung ähnlich der in Einl. IV, 1. durchgeführten. Wir setzen $b = a + k$, $k_1 = \frac{1}{3} k$; dann ist die Funktion $\varphi(x) = f(x + k_1) - f(x)$ auf der Strecke $a \ldots a + 2 k_1$ stetig und hat die Eigenschaft

$$\varphi(a) + \varphi(a + k_1) + \varphi(a + 2 k_1) = 0.$$

Hiernach sind zwei Fälle möglich: entweder die drei Größen $\varphi(a)$, $\varphi(a + k_1)$, $\varphi(a + 2 k_1)$ sind nicht alle $= 0$, oder sie verschwinden alle drei. Im ersten Falle gibt es, da die Summe der drei Größen verschwindet, unter ihnen sicher eine positive und eine negative; also existiert nach Einl. IV, 2. zwischen a und $a + 2 k_1$ eine Stelle a_1, derart, daß $\varphi(a_1) = 0$, $f(a_1 + k_1) - f(a_1) = 0$. Diese Stelle ist von a und $a + 2 k_1$ verschieden, da, wenn $\varphi(a) = 0$ wäre, $\varphi(a + k_1)$ und $\varphi(a + 2 k_1)$ beide von Null verschieden und entgegengesetzten Zeichens wären, also nach dem zitierten Satze zwischen $a + k_1$ und $a + 2 k_1$ eine Stelle a_1 gefunden würde, und Ähnliches gilt, wenn $\varphi(a + 2 k_1) = 0$ sein sollte. Man hat also in jedem Falle die Beziehungen

$$(1) \quad f(a_1 + k_1) = f(a_1), \quad k_1 = \tfrac{1}{3} k, \quad a < a_1 < a + 2 k_1, \quad a_1 + k_1 < b.$$

Eben dies gilt für den zweiten der oben unterschiedenen beiden Fälle, in welchem alle drei Größen $\varphi(a)$, $\varphi(a + k_1)$ und $\varphi(a + 2 k_1)$ verschwinden, indem dann nur $a_1 = a + k_1$ gesetzt zu werden braucht.

Aus den Beziehungen (1) und dem Umstande, daß $f(x)$ auf der Strecke $a \ldots a + 2k_1$ stetig ist, schließen wir sofort weiter: es gibt einen Wert a_2, derart, daß

$$f(a_1 + k_2) = f(a_1), \quad k_2 = \tfrac{1}{3} k_1, \qquad a_1 < a_2 < a_1 + 2k_2$$
$$a_2 + k_2 < a_1 + k_1.$$

So fortfahrend, erhält man eine steigende und eine fallende Größenreihe

$$a < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots, \qquad b > a_1 + k_1 > a_2 + k_2 > \cdots,$$

die Werte beider gehören der Strecke $a \ldots b$ an; sie sind also nach oben und unten beschränkt und streben demnach dem Kernsatze zufolge bestimmten Grenzen zu:

$$\lim a_n = c_1, \quad \lim (a_n + k_n) = c_2, \quad a_n < c_1, \quad a_n + k_n > c_2.$$

Nun ist aber $\lim k_n = \lim 3^{-n} k = 0$; also folgt nach dem Exhaustionssatze (Einl. II, 5.) $c_1 = c_2 = c$. Dabei ist

$$(2) \qquad \lim \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c} = f'(c) = \lim \frac{f(a_n + k_n) - f(c)}{a_n + k_n - c}.$$

Wegen der allgemeinen Beziehung $f(a_n) = f(a_n + k_n)$ sind nun die Zähler der beiden unter lim stehenden Brüche gleich, die Nenner aber von entgegengesetztem Vorzeichen; daraus folgt $f'(c) = 0$. Denn wäre etwa $f'(c) > 0$, so lägen nach (2) in beliebiger Nähe einer positiven Größe Werte verschiedenen Vorzeichens, was unmöglich ist; ebensowenig kann $f'(c) < 0$ sein. Somit folgt $f'(c) = 0$ mit der Beziehung $a < c < b$; der Rollesche Satz ist bewiesen.

Aus ihm folgt der Mittelwertsatz der Differentialberechnung sehr leicht. Sei nämlich $\varphi(x)$ eine beliebige, auf der Strecke $a \ldots b$ mit ihrer Ableitung stetige Funktion; dann hat die Funktion $f(x) = \varphi(x) - Ax$ dieselben Eigenschaften und man kann die Konstante A so wählen, daß $f(a) = f(b)$; das leistet der Wert

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nun ist $f'(x) = \varphi'(x) - A$; es gibt also einen Wert c zwischen a und b, derart, daß $f'(c) = 0$, also

$$\varphi'(c) = A = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}.$$

Man kann nun setzen $c = a + \theta(b - a)$, wobei θ einen positiven echten Bruch bedeutet, also $0 < \theta < 1$, und hat dann, indem man

$b = a + h$ setzt, die Formeln, die den Mittelwertsatz aussprechen:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\,\varphi'[a + \theta(b - a)], \tag{3}$$
$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + h\,\varphi'(a + \theta h),$$

und dabei sind, wir wiederholen es, die Funktionen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ auf der Strecke $a \ldots a + h$ stetig.

Ist im besonderen $\varphi'(x) > 0$ auf dieser Strecke, so folgt $\varphi(a + h) > \varphi(a)$; eine Funktion der betrachteten Art wächst auf einer Strecke von beliebiger Ausdehnung, wenn auf dieser die Ableitung positiv ist; sie nimmt natürlich ab, wenn die Ableitung negativ ist. Gilt die Ungleichung $\varphi'(x) \geqq 0$, so ist auch noch $\varphi(a + h) > \varphi(a)$, es sei denn, daß überall $\varphi'(x) = 0$ wird; denn ist an einer Stelle $\varphi'(x) > 0$, so gilt dasselbe wegen der Stetigkeit der Ableitung für eine vielleicht kleinere Strecke $a_1 \ldots b_1$, wobei $a \leqq a_1 < b_1 \leqq b$; dann zeigt der Mittelwertsatz

$$\varphi(b_1) > \varphi(a_1), \quad \varphi(a) \leqq \varphi(a_1), \quad \varphi(b_1) \leqq \varphi(b),$$

und daraus folgt $\varphi(b) > \varphi(a)$. Oder: Eine Funktion, deren Ableitung ihr Vorzeichen nicht wechselt, ohne jedoch überall zu verschwinden, ist monoton.

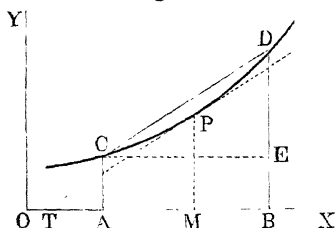
Fig. 8.

Der gewonnene Satz kann auf verschiedene Weise geometrisch interpretiert werden, je nachdem man $\varphi(x)$ als die zur Abszisse x gehörende Ordinate einer ebenen Kurve, oder als die über der Abszisse x stehende Fläche einer anderen Kurve, oder als Volumen betrachtet. Wir wollen die erste Voraussetzung genauer untersuchen.

In Fig. 8 sei die ebene Kurve CPD durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ bestimmt, $OA = a$, $OB = b$, $AB = b - a = h$, $AC = \varphi(a)$, $BD = \varphi(b) = \varphi(a + h)$, endlich CE parallel und gleich AB; man hat dann einerseits $DE = BD - AC = \varphi(b) - \varphi(a)$, anderseits $DE = CE \,.\, \mathrm{tg}\, DCE$, mithin

$$\varphi(a + h) - \varphi(a) = h\, \mathrm{tg}\, DCE.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Kurve von C bis D ununterbrochen verläuft und daß die Tangente an derselben ihre Richtung stetig ändert, wenn der Berührungspunkt den Bogen CD durchläuft, gibt es jedenfalls eine zur Sehne CD parallele Tangente, deren Be-

rührungspunkt P zwischen C und D liegt; es ist dann $\angle DCE = \angle PTM = \tau$ und

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h \operatorname{tg} \tau.$$

Für $OM = \xi$ ist weiter $\operatorname{tg} \tau = \varphi'(\xi) = \varphi'(a + AM)$, und da AM einen Bruchteil von AB ausmacht, so kann $AM = \theta h$ gesetzt werden. Nach diesen Substitutionen geht die vorige Gleichung in (3) über und bedeutet geometrisch, daß es im allgemeinen zu jeder Sehne einer Kurve eine parallele Tangente gibt.

Fig. 9.

Fig. 10.

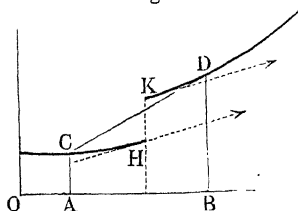
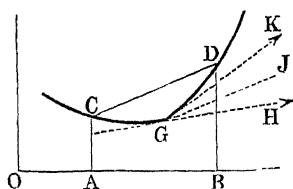



Fig. 11.

Nicht überflüssig ist es, sich von den Fällen zu überzeugen, in denen dieser Satz unanwendbar wird, wenn nämlich entweder $\varphi(x)$ oder $\varphi'(x)$ oder beide Funktionen unstetig werden. So erkennt man augenblicklich aus Fig. 9, daß der Satz nichts ergibt, wenn die Kurve nicht auf der ganzen Strecke AB definiert, sondern unterbrochen ist, obwohl sie vielleicht, wie die Zweige einer Hyperbel, überall dieselbe Gleichung erfüllt. Setzen wir ferner voraus, daß $\varphi(x)$ zwar reell, aber unstetig zwischen $x = a$ und $x = b$, dagegen $\varphi'(x)$ stetig sei, so besteht die Kurve aus zwei nicht zusammenhängenden Bögen CH und KD, wobei die Tangenten in H und K parallel laufen (Fig. 10); auch hier gibt es keine zu CD parallele Tangente, deren Berührungspunkt zwischen C und D fällt. Im dritten Falle, wenn nämlich $\varphi(x)$ stetig, aber $\varphi'(x)$ unstetig ist, erleidet zwar die Kurve keine Unterbrechung, dagegen ändert die Tangente ihre Lage sprungweise zwischen C und D (Fig. 11), d. h. sie geht in einem Punkte G plötzlich von GH nach GK über, wodurch die Kurve eine Spitze erhält. Wiederum gilt hier der Satz nicht, da eine Parallele zu CD zwischen GH und GK, etwa nach GJ, fallen kann und dann keine Lage der Tangente darstellt. Sind endlich $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ gleichzeitig unstetig, so erhält man eine

ähnliche Figur wie Fig. 10, nur sind in diesem Falle die Tangenten in H und K nicht parallel; die Folgerung bleibt aber dieselbe.

Behufs einer zweiten geometrischen Deutung denken wir uns $\varphi(x)$ als die über der Abszisse x stehende Fläche einer Kurve; die Gleichung der letzteren ist dann $y = \varphi'(x)$, und die Formel (2) enthält nun den unmittelbar klaren Satz, daß die über der Strecke AB stehende Fläche als ein Rechteck angesehen werden kann, welches AB zur Basis und eine mittlere Ordinate zur Höhe hat. Ähnlich gestaltet sich die Sache in dem Falle, wo $\varphi(x)$ als ein Volumen betrachtet wird.

Trotz ihrer Einfachheit ist die Mittelwertformel doch sehr wichtig und gestattet viele Anwendungen. Hier nur eine derselben. Ist $\varphi(x) = \log x$ der gewöhnliche Tafellogarithmus, so wird $\varphi'(x) = \frac{\log e}{x}$, mithin

$$\log(a+h) - \log a = h \frac{\log e}{a + \theta h},$$

setzt man an die Stelle des echten Bruches θ das eine Mal die Einheit, das andere Mal die Null, so gelangt man zu den beiden Ungleichungen

$$\log(a+h) > \log a + \frac{h \log e}{a+h},$$

$$\log(a+h) < \log a + \frac{h \log e}{a}.$$

Bei großen a und kleinen h können diese Formeln zur Berechnung von $\log(a+h)$ dienen, wenn $\log a$ bekannt ist. Wollte man z. B. eine bis zur Zahl 100 000 gehende Tafel der Briggschen Logarithmen erweitern und etwa $\log 100\,003$ berechnen, so hätte man nach dem Obigen

$$\log 100\,003 > 5 + \frac{3 \,.\, 0{,}434\,294\,48}{100\,003},$$

$$\log 100\,003 < 5 + \frac{3 \,.\, 0{,}434\,294\,48}{100\,000},$$

oder

$$\log 100\,003 > 5{,}000\,013\,028, \qquad \log 100\,003 < 5{,}000\,013\,029;$$

beide Zahlwerte stimmen in acht Dezimalen überein, daher ist, mit Rücksicht auf die neunte Stelle,

$$\log 100\,003 = 5{,}000\,013\,03$$

zu setzen, wie man auch in größeren Tafeln angegeben findet.

III. Der Mittelwertsatz läßt sich noch verallgemeinern. Seien die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ auf der Strecke $a \dots b$ mit ihren Ableitungen stetig und $\psi'(x)$ im Innern dieser Strecke von Null verschieden, was aber für $\psi'(a)$ und $\psi'(b)$ nicht angenommen zu werden braucht. Dann ist $\psi(b) - \psi(a) \gtrless 0$. Setzt man demgemäß

$$A = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)}, \tag{4}$$

so kann die Ungleichung

$$\varphi'(x) - A\,\psi'(x) \geqq 0,$$

in der das Gleichheitszeichen nicht überall gilt, nicht auf der ganzen Strecke $a \dots b$ bestehen; denn aus ihr würde nach II folgen:

$$\varphi(b) - A\,\psi(b) > \varphi(a) - A\,\psi(a),$$

was nach (4) unrichtig ist. Ebensowenig kann in demselben Sinne auf der Strecke $a \dots b$ überall die Ungleichung

$$\varphi'(x) - A\,\psi'(x) \leqq 0$$

gelten; es muß also positive und negative Werte der Größe $\varphi'(x) - A\,\psi'(x)$ geben, also auch nach Einl. IV, 2. zwischen a und b mindestens einen Wert, für den sie verschwindet, etwa

$$\varphi'(\xi) - A\,\psi'(\xi) = 0, \quad a < \xi < b,$$

oder, da $\psi'(\xi)$ nach Voraussetzung nicht verschwindet, nach (4)

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \tag{5}$$

was selbstverständlich ist, wenn auf der Strecke $a \dots b$, was oben ausgeschlossen wurde, überall die Gleichung

$$\varphi'(x) - A\,\psi'(x) = 0$$

gilt. Man darf bei unseren Annahmen

$$\psi(x) = b^p - (b - x)^p$$

setzen, wobei $p \geqq 1$, sonst beliebig sei; dann verschwindet die Größe

$$\psi'(x) = +p\,(b - x)^{p-1}$$

nur an der Grenze $x = b$, und man findet, wenn $b = a + h$ ist,

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(x)}{p\,(b - x)^{p-1}}, \quad \psi(b) - \psi(a) = (b - a)^p,$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{b - a}{p\,(1 - \theta)^{p-1}}\,\varphi'[a + \theta\,(b - a)], \tag{6}$$

$$\varphi(a + h) - \varphi(a) = \frac{h\,\varphi'(a + \theta\,h)}{p\,(1 - \theta)^{p-1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

§ 7. Differentiation der Funktionen mehrerer Veränderlicher.

I. Eine von zwei Veränderlichen x und y abhängige Größe

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

nennen wir in einem endlichen Gebiet 𝔊 eine stetige Funktion von x und y, wenn bei der Annahme, daß die Wertepaare (x, y) und $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ jenem Gebiet angehören und $|\Delta x|$ und $|\Delta y|$ unter einer passend gewählten Schranke δ liegen, die Ungleichung

$$|f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$$

gilt, wobei ε beliebig klein gegeben und δ dementsprechend für das ganze Gebiet 𝔊 gewählt wird. Ferner werde angenommen, was in Einl. IV, 2. für stetige Funktionen einer Unabhängigen bewiesen wurde, daß $|f(x, y)|$ im ganzen Gebiet 𝔊 unter einer gewissen festen positiven Schranke verbleibt. Das Gebiet 𝔊 wird als endlich dadurch gekennzeichnet, daß in ihm x und y zwischen endlichen Schranken liegen; es habe innere Punkte (x, y), d. h. solche, bei denen auch alle Punkte $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ dem Gebiet 𝔊 angehören, wenn $|\Delta x|$ und $|\Delta y|$ unter bestimmten Schranken liegen.

Wenn dann in 𝔊 etwa x konstant gewählt wird und y eine Strecke durchläuft, die dem Gebiet 𝔊 angehört, so ist z auf dieser eine im Sinne der früheren Definition stetige Funktion von y; ebenso eine stetige Funktion von x auf einer Strecke des Gebiets 𝔊, längs deren y konstant ist. Ist z. B. 𝔊 ein Kreis oder Rechteck in der xy-Ebene, so ist f stetig in x auf jeder Strecke $y = \text{const.}$, die einen Punkt des Umfangs mit einem bestimmten anderen verbindet.

Die einfachsten stetigen Funktionen sind $x \pm y$, xy, x/y, letztere in jedem Gebiet 𝔊, in welchem $|y|$ über einer positiven Schranke liegt, wie die Bildung der Differenz $f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$ zeigt, ähnlich wie in Einl. IV die Stetigkeit der aus zwei stetigen Funktionen zusammengesetzten einfachsten Bildungen gezeigt wurde; z. B. wenn $f(x, y) = x/y$, folgt

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{y\,\Delta x - x\,\Delta y}{y\,(y + \Delta y)},$$

und der Nenner der rechten Seite bleibt wie y über einer festen Schranke, während der Zähler, da das Gebiet endlich ist, in diesem mit Δx und Δy gleichmäßig klein wird, d. h. sobald $|\Delta x|$ und $|\Delta y|$ unter einer hinreichend niedrigen Schranke liegen, ist der Zähler im ganzen Gebiet 𝔊 so klein wie man will. Ferner ist, wenn $f(x, y)$ stetig ist und in 𝔊 Werte der Strecke $a \ldots b$ annimmt, in dieser

aber $\Phi(x)$ stetig ist, auch der Ausdruck $\Phi[f(x, y)]$ stetig, sowie Summen und Produkte solcher Größen; ebenso auch Quotienten, deren Nenner in $\mathfrak{G}$ über einer festen Schranke liegt.

Bei der Annahme (1) sind nun drei verschiedene Änderungen zu unterscheiden; es kann nämlich entweder x allein geändert werden, während y konstant bleibt, oder man läßt y bei konstanten x sich ändern, oder endlich, man setzt voraus, daß x und y gleichzeitige Änderungen erleiden. Begreiflicherweise ändert sich z in jedem Falle, da aber diese Änderungen verschieden sein können, so bedarf es einer Unterscheidung derselben, und zwar nennt man die erste die *partielle* Änderung von z nach x, die zweite die partielle Änderung nach y, und die letzte die *totale* Änderung des z (nach x und y). Diese drei Änderungen kann man leicht veranschaulichen, wenn man die Gleichung (1) als Gleichung einer auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Fläche betrachtet, etwa wie in Fig. 12, wo $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ ist.

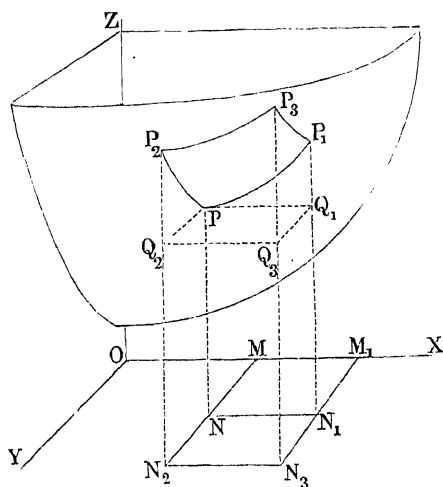



Fig. 12.

Läßt man hier x allein um $\Delta x = MM_1$ wachsen, so rückt N nach N_1, P bewegt sich auf dem Durchschnitt der Fläche mit der Ebene PNN_1 und erhält die neue Lage P_1; der Änderung Δx entspricht daher die partielle Änderung

$$\Delta_x z = P_1 Q_1 = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Wenn zweitens y allein um $\Delta y = NN_2$ zunimmt, so rückt P parallel zur Ebene yz auf der Fläche fort, etwa bis P_2, und es ist die zugehörige partielle Änderung

$$\Delta_y z = P_2 Q_2 = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Im Fall endlich x um Δx und gleichzeitig y und Δy zunimmt, gelangt N nach N_3, P nach P_3 und es entsteht die totale Änderung

$$\Delta z = P_3 Q_3 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Was nun die partiellen Änderungen betrifft, so sind dieselben sehr leicht zu behandeln. Der Differenzenquotient

$$\text{(2)} \qquad \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

ist nämlich ganz so gebildet, als wäre y eine Konstante, und es bedarf daher beim Übergang zur Grenze für verschwindende Δx nur eines Zeichens, daß x hier als alleinige Variable angesehen wurde.

Wir setzen demgemäß

$$\Delta_x z = d_x z + \varrho \Delta x, \quad d_x z = f'_x(x, y)\, dx,$$

wobei ϱ mit Δx verschwindet, verstehen unter $f'_x(x, y)$ den Grenzwert der Größe (2), wenn Δx unendlich abnimmt, die **partielle Ableitung** oder **Teilableitung** von $f(x, y)$ nach x; in abgekürzter und geänderter Schreibweise ist dann

$$\text{(3)} \quad f'_x(x, y) = \frac{d_x z}{dx} = \frac{\partial_x z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f(x, y), \quad \partial_x z = f'_x(x, y)\, \partial x.$$

Das Zeichen ∂ soll immer nur andeuten, daß man es mit mehreren Unabhängigen zu tun hat; das Produkt $\partial_x z$ heißt **partielles Differential** oder **Teildifferential**.

Entsprechend den Gleichungen (3) setzt man

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} f'_y(x, y) &= \lim \frac{\Delta_y z}{\Delta y}, \\ \Delta_y z &= [f'_y(x, y) + \varrho_1]\, dy = \partial_y z + \varrho_1\, dy, \\ f'_y(x, y) &= \frac{\partial_y z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y z = D_y f(x, y). \end{aligned}$$

Bei den abgekürzten Bezeichnungen $\partial z / \partial x$ und $\partial z / \partial y$ hat ∂z im Grunde verschiedene Bedeutungen; solange man aber eine der Veränderlichen, z. B. x, als unabhängige festhält, kann man mit dem Zeichen ∂ und der Ableitung nach den bisherigen Regeln arbeiten, da diese nicht dadurch beeinträchtigt werden, daß man y nachträglich verschiedene Werte setzen kann.

So erhält man z. B. aus

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

nach den gewöhnlichen Regeln die beiden Differentiale

$$\partial_x z = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, \partial x, \quad \partial_y z = +\frac{x}{x^2 + y^2}\, \partial y.$$

Was endlich die totale Änderung betrifft, die man schlechthin mit Δz zu bezeichnen pflegt, so kann man dieselbe in folgender Form darstellen:

$$(5)\qquad \Delta z = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y,$$

und es ist nun zu untersuchen, welchen Grenzen sich die vorkommenden Quotienten bei gleichzeitig verschwindenden Δx und Δy nähern. Beachtet man, daß der Zähler des ersten Quotienten ebenso gebildet ist, als wenn $y + \Delta y$ konstant und nur x um Δx geändert wäre, so erhellt augenblicklich die Anwendbarkeit der Mittelwertformel des vorigen Paragraphen und dann hat man für $a = x$, $h = \Delta x$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y+\Delta y) + \Delta x\, f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y),$$

mithin statt der Gleichung (5) die folgende

$$(6)\qquad \Delta z = f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\Delta y)\,.\,\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y = f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\Delta y)\,.\,\Delta x + f'_y(x,\ y+\theta_1\Delta y)\,\Delta y,\quad 0<\theta<1,\quad 0<\theta_1<1;$$

dabei ist vorausgesetzt, daß die geraden Strecken, die den Punkt (x, y) mit dem Punkte $(x, y+\Delta y)$, sowie diesen mit dem Punkte $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ verbinden, dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehören, was jedenfalls dann zutrifft, wenn (x, y) ein innerer Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}$ ist nach der obigen Definition. Ferner ist vorausgesetzt, daß die Größen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ stetige Funktionen von x und y sind, so daß der Mittelwertsatz in doppelter Weise anwendbar ist; dieselbe Voraussetzung ergibt dann

$$\Delta z = [f'_x(x, y) + \varrho_2]\,\Delta x + [f'_y(x, y) + \varrho_3]\,\Delta y,$$

wobei die Größen ϱ der Grenze Null zustreben, wenn dies von beiden Größen Δx und Δy gilt; bestehen doch alsdann bei verschwindenden Δx und Δy die Gleichungen

$$\lim f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\Delta y) = f'_x(x, y),$$
$$\lim f'_y(x,\ y+\theta_1\Delta y) = f'_y(x, y).$$

So erscheint der Gesamtzuwachs Δz in zwei Ausdrücke zerlegt, die in Δx und Δy linear sind; den einen, dessen Koeffizienten f'_x und f'_y, also von Δx und Δy unabhängig sind, nennen wir das vollständige Differential der Funktion z; der andere hat die schon

gekennzeichneten Koeffizienten ϱ. Wir setzen demnach, indem wir bei den Unabhängigen x und y Differential und Zuwachs gleich setzen,

$$(7)\qquad dz = f'_x(x, y) \cdot dx + f'_y(x, y) \cdot dy,$$
$$\Delta z = dz + \varrho_2 \Delta x + \varrho_3 \Delta y$$

oder

$$(8)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Statt der Gleichung (7) kann, den Formeln (3) und (4) zufolge, auch geschrieben werden

$$(9)\qquad dz = \partial_x z + \partial_y z,$$

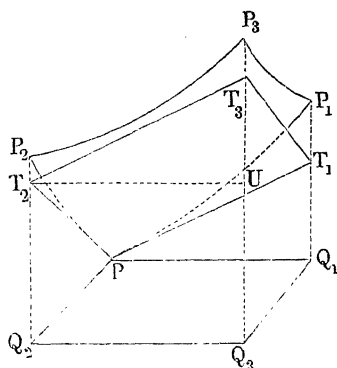
und es liegt hierin der Satz, daß das vollständige Differential einer Funktion gleich ist der Summe ihrer Teildifferentiale.

Fig. 13.

Der geometrische Sinn dieses Resultates erhellt aus folgender Betrachtung. Denkt man sich in der Gleichung $z = f(x, y)$ vorerst y als konstant, so hat man die Gleichung der Kurve PP_1, in welcher die Fläche von der Ebene $PNN_1 \parallel xz$ geschnitten wird, daher ist $\partial z / \partial x$ die trigonometrische Tangente des Winkels $Q_1 P T_1$ (Fig. 13), welchen eine durch P an die Kurve PP_1 gelegte berührende Gerade mit der x-Achse einschließt. Aus ganz ähnlichen Schlüssen folgt, daß $\partial z / \partial y$ die trigonometrische Tangente des Winkels $Q_2 P T_2$ darstellt, welchen die Tangente am Schnitte PP_2 mit der y-Achse bildet. Es gelten daher die Gleichungen

$$Q_1 T_1 = \frac{\partial z}{\partial x} P Q_1, \qquad Q_2 T_2 = \frac{\partial z}{\partial y} P Q_2.$$

Durch die Tangenten PT_1 und PT_2 kann man eine Ebene legen, welche von $P_3 Q_3$ in einem Punkte T_3 geschnitten wird; das Viereck $P T_1 T_3 T_2$ ist dann ein Parallelogramm, und wenn man noch $T_2 U \parallel P Q_1$ zieht, so erhält man die kongruenten Dreiecke $T_2 U T_3$ und $P Q_1 T_1$, mithin $T_3 U = T_1 Q_1$. Dies gibt

$$Q_3 T_3 = T_3 U + U Q_3 = Q_1 T_1 + Q_2 T_2.$$

Nach der Definition der Differentiale gelten nun die Beziehungen

$$Q_1 P_1 = \frac{\partial z}{\partial x} P Q_1, \quad Q_2 P_2 = \frac{\partial z}{\partial y} P Q_2,$$
$$Q_3 P_3 = Q_1 P_1 + Q_2 P_2;$$

diese sind identisch mit den Gleichungen (3), (4) und (9), weil $P Q_1$ mit dx, ebenso $P Q_2$ mit dy bezeichnet werden muß und $Q_1 P_1$, $Q_2 P_2$, $Q_3 P_3$ die entsprechenden Differentiale $\partial_x z$, $\partial_y z$, dz darstellen. Dabei ist klar: je näher die Punkte P_1, P_2, P_3 dem Punkte P liegen, um so eher ist es erlaubt, P_1 und P_2 als Punkte der Tangenten $P T_1$, $P T_2$ und P_3 als einen Punkt der anschließenden Ebene $T_1 P T_2$ zu betrachten. In der Tat wird sich in Kapitel III zeigen, daß diese Ebene die Fläche berührt.

II. Bei Funktionen mehrerer Unabhängiger gestaltet sich die Sache sehr ähnlich; die Stetigkeit wird wie oben definiert, indem nur eine auf die Unabhängige z bezügliche Festsetzung hinzukommt. Die Funktion

$$u = F(x, y, z)$$

erhält den Gesamtzuwachs

$$\Delta u = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\Delta u = \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x$$
$$+ \frac{F(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \Delta y$$
$$+ \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z.$$

Unter Anwendung der Mittelwertformel des § 6 wird hieraus, wenn θ, θ_1 und η positive echte Brüche bezeichnen und die Teilableitungen F'_x, F'_y, F'_z stetig sind,

$$\Delta u = F'_x(x + \theta \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) . \Delta x$$
$$+ F'_y(x, y + \eta \Delta y, z + \Delta z) . \Delta y$$
$$+ F'_z(x, y, z + \theta_1 \Delta z) \Delta z,$$

und wenn ϱ Größen sind, die mit den Größen Δ verschwinden,

$$\Delta u = du + \varrho_1 \Delta x + \varrho_2 \Delta y + \varrho_3 \Delta z,$$

wobei du, das vollständige Differential, durch die Gleichungen

$$(10) \quad du = F'_x(x, y, z) \,.\, dx + F'_y(x, y, z) \,.\, dy + F'_z(x, y, z) \,.\, dz$$

oder

$$(11) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u$$

gegeben wird.

Diese Betrachtungen sind leicht auf beliebig viele Veränderliche auszudehnen und führen zu dem allgemeinen Theorem: Das totale Differential einer Funktion beliebig vieler Unabhängiger ist die Summe ihrer Teildifferentiale.

§ 8. Zusammengesetzte und unentwickelte Funktionen.

I. Ist nach wie vor $z = f(x, y)$, so ist der Zuwachs Δz, wenn x und y die Zuwüchse Δx und Δy erfahren, von der Summe $f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$ um eine Summe $\varrho\Delta x + \varrho_1\Delta y$ verschieden, in der ϱ und ϱ_1 dem Grenzwerte Null zustreben, wenn dies von Δx und Δy gilt, x und y aber festgehalten werden. Nehmen wir nun die Wertsysteme x, y und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ aus der Wertreihe, die durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definiert sind, in denen φ und ψ stetige, mit stetiger Ableitung versehene Funktionen bedeuten, und entspringen die Zuwüchse Δx und Δy daraus, daß t um Δt vermehrt wird, so ist

$$\Delta x = [\varphi'(t) + \varrho_2]\Delta t, \quad \Delta y = [\psi'(t) + \varrho_3]\Delta t$$

und jetzt verschwinden alle vier Größen ϱ mit Δt, so daß im ganzen folgt

$$\Delta z = [f'_x(x, y)\,\varphi'(t) + f'_y(x, y)\,\psi'(t) + \varrho_4]\Delta t,$$

und ϱ_4 hat die Eigenschaft der anderen Größen ϱ. Mit der Unabhängigen t, von der z jetzt Funktion geworden ist, hat man also die Formeln

$$dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy,$$
$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt, \quad dt = \Delta t,$$

von denen die erste die bekannte Gestalt des Differentials dz in neuem Sinne ergibt: die Form dieses Differentials bleibt dieselbe, gleichviel, ob x und y Unabhängige oder Funktionen einer dritten Größe sind. Wir können noch den letzten Formeln folgende beifügen:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt};$$

offenbar gelten entsprechende Formeln auch, wenn z zuerst Funktion beliebig vieler Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist und dann diese von t abhängig gemacht werden:

$$(1) \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n.$$

Diese Formel gibt, was man die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion nennt.

Als Beispiel betrachten wir die allgemeinste homogene Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von der Dimension p, d. h. diejenige, die die Gleichung

$$f(t x_1, t x_2, \ldots, t x_n) = t^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

erfüllt, wie z. B. eine ganze Funktion, deren Glieder in allen $x_1, x_2, \ldots$ zusammen die gemeinsame Gradzahl p aufweisen. Lassen wir die der letzten Gleichung t allein sich ändern, und setzen

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_\nu} = f_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

so finden wir

$$x_1 f_1(t x_1, t x_2, \ldots, t x_n) + x_2 f_2(t x_1, t x_2, \ldots) + \cdots$$
$$= p\, t^{p-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

also, wenn $t = 1$ gesetzt wird,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = p\, f(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

eine der vielen Gleichungen, die als Eulersche bezeichnet werden.

II. Die Formel (1) in der zweiten Form läßt sich noch auf den Fall anwenden, daß die Größen x_ν Funktionen mehrerer Unabhängiger, z. B. t und u sind. Dann gibt jene Formel zunächst

$$d_t z = \frac{\partial z}{\partial x_1} d_t x_1 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} d_t x_n,$$

$$d_u z = \frac{\partial z}{\partial x_1} d_u x_1 + \cdots + \frac{d z}{d x_n} d_u x_n,$$

also, wenn man addiert und die allgemeine Formel $d w = d_t w + d_u w$ anwendet,

$$(2) \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

wobei nun dz, $dx_1, \ldots$ zweigliedrige Differentialausdrücke sind. Setzt man die beiderseits erhaltenen Faktoren von dt und du gleich, so ergibt sich

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}, \\
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u},
\end{aligned}
$$

wobei die Teilableitungen von z rechts und links verschiedene Bedeutung haben; links ist z durch t und u ausgedrückt zu denken, rechts durch $x_1, \ldots, x_n$.

Daß sich die Formel (2) ergibt, die äußerlich mit der Definition des vollständigen Differentials übereinstimmt, zeigt wieder eine gewisse Invarianz des Differentials dz: es behält seine Form, gleichviel, ob die ursprünglichen Unabhängigen $x_1, \ldots, x_n$ als solche bleiben, oder als Funktionen anderer Unabhängiger $t, u, \ldots$ ausgedrückt werden. — Ein weiteres Beispiel sei die Funktion

$$\Phi(t) = f(x_1^0 + t h_1,\ x_2^0 + t h_2,\ \ldots,\ x_n^0 + t h_n),\quad x_\nu = x_\nu^0 + t h_\nu;$$

sie gibt

$$\Phi'(t) = h_1 f_1(x_1^0 + t h_1, \ldots) + \cdots + h_n f_n(x_n^0 + t h_1, \ldots);$$

das ist eine stetige Funktion von t, wenn, wie wir annehmen, f_ν für die betrachteten Werte x_ν stetige Funktionen sind. Alsdann gibt die Mittelwertformel des § 6

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta), \quad 0 < \theta < 1;$$

also folgt eine Mittelwertformel in n Unabhängigen

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
&f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) \\
&\quad = h_1 f_1(x_1^0 + \theta h_1, \ldots, x_n^0 + \theta h_n) + \cdots \\
&\quad + h_n f_n(x_1^0 + \theta h_1, \ldots, x_n^0 + \theta h_n).
\end{aligned}
$$

III. Von den erhaltenen Formeln machen wir zunächst eine besondere Anwendung. Sei y als Funktion von x durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

definiert; dann nennen wir sie unentwickelt oder implizite. Setzen wir $x = t$, $y = \psi(t) = \psi(x)$ und bedenken, daß die Größe $z = f(x, y)$ konstant ist, so folgt

$$\frac{d f(x, y)}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi'(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y},$$

womit die Ableitung der Funktion y durch x und y ausgedrückt wird, obwohl man keinen Ausdruck von y kennt.

Z. B. erfüllt die Funktion $y = \operatorname{arctg} x$ die Gleichung

$$f(x, y) = x - \operatorname{tg} y = 0.$$

Man findet

$$f'_x = 1, \quad f'_y = -\frac{1}{\cos^2 y},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

wie bekannt.

Für $y = \sqrt[n]{x}$ hat man die Gleichung

$$f(x, y) = x - y^n = 0;$$

und da offenbar

$$f'_x = 1, \quad f'_y = -n y^{n-1},$$

so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n y^{n-1}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{n-1}},$$

wie man ebenfalls weiß.

Ist drittens y als Funktion von x durch die Gleichung

$$f(x_1 y) = 4y^3 - 3y + \sin x = 0$$

gegeben, so findet man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 12y^2 - 3, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3(1 - 4y^2)}.$$

Die letzte dieser Formeln bestätigt man, indem man bemerkt, daß die Trigonometrie die Formeln

$$\cos 3A = \cos A (1 - 4 \sin^2 A), \quad \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

liefert, nach denen $y = \sin \frac{1}{3} x$ gesetzt werden kann.

IV. Ähnliches gilt von impliziten oder unentwickelten Funktionen von zwei Unabhängigen, d. h. solchen, die etwa durch eine Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben wird. Läßt man y konstant, so findet man nach obigen Formeln

$$F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},$$

und ebenso, wenn x konstant gesetzt wird,

$$F'_y + F'_x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}.$$

§ 9. Existenz der unentwickelten Funktionen.

In § 8 wurde vorausgesetzt, daß die gegebene Gleichung durch eine stetige mit stetiger Ableitung versehene Funktion erfüllt sei. Etwas schwieriger ist die Frage zu beantworten, ob und wann eine gegebene Gleichung $f(x, y) = 0$ wirklich durch eine Funktion der bezeichneten Art erfüllt wird.

Seien also die Funktionen f, f'_x und f'_y in einem die Stelle x_0, y_0 umfassenden Rechteck $\mathfrak{R}$, auf das wir uns beschränken, stetig und beschränkt; $\mathfrak{R}$ sei etwa durch Ungleichungen

$$|x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b$$

definiert; außerdem sei $f'_y(x_0, y_0)$ von Null verschieden, etwa positiv; dann gilt für das Gebiet $\mathfrak{R}$, wenn dieses nötigenfalls verkleinert wird, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit mit einem festen positiven Wert g die Ungleichung

$$(1) \qquad f'_y(x, y) > g > 0.$$

Ferner sei $f(x_0, y_0) = 0$. Dann nimmt die Größe $f(x_0, y)$ mit y zu; man kann solche Werte y_1 und y_2 festlegen, daß

$$y_0 + b > y_1 > y_0 > y_2 > y_0 - b, \quad f(x_0, y_1) > 0, \quad f(x_0, y_2) < 0.$$

Dann gelten wegen der Stetigkeit die letzten Ungleichungen auch, wenn man x_0 durch x ersetzt und $|x - x_0|$ hinreichend klein nimmt; wird a nötigenfalls verkleinert, darf man für die ganze Strecke $x_0 - a \ldots x_0 + a$ die Ungleichungen

$$f(x, y_1) > 0, \quad f(x, y_2) < 0$$

gelten lassen. Da nun $f(x, y)$ bei festem x eine stetige und monoton wachsende Funktion von y ist, gehört zu jedem Werte x ein bestimmter Wert y, der $f(x, y) = 0$ ergibt, und der Punkt (x, y) liegt immer im Gebiet $\mathfrak{R}$. Hierdurch ist zunächst y als Funktion von x auf der Strecke $x_0 - a \ldots x_0 + a$ eindeutig bestimmt; x_3 sei ein besonderer Wert dieser Strecke, zu dem etwa der Wert y_3 gehöre.

Nun sei ε beliebig klein gegeben; dann gilt der Ungleichung (1) zufolge für alle Werte von y, die eine der Beziehungen

$$y_1 \geqq y \geqq y_3 + \varepsilon, \quad y_3 - \varepsilon \geqq y \geqq y_2$$

darbieten, die erste oder zweite der Ungleichungen

$$f(x_3, y) > g(y - y_3) > g\varepsilon, \quad f(x_3, y) < g\varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit gilt dasselbe auch von $f(x,y)$, sobald $|x-x_3|<\delta$ und die Größe δ passend gewählt ist; sie kann auch als von x_3 unabhängig gelten, wie die Mittelformel

$$(2)\quad f(x,y)-f(x_3,y)=(x-x_3)f'_x[x_3+\theta(x-x_3),y],\quad 0<\theta<1$$

ohne weiteres zeigt, da f'_x unter einer endlichen Schranke liegt. Auf der Strecke $x_3-\delta \ldots x_3+\delta$ liegen also, wenn $f(x,y)=0$, die zugehörigen Werte von $|y-y_3|$ unter ε, womit die Stetigkeit der Funktion y im Sinne unserer früheren Definition nachgewiesen ist auf der Strecke $x_0-a \ldots x_0+a$.

Jetzt ist y leicht auch als differenzierbar zu erkennen. In dem betrachteten Gebiet gelten die Gleichungen

$$0=f(x,y)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)=[f'_x(x,y)+\varrho_1]\Delta x + [f'_y(x,y)+\varrho_2]\Delta y,$$

mit bekannter Bedeutung der Zeichen ϱ_1 also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(x,y)+\varrho_1}{f'_y(x,y)+\varrho_2},$$

und der Nenner ist nach (1) von Null verschieden, sobald $|\Delta x|$ und $|\Delta y|$ hinreichend klein genommen werden; also

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}=\frac{dy}{dx},$$

wie wir unter engeren Voraussetzungen in § 8 bewiesen haben.

In dieser ganzen Betrachtung kann x als Vertreter einer Reihe von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ gelten; man hat, um die Gleichung $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots y)=0$ zur Bestimmung einer impliziten Funktion y zu benutzen, für $\mathfrak{R}$ ein Gebiet zu nehmen, das durch die Ungleichungen

$$|x^{(\nu)}-x_0^{(\nu)}|<a^{(\nu)},\quad |y-y_0|<b,\quad \nu=1,$$

definiert ist, und in ihm die Funktionen

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots y),\quad \frac{\partial f}{\partial x^{(\nu)}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

als stetig, die letzte außerdem als positiv vorauszusetzen, um auch in der Umgebung der Stelle $(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots y_0)$ die Existenz der impliziten Funktion y und die Stetigkeit ihrer Ableitungen nachzuweisen. An Stelle der Gleichung (2) tritt die Mittelwertformel § 8 (4):

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots y)-f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots y)$$
$$=\sum[x^{(\nu)}-x_0^{(\nu)}]f'_{x_\nu}[x_0^{(1)}+\theta(x^{(1)}-x_0^{(1)}), \ldots y].$$

Das Ergebnis der Untersuchung kann in anderer Bezeichnung auch folgendermaßen geformt werden. Sei $F(x, y, z, u, \ldots)$ eine Funktion beliebig vieler Veränderlicher und mit ihren Ableitungen in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, \ldots)$, an der

$$F(x_0, y_0, \ldots) = 0$$

sei, stetig. Dann kann durch die Gleichung

$$F(x, y, \ldots) = 0 \tag{3}$$

eine der Veränderlichen, z. B. x, als Funktion der übrigen definiert werden, wenn die Gleichung ersten Grades

$$F'_x \cdot X + F'_y \cdot Y + \cdots = 0 \tag{4}$$

nach der mit demselben großen Buchstaben bezeichneten Unbekannten aufgelöst werden kann bei der Annahme $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$. Hat in dieser Gleichung einer der Koeffizienten, z. B. F'_x, in der ganzen Umgebung $\mathfrak{R}$ den Wert 1, so ist F von der Form

$$F(x, y, z, \ldots) = x - f(y, z, \ldots),$$

und die Gleichung $F = 0$ gibt x als explizite Funktion.

Hat man noch eine zweite Gleichung

$$G(x, y, z, \ldots) = 0, \tag{5}$$

der die lineare

$$G'_x \cdot X + G'_y \cdot Y + \cdots = 0 \tag{6}$$

entspricht und setzt man $x = \varphi(y, z, \ldots)$ nach (3) ausgerechnet in die Gleichung (5), so erhält man

$$G(x, y, z, \ldots) = \overline{G}(y, z, \ldots),$$

und nach der Regel des § 7 ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -F'_y : F'_x, \quad \frac{\partial \overline{G}}{\partial y} = G'_y + G'_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{G'_y F'_x - G'_x F'_y}{F'_x};$$

Ähnliches gilt, wenn man nach $z, u, \ldots$ differenziert; die Gleichung

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial y} Y + \frac{\partial \overline{G}}{\partial z} Z + \cdots = 0$$

ist also genau diejenige, die man erhält, wenn X aus der Gleichung (4) in die Gleichung (6) einsetzt und damit eliminiert. Dabei ist darauf zu achten, daß nicht etwa aus Gründen der rechnerischen Bequemlichkeit die erhaltene Gleichung mit einem Faktor multipliziert wird; man schreibt also

$$\frac{G'_y F'_x - G'_x F'_y}{F'_x} Y + \frac{G'_z F'_x - G'_x F'_z}{F'_x} Z + \cdots = 0.$$

Ist hier mindestens einer der Koeffizienten an der Stelle $(x_0, y_0, \ldots)$ und damit in einem Gebiet $\mathfrak{R}$ von Null verschieden, so kann man die Gleichung $\overline{G} = 0$ nach mindestens einer der Größen $y, z, \ldots$ auflösen; nur in diesem Falle wollen wir die Elimination von X aus den Gleichungen (4) und (6) als vollzogen betrachten.

Hiernach übersieht man folgendes. Liegen eine beliebige Anzahl von Funktionen $F, G, H, \ldots$ vor, für die dieselben Voraussetzungen wie für F gelten, so hat man entsprechende lineare Gleichungen

$$F'_x . X + F'_y . Y + \cdots = 0, \quad G'_x . X + G'_y Y + \cdots = 0,$$
$$H'_x . X + H'_y Y + \cdots = 0.$$

Leitet man aus diesen durch eine Folge von Eliminationen der bezeichneten Art irgend eine Gleichung

$$M_x . X + M_y . Y + \cdots = 0$$

her, in der eine Anzahl der Größen $X, Y, \ldots$, etwa $U, V, \ldots$, fehlen, so gibt es eine Funktion $\Phi(x, y, \ldots)$, in der die Größen $u, v, \ldots$ fehlen, und die so beschaffen ist, daß die Gleichung

$$\Phi(x, y, \ldots) = 0$$

durch Elimination der Größen $u, v, \ldots$ aus den Gleichungen

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0, \ldots$$

entsteht, und daß die Gleichungen

$$\Phi_x = M_x, \quad \Phi_y = M_y, \ldots$$

gelten. Hat eine dieser Größen M, z. B. M_x, den Wert 1, so erscheint x vermöge der Gleichung $\Phi = 0$, die die Gestalt

$$x - \Phi_0(y, z, \ldots) = 0$$

hat, explizite dargestellt.

Fragt man also, ob man aus den Gleichungen

$$F(x, y, \ldots) = 0, \quad G(x, y, \ldots) = 0, \ldots$$

eine oder einige der in ihnen auftretenden Größen $x, y, \ldots$ als Funktionen der übrigen mittels der Bestimmung impliziter Funktionen explizite darstellen kann, so ist dies dann immer möglich, wenn man die Gleichungen

$$F'_x . X + F'_y . Y + \cdots = 0, \quad G'_x . X + G'_y . Y + \cdots = 0, \ldots$$

nach den entsprechenden Größen $X, Y, \ldots$ auflösen kann; die Auflösung kann man stets durch eine Reihe von Eliminationen der bezeichneten Art vollziehen.

Seien z. B. x und y aus den Gleichungen

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0$$

zu bestimmen; das gelingt, wenn X und Y aus den Gleichungen

$$F'_x . X + F'_y . Y + F'_u . U + F'_v . V = 0, \tag{7}$$

$$G'_x X + G'_y . Y + G'_u U + G'_v . V = 0 \tag{8}$$

bestimmt werden können, wozu ausreicht, daß an der Stelle (x_0, y_0, u_0, v_0) und damit im Gebiet $\mathfrak{R}$ bei passender Beschränkung desselben

$$F'_x G'_y - F'_y G'_x \neq 0 \tag{9}$$

sei. Unter der Annahme (9) ist mindestens eine der Größen F'_x und F'_y, z. B. erstere, von Null verschieden; dann kann man die Gleichung $F = 0$ nach x auflösen, so daß x als Funktion von y, u, v erscheint, und erhält, indem man $G = 0$ setzt, eine Gleichung

$$\overline{G}(y, u, v) = 0, \tag{10}$$

in der die Größen $\overline{G}'_y$, $\overline{G}'_u$, $\overline{G}'_v$ die Koeffizienten von Y, U, V in der Gleichung sind, die man aus der Gleichung (8) erhält, indem man X nach (7) ausrechnet und einsetzt. Der Koeffizient von Y ist dabei $(F'_x G'_y - F'_y G'_x) : F'_x$, also nach (9) von Null verschieden. Man kann daher die Gleichung (10) nach y auflösen, y also durch u und v ausdrücken und in den oben erwähnten Wert von x als Funktion von y, u, v einsetzen, womit x und y als Funktionen von u und v bestimmt sind.

Die Größe (9) heißt die Funktionaldeterminante der Größen F und G nach x und y und wird auch nach

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$$

bezeichnet.

Eine in gewissem Sinne besondere Aufgabe in drei Veränderlichen verlangt, x, y und z aus den Gleichungen

$$F = u - f(x, y, z) = 0, \quad G = v - g(x, y, z) = 0, \tag{11}$$
$$H = w - h(x, y, z) = 0$$

auszurechnen; die entsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} U - f'_x . X - f'_y . Y - f'_z . Z &= 0, \\ V - g'_x . X - g'_y . Y - g'_z . Z &= 0, \\ W - h'_x . X - h'_y . Y - h'_z . Z &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

sind, wie aus den Elementen der Algebra bekannt ist, nach X, Y, Z auflösbar, und zwar durch Eliminationen der bezeichneten Art,

wenn die Determinante der Koeffizienten nicht verschwindet, d. h. die Größe

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = f'_x g'_y h'_z - f'_x g'_z h'_y + f'_y g'_z h'_x - f'_y g'_x h'_z + f'_z g'_x h'_y - f'_z g'_y h'_x.$$

Diese Größe heißt die Funktionaldeterminante der Funktionen f, g, h nach den Unabhängigen x, y, z, und wird auch durch

$$\frac{\partial (f, g, h)}{\partial (x, y, z)}$$

bezeichnet. Ist sie an der Stelle $(x_0, y_0, \ldots)$ und damit in einem Gebiet $\mathfrak{R}$ von Null verschieden, so gilt, wie ihr Bau zeigt, dasselbe von mindestens einer aus den ersten beiden Zeilen gebildeten Determinante zweiter Ordnung, etwa $f'_x g'_y - f'_y g'_x$; dasselbe gilt dann von mindestens einer der Größen f'_x und f'_y, etwa der ersten. Bei dieser Annahme kann man X aus der ersten Gleichung (12) bestimmen und in die zweite einsetzen, aus dieser Y bestimmen und in den vorher erhaltenen Wert von X sowie mit diesem zugleich in die dritte Gleichung (12) einsetzen, die alsdann für Z einen Ausdruck durch U, V, W allein ergibt. Setzt man diesen rückwärts in die vorher erhaltenen Ausdrücke von Y und X, so erhält man alle drei Größen X, Y, Z durch U, V, W ausgedrückt, und die entsprechenden Operationen ergeben x, y, z als stetige Funktionen von u, v, w mit stetigen Ableitungen in einem gewissen Gebiet $\mathfrak{R}$.

Die Formeln (3) des § 7 lehren die Transformation der Funktionaldeterminanten, wenn man neue Unabhängige einführt, etwa x, y durch t und u oder x, y, z durch t, u, v ausdrückt. Durch leichte Rechnung findet man dann

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial (t, u)} = \frac{\partial (F, G)}{\partial (x, y)} \cdot \frac{\partial (x, y)}{\partial (t, u)},$$

$$\frac{\partial (f, g, h)}{\partial (t, u, v)} = \frac{\partial (f, g, h)}{\partial (x, y, z)} \cdot \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (t, u, v)}.$$

Diese Formeln sind auch unmittelbare Anwendungen der Multiplikationsformeln der Determinanten, die sich, wenn man setzt

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1,$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A_1 (B_2 C_3 - B_3 C_2) - A_2 (B_1 C_3 - B_3 C_1) + A_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1),$$

in folgender Weise ausdrücken:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 a_1 + A_2 a_2 & A_1 b_1 + A_2 b_2 \\ B_1 a_1 + B_2 a_2 & B_1 b_1 + B_2 b_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 & A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 & A_1 c_1 + A_2 c_2 + A_3 c_3 \\ B_1 a_1 + B_2 a_2 + B_3 a_3 & B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_3 b_3 & B_1 c_1 + B_2 c_2 + B_3 c_3 \\ C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 & C_1 b_1 + C_2 b_2 + C_3 b_3 & C_1 c_1 + C_2 c_2 + C_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

Von diesen Formeln werden wir auch bei anderen Gelegenheiten Gebrauch machen.

Kapitel II.

Mehrfache Differentiationen.

§ 10. Grundbegriffe und Bezeichnungen.

Da im allgemeinen die Ableitung einer Funktion

$$y = f(x)$$

wiederum eine Funktion von x ist, so kann die Operation des Differenzierens auch auf diese neue Funktion angewendet werden, und dann entsteht die Ableitung der Ableitung, die zweite Ableitung oder der zweite Differentialquotient. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man zum dritten, vierten usw. Differentialquotienten. So erhält man z. B. von $\frac{2}{3} x \sqrt{x}$ als ersten Differentialquotienten:

$$\frac{d\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)}{dx} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x},$$

als zweiten:

$$\frac{d\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

als dritten:

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)}{dx} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \quad \text{usw.}$$

Wie man sieht, hat eine solche fortschreitende Entwicklung der Differentialquotienten höherer Ordnungen nicht die mindeste Schwierigkeit, und es bedarf daher nur noch einiger Worte über die richtige Bezeichnung derselben.

Da schon früher der Differentialquotient oder die Ableitung von $f(x)$ mit $f'(x)$ bezeichnet wurde, so liegt es nahe, für die weiteren Ableitungen von $f(x)$ die Symbole $f''(x)$, $f'''(x)$ usw. zu benutzen; hiernach ist

$$(1) \quad \frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \frac{df'(x)}{dx} = f''(x), \quad \frac{df''(x)}{dx} = f'''(x) \quad \text{usw.,}$$

überhaupt allgemein, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$\frac{d f^{(n-1)}(x)}{d x} = f^{(n)}(x),$$

wobei $f^{(0)}(x)$ für $f(x)$ zu rechnen ist.

Eine ganz ähnliche Bezeichnung wird auch in Beziehung a gebraucht; man setzt dann

$$\frac{d y}{d x} = y', \quad \frac{d y'}{d x} = y'', \quad \frac{d y''}{d x} = y''' \quad \text{usw.},$$

mithin ist

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

das symbolisch ausgedrückte Resultat einer $n$maligen Differentiation der Gleichung (1).

Wenn man, wie schon geschehen, einen Differentialquotienten durch ein vorgesetztes D bezeichnet, z. B.

$$D(x^3) = 3x^2, \qquad D \sin x = \cos x,$$

so müssen die aufeinander folgenden Differentialquotienten von y folgendermaßen geschrieben werden:

$$Dy, \quad DDy, \quad DDDy \quad \text{usw.}$$

Da jedoch ein vielmaliges Hinsetzen von D weder bequem noch übersichtlich ist, so hat man Wiederholungszeiger eingeführt und schreibt

$$Dy \quad D^2 y, \quad D^3 y \quad \text{usw.},$$

also allgemein

$$D^n y = D^n f(x).$$

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, daß hier n keinen Potenzexponenten von D, sondern nur die $n$malige Anwendung der Operation D (der Differentiation) bedeuten soll.

Für manche Zwecke ist es gut, die höheren Ableitungen durch Differentiale auszudrücken, in denen die Wahl der unabhängigen Veränderlichen vorbehalten bleibt. Hat man z. B. $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$ gesetzt und ist t unabhängig, so ist dt als Konstante bei einer Änderung der Größe t anzusehen, also $d(dt) = 0$ oder, wie wir wieder schreiben, $d^2 t = 0$; ferner ist sinngemäß nach (3) zu setzen:

$$d(dx) = d^2 x = d\varphi'(t) \, . \, dt + \varphi'(t) \, d^2 t = \varphi''(t) \, dt^2$$
$$d(dy) = d^2 y = d\psi'(t) \, . \, dt = \psi''(t) \, dt^2,$$

und allgemein, unabhängig von der Wahl der Funktionen φ, ψ

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx \, d^2 y - dy \, d^2 x}{dx^2},$$

und wenn die obige Bedeutung der Größen y', y'' festgehalten wird,

$$d y' = d\left(\frac{d y}{d x}\right) = y'' d x, \qquad y'' = \frac{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x}{d x^3}.$$

Nimmt man x als unabhängig, also $t = x$, so ist $d^2 x = 0$ und man erhält wieder

$$y'' = \frac{d^2 y}{d x^2}.$$

Auf gleiche Weise ergibt sich

$$y''' = \frac{d\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)}{d x} = \frac{d\, d^2 y}{d x \,.\, d x^2} = \frac{d^3 y}{d x^3} \text{ usw.}$$

Für den n^{ten} Differentialquotienten von $y = f(x)$ gelten also folgende Bezeichnungen

$$\frac{d^n y}{d x^n} = D^n y = y^{(n)} = \frac{d^n f(x)}{d x^n} = D^n f(x) = f^{(n)}(x),$$

wovon man in jedem einzelnen Falle die gerade bequemste wählt.

Um den Zusammenhang der Funktion mit ihren höheren Ableitungen zu erkennen, setzen wir

$$(2) \qquad \frac{f(x + h_1) - f(x)}{h_1} = \varphi(x)$$

und finden nach dem Mittelwertsatz, indem durch θ positive echte Brüche bezeichnet werden:

$$\frac{\varphi(x + h_2) - \varphi(x)}{h_2} = \varphi'(x + \theta_2 h_2);$$

die Gleichung (2) gibt aber

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x + h_1) - f'(x)}{h_1} = f''(x + \theta_1 h_1),$$

also

$$(3) \qquad \varphi'(x + \theta_2 h_2) = f''(x + \theta_3 h_1 + \theta_2 h_2) = \frac{\varphi(x + h_2) - \varphi(x)}{h_2}.$$

θ_3 ist für θ_1 gesetzt, da diese Größe von x und h_1 abhängt.

Nun ist aber

$$\frac{\varphi(x + h_2) - \varphi(x)}{h_2} = \frac{f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_2) - f(x + h_1) + f(x)}{h_1 h_2}.$$

Nennen wir diesen Ausdruck Q, so ergibt die Gleichung (3)

$$Q = f''(x + \theta_3 h_1 + \theta_2 h_2);$$

ist also $f''(x)$ stetig, so folgt $\lim Q = f''(x)$, sobald man beide Größen h_1 und h_2, übrigens in beliebiger Weise, unendlich abnehmen läßt. Dabei kann man im besonderen auch $h_1 = h_2$ setzen; dann erhält man

$$Q = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h_2} = \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2},$$

also endlich

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = f''(x).$$

Ähnlich findet man, wenn allgemein $h = \Delta x$ und $\Delta^n F(x) = \Delta[\Delta^{n-1} F(x)]$ gesetzt und angenommen wird, die Funktionen $f(x), f'(x), \ldots f^{(n)}(x)$ seien stetig,

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x).$$

Ist z. B. $f(x) = a^x$, so ergibt sich leicht

$$\Delta a^x = a^x(a^h - 1),$$

$$\Delta^2 a^x = (a^{x+h} - a^x)(a^h - 1) = a^x(a^h - 1)^2, \ldots,$$

$$\frac{\Delta^n a^x}{\Delta x^n} = \frac{a^x(a^h - 1)^n}{h^n},$$

und da $\lim (a^h - 1)/h = \lg a$, folgt

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^n (a^x)}{\Delta x^n} = a^x (\lg a)^n = D_x^n a^x,$$

wie auch durch wiederholtes Differenzieren gefunden wird.

§ 11. Höhere Ableitungen der einfachsten Funktionen.

I. Durch fortgesetzte Anwendung der für die Potenz geltenden Differentiationsregel findet man sehr leicht

$$D(x^\mu) = \mu x^{\mu-1},$$

$$D^2(x^\mu) = \mu(\mu-1) x^{\mu-2},$$

$$D^3(x^\mu) = \mu(\mu-1)(\mu-2) x^{\mu-3},$$

und überhaupt, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$(1) \qquad D^n(x^\mu) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots[\mu-(n-1)]\, x^{\mu-n},$$

wobei immer D für D_x gelten soll.

Auf gleiche Weise kann die Differentiation der allgemeineren Potenz $(a+bx)^\mu$ ausgeführt werden; das Resultat lautet

$$(2) \quad D^n(a+bx)^\mu = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots[\mu-(n-1)]\, b^n (a+bx)^{\mu-n}.$$

Ist μ eine ganze positive Zahl, so wird der μ^{te} Differentialquotient konstant, mithin haben alle folgenden Differentialquotienten den gemeinschaftlichen Wert Null.

Für $\mu = -1$ und für $\mu = -\frac{1}{2}$ ergeben sich nach (2) die häufig vorkommenden spezielleren Formeln

$$D^n \frac{1}{a + bx} = \frac{(-1)^n n! \, . \, b^n}{(a + bx)^{n+1}}, \tag{3}$$

$$D^n \frac{1}{\sqrt{a + bx}} = \frac{(-1)^n 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \ldots (2n - 1) b^n}{2^n (a + bx)^n \sqrt{a + bx}}. \tag{4}$$

II. Bezeichnet M den Modulus des Systems, worin $\log x$ genommen wird, d. h. $1/\lg b$, wenn b die Basis des Systems ist, so hat man

$$D \log x = \frac{M}{x},$$

mithin durch beiderseitige $(n - 1)$malige Differentiation

$$D^n \log x = M D^{n-1} \frac{1}{x}.$$

Der Wert des rechtsstehenden Differentialquotienten läßt sich aus der Formel (3) ableiten, wenn man $a = 0$, $b = 1$ und $n - 1$ für n setzt; man erhält

$$D^n \lg x = M \frac{(-1)^{n-1} (n - 1)!}{x^n}. \tag{5}$$

Auf gleiche Weise gelangt man zu der allgemeineren Formel

$$D^n \log (a + bx) = M \frac{(-1)^{n-1} (n - 1)! \, b^n}{(a + bx)^n}. \tag{6}$$

III. Sehr einfach gestaltet sich die fortschreitende Differentiation der Exponentialgröße; es ist nämlich

$$D a^x = a^x \lg a, \quad D^2 a^x = a^x (\lg a)^2, \quad D^3 a^x = a^x (\lg a)^3, \ldots$$

daher allgemein

$$D^n a^x = a^x (\lg a)^n. \tag{7}$$

Für $a = e^\beta$, woraus $\lg a = \beta$ folgt, hat man

$$D^n e^{\beta x} = \beta^n e^{\beta x}. \tag{8}$$

IV. In Beziehung auf den Sinus gelten folgende unmittelbar verständliche Gleichungen:

$$\begin{aligned}
D \sin x &= + \cos x = \sin (\tfrac{1}{2} \pi + x), \\
D^2 \sin x &= - \sin x = \sin (\tfrac{2}{2} \pi + x), \\
D^3 \sin x &= - \cos x = \sin (\tfrac{3}{2} \pi + x), \\
D^4 \sin x &= + \sin x = \sin (\tfrac{4}{2} \pi + x) \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Formel lautet demgemäß

$$(9) \qquad D^n \sin x = \sin\left(\frac{n}{2}\pi + x\right).$$

Für den Kosinus gilt eine sehr ähnliche Rechnung, aus der man findet

$$(10) \qquad D^n \cos x = \cos\left(\frac{n}{2}\pi + x\right).$$

Weit verwickelter gestalten sich die höheren Ableitungen von $\sec x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$, $\arcsin x$ und $\operatorname{arctg} x$; bevor wir etwas Genaueres darüber angeben können, müssen wir erst die Ableitungen zusammengesetzer Funktionen untersuchen.

§ 12. Die höheren Ableitungen zusammengesetzter Funktionen.

I. Sind u und v Funktionen der Unabhängigen x, ferner a und b Festwerte, so hat man nach § 3

$$D(au + bv) = aDu + bDv;$$

hieraus folgt, wenn beiderseits weiter differenziert wird,

$$D^2(au + bv) = aD^2u + bD^2v,$$
$$D^3(au + bv) = aD^2u + bD^3v,$$

und allgemein

$$(1) \qquad D^n(au + bv) = aD^nu + bD^nv.$$

Nach dieser Regel ist z. B. der Ausdruck $1/(1 - x^2)$ sehr leicht zu differenzieren, wenn man die identische Gleichung

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}\right\}$$

beachtet; mit Hilfe von Formel (3) des vorigen Paragraphen erhält man nämlich

$$D^n \frac{1}{1 - x^2} = 3 . 4 \ldots n \left\{\frac{1}{(1 - x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1 + x)^{n+1}}\right\}.$$

II. Die Regel für die Differentiation eines Produktes aus zwei veränderlichen Faktoren liefert, mehrmals angewendet, folgende Gleichungen

$$D(uv) = u . Dv + Du . v$$
$$D^2(uv) = u . D^2v + 2Du . Dv + D^2u . v$$
$$D^3(uv) = u . D^3v + 3Du . D^2v + 3D^2u . Dv + D^3u . v.$$

Hieraus ersieht man, daß die n^{te} Ableitung folgende Gestalt besitzen muß

$$(2)\quad D^n(uv) = A_0 u \,.\, D^n v + A_1 Du \,.\, D^{n-1} v + A_2 D^2 u \,.\, D^{n-2} v + \cdots$$
$$\cdots + A_{n-1} D^{n-1} u \,.\, Dv + A_n D^n u \,.\, v,$$

worin $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ gewisse noch unbekannte Zahlenkoeffizienten bedeuten, die nicht von der Natur der Funktionen u und v, sondern nur von der Anzahl der ausgeführten Differentiationen, d. h. von n abhängen. Wählt man demnach u und v im besonderen so, daß die beiderseits in der Gleichung (2) angedeuteten Differentiationen auf gewöhnlichem Wege ausführbar sind, so erhält man eine Bedingungsgleichung für jene Koeffizienten. Diese Bemerkung dient zur Bestimmung von $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Wir setzen nämlich

$$u = e^{\beta x}, \quad v = e^x, \text{ mithin } uv = e^{(1+\beta)x},$$

woraus für ganze positive p, q und n folgt

$$D^p u = \beta^p e^{\beta x}, \qquad D^q v = e^x, \qquad D^n(uv) = (1+\beta)^n e^{(1+\beta)x};$$

indem wir diese Werte für die Gleichung (2) benutzen und am Ende den beiderseits gemeinschaftlichen Faktor $e^{\beta x} e^x = e^{(1+\beta)x}$ weglassen, gelangen wir zu der Gleichung

$$(1+\beta)^n = A_0 + A_1\beta + A_2\beta^2 + \cdots + A_{n-1}\beta^{n-1} + A_n\beta^n.$$

Hieraus erkennt man sofort, daß die Koeffizienten A_0, A_1, A_2 usw. die Binomialkoeffizienten des Exponenten n sind; demzufolge gilt für die n-malige Differentiation eines aus zwei variablen Faktoren bestehenden Produktes die Leibnizsche Formel

$$(3)\quad D^n(uv) = \binom{n}{0} u \,.\, D^n v + \binom{n}{1} Du \,.\, D^{n-1} v$$
$$+ \binom{n}{2} D^2 u \,.\, D^{n-2} v + \cdots$$

Man kann dafür auch schreiben

$$(4)\quad D^n(uv) = \binom{n}{0} u^{(0)} v^{(n)} + \binom{n}{1} u' v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u'' v^{(n-2)} + \cdots,$$

wobei $u^{(0)}$ für u zu rechnen ist. Die rechte Seite hat die Form des binomischen Satzes, und man könnte daher symbolisch schreiben

$$D^n(uv) = (u+v)^{(n)};$$

nur muß man sich in diesem Falle erinnern, daß nach geschehener binomischer Entwicklung auf der rechten Seite jeder Potenzexponent durch einen gleichhohen Wiederholungszeiger zu ersetzen ist.

Beispielsweise sei $u = \lg x$, $v = \frac{1}{x}$; die Formel (3) gibt dann nach gehöriger Reduktion

$$D^n\left(\frac{\lg x}{x}\right) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\lg x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right].$$

§ 13. Anwendungen der vorigen allgemeinen Formeln.

I. Bezeichnet man $\sec x$ kurz mit v, so ist identisch

$$\cos x \,.\, v = 1, \tag{1}$$

mithin durch n-malige Differentiation, wobei die Formel (4) des § 12 für $u = \cos x$ in Anspruch genommen wird,

$$\begin{aligned}&\binom{n}{0}\cos x \,.\, v^{(n)} - \binom{n}{2}\cos x \,.\, v^{(n-2)} + \binom{n}{4}\cos x \,.\, v^{(n-4)} - \cdots\\ &-\binom{n}{1}\sin x \,.\, v^{(n-1)} + \binom{n}{3}\sin x \,.\, v^{(n-3)} - \binom{n}{5}\sin x \,.\, v^{(n-5)} + \cdots = 0;\end{aligned}$$

hieraus folgt, indem man $v^{(n)}$ als Unbekannte ansieht,

$$\begin{aligned}v^{(n)} = &\left[\binom{n}{1}v^{(n-1)} - \binom{n}{3}v^{(n-3)} + \binom{n}{5}v^{(n-5)} - \cdots\right]\operatorname{tg} x\\ &+ \binom{n}{2}v^{(n-2)} - \binom{n}{4}v^{(n-4)} + \binom{n}{6}v^{(n-6)} - \cdots\end{aligned} \tag{2}$$

Da man $v^{(0)} = \sec x$ und $v' = \sec x \,.\, \operatorname{tg} x$ kennt, so dient diese Gleichung, wenn der Reihe nach $n = 2, 3, 4$ usw. genommen wird, zur fortschreitenden Berechnung von v'', v''' usw. Doch würde es nicht leicht sein, auf diesem Wege das allgemeine Bildungsgesetz von $v^{(n)}$ zu entdecken.

II. Dasselbe Verfahren paßt auf die trigonometrische Tangente. Aus $v = \operatorname{tg} x$ folgt nämlich

$$\cos x \,.\, v = \sin x \tag{3}$$

und nach der obigen Methode

$$\begin{aligned}v^{(n)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\pi + x\right)}{\cos x} &+ \left[\binom{n}{1}v^{(n-1)} - \binom{n}{3}v^{(n-3)} + \cdots\right]\operatorname{tg} x\\ &+ \binom{n}{2}v^{(n-2)} - \binom{n}{4}v^{(n-4)} + \cdots\end{aligned} \tag{4}$$

Die Kosekante und die Kotangente liefern ähnliche Formeln, deren Entwicklung dem Leser überlassen bleiben möge.

III. Setzt man

$$U = \arcsin x, \tag{5}$$

so wird

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad U'' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

statt der letzten Gleichung kann man schreiben

$$(1-x^2)\,U'' - x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

oder

$$(1-x^2)\,U'' - x\,U' = 0.$$

Durch n-malige Differentiation dieser Gleichung ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\binom{n}{0}(1-x^2)\,U^{(n+2)} - \binom{n}{1}2\,x\,U^{(n+1)} - \binom{n}{2}2\,U^{(n)} \\ &\qquad - \binom{n}{0}x\,U^{(n+1)} - \binom{n}{1}.\,1\,U^{(n)} \end{aligned}\right\} = 0,$$

oder, wenn $U^{(n+2)}$ als Unbekannte angesehen wird,

$$U^{(n+2)} = \frac{(2n+1)\,x\,U^{(n+1)} + n^2\,U^{(n)}}{1-x^2}. \tag{6}$$

Von U' und U'' ausgehend, erhält man jetzt U''', U^{IV} usw., indem man der Reihe nach $n = 1, 2, 3$ usw. setzt.

Übrigens kann man irgend einen höheren Differentialquotienten von $U = \arcsin x$ auch direkt vollständig entwickeln, nur ist dann die Formel weniger einfach. Man hat nämlich

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Hier läßt sich, wenn beiderseits n-mal differenziert wird, rechter Hand zuerst die Formel (4) in § 12 anwenden und nachher jeder Differentialquotient von u oder v nach Formel (4) in § 11 entwickeln. Nach einigen, von selbst sich darbietenden Reduktionen gelangt man zu folgender Formel

$$\begin{aligned} D^{n+1}\arcsin x = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}}\Bigg\{1 &- \frac{1}{2n-1}\binom{n}{1}\frac{1-x}{1+x} \\ &+ \frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)}\binom{n}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \\ &- \frac{1.3.5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\binom{n}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \cdots\Bigg\}; \end{aligned} \tag{7}$$

das letzte Glied in der großen Klammer ist $(-1)^n(1-x)^n/(1+x)^n$.

IV. Setzen wir

$$V = \operatorname{arctg} x, \tag{8}$$

so ist

$$V' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (1+x^2)\,V' = 1;$$

durch n-malige Differentiation der letzten Gleichung erhalten wir

$$\binom{n}{0}(1+x^2)\,V^{(n+1)} + \binom{n}{1}\,2x\,V^{(n)} + \binom{n}{2}\,2.1\,V^{(n-1)} = 0$$

oder

$$V^{(n+1)} = -\frac{2nx\,V^{(n)} + n(n-1)\,V^{(n-1)}}{1+x^2}. \tag{9}$$

Für $n = 1, 2, 3$ usw. ergeben sich hieraus die Differentialquotienten V'', V''' usw.

Auch hier kann $V^{(n)} = D^n \operatorname{arctg} x$ noch auf andere Weise direkt entwickelt werden. Da nämlich aus der Gleichung (8)

$$x = \operatorname{tg} V, \quad \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 V$$

folgt, so läßt sich die erste Ableitung in der Form

$$D V = \cos^2 V \tag{10}$$

darstellen; die Ableitung hiervon ist

$$D^2 V = 2\cos V . D\cos V = -2\cos V \sin V . D V$$

oder, wenn statt DV wieder der vorige Wert gesetzt wird,

$$D^2 V = -2\cos^3 V \sin V = -\cos^2 V \sin 2V.$$

Eine fernere Differentiation gibt

$$\begin{aligned} D^3 V &= -2(\cos^2 V \cos 2V - \cos V \sin V \sin 2V)\,DV \\ &= -2\cos^3 V(\cos V \cos 2V - \sin V \sin 2V) \\ &= -2\cos^3 V \cos 3V; \end{aligned}$$

differenziert man von neuem, so folgt

$$\begin{aligned} D^4 V &= +2.3(\cos^3 V \sin 3V + \cos^2 V \sin V \cos 3V)\,DV \\ &= +2.3\cos^4 V(\cos V \sin 3V + \sin V \cos 3V) \\ &= +2.3\cos^4 V \sin 4V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^5 V &= +2.3.4(\cos^4 V \cos 4V - \cos^3 V \sin V \sin 4V)\,DV \\ &= +2.3.4\cos^5 V(\cos V \cos 4V - \sin V \sin 4V) \\ &= +2.3.4\cos^5 V \cos 5V. \end{aligned}$$

Den weiteren Gang dieser sehr einförmigen Rechnung übersieht man leicht; es ist daher

$$(11)\qquad D^{2k} V = (-1)^k (2k-1)! \cos^{2k} V \sin 2kV,$$

$$(12)\qquad D^{2k+1} V = (-1)^k (2k)! \cos^{2k+1} V \cos(2k+1) V.$$

Beide Formeln lassen sich in eine einzige zusammenziehen, und man vermeidet damit die Unbequemlichkeit, bei der Angabe von $D^n V$ die Fälle eines geraden und eines ungeraden n unterscheiden zu müssen. Setzt man nämlich

$$W = \operatorname{arctg}\frac{1}{x},$$

so ist $V = \frac{1}{2}\pi - W$, mithin

$$\sin 2kV = \sin(k\pi - 2kW) = (-1)^{k+1} \sin 2kW,$$

$$\cos(2k+1)V = \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi - (2+1)W\right) = (-1)^k \sin(2k+1)W,$$

und die Formeln (11) und (12) werden jetzt

$$D^{2k} V = -(2k-1)! \sin^{2k} W \sin 2kW,$$

$$D^{2k+1} V = +(2k)! \sin^{2k+1} W \sin(2k+1)W,$$

d. i. überhaupt

$$D^n V = (-1)^{n-1} (n-1)! \sin^n W \sin nW.$$

Setzt man endlich die Werte von V und W wieder ein, indem man berücksichtigt, daß

$$\sin W = \cos V = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist, so gelangt man zu folgender Formel

$$(13)\qquad D^n \operatorname{arctg} x = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{(1+x^2)^n}} \sin\left(n \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right).$$

§ 14. Wiederholte Differentiation der Funktionen mehrerer Unabhängiger.

Die wiederholte Differentiation einer Funktion mehrerer Unabhängiger kann entweder teilweise nach der einen oder anderen Veränderlichen geschehen, oder total in Beziehung auf alle Unabhängigen zugleich; die Untersuchung trennt sich daher wie früher (§ 7) in zwei Teile.

I. Wird eine Funktion

$$(1)\qquad z = f(x, y)$$

zuerst teilweise nach x und die entstandene Ableitung teilweise nach y differenziert, so entsteht der zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\partial y},$$

welchen man kürzer mit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

oder auch mit

$$D_y D_x z = D_y D_x f(x, y) = D^2_{yx} f(x, y)$$

bezeichnet; durch die Stellung von ∂y und ∂x oder von D_y und D_x gibt man gleichzeitig die Reihenfolge der Differentiationen zu erkennen, wobei immer von rechts nach links zu lesen ist. Dementsprechend bedeutet

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad = D^2_{xy} f(x, y), \quad D_x D_y z = D_x D_y f(x, y),$$

daß die Gleichung (1) zuerst partiell oder teilweise y und das erhaltene Ergebnis teilweise nach x differenziert worden ist.

Bei der Ausrechnung beliebig gewählter Sonderfälle bemerkt man, daß $D_y D_x z = D_x D_y z$ ist; es entsteht daher die Frage, ob diese Gleichung allgemein und unter welchen Bedingungen sie gilt. Hierüber läßt sich auf folgende Weise entscheiden, wobei zur Abkürzung sein möge

$$(2) \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \varphi(x, y), \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \psi(x, y),$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \varphi'(x, y), \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \psi'(x, y).$$

Wir betrachten zuerst den Ausdruck

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

als Funktion von y allein und bilden die Differenz desselben, indem wir $y + \Delta y$ an die Stelle von y treten lassen und den geänderten Ausdruck um den ungeänderten Ausdruck vermindern. Auf die so entstehende Differenz

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)]$$

ist nun der Mittelwertsatz des § 6 anwendbar, welchem wir für diesen Zweck die folgende Gestalt geben

$$F(y + \Delta y) - F(y) = \Delta y \,.\, F'(y + \varkappa \Delta y), \quad 0 < \varkappa < 1;$$

wir erhalten hier, wo $F(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, mithin

$$F'(y) = \frac{\partial f(x+\Delta x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y)$$

zu setzen ist,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y)$$
$$= \Delta y [\psi(x + \Delta x, y + \varkappa \Delta y) - \psi(x, y + \varkappa \Delta y)].$$

Der auf der rechten Seite in Klammern stehende Ausdruck ist ganz ebenso gebildet wie die Differenz $\psi(x + \Delta x, b) - \psi(x, b)$, wenn man sich b als konstant, und zwar $= y + \varkappa \Delta y$ denkt. Durch Anwendung des schon vorhin benutzten Satzes oder

$$\psi(x+\Delta x, b) - \psi(x, b) = \Delta x \,.\, \psi'(x + \lambda \Delta x, b), \qquad 0 < \lambda < 1,$$

folgt nun aus dem unmittelbar Vorhergehenden

$$(3) \quad \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta x \, \Delta y}$$
$$= \psi'(x + \lambda \Delta x, y + \varkappa \Delta y).$$

Betrachtet man zweitens den Ausdruck

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

als Funktion von x und bildet die Differenz desselben in Beziehung auf x, so entsteht

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)];$$

hier läßt sich der Satz

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta x \,.\, F'(x + \mu \Delta x), \qquad 0 < \mu < 1,$$

anwenden, wenn man $F(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$, mithin

$$F'(x) = \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \qquad \varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x\ y)$$

setzt; dies gibt

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y)$$
$$= \Delta x [\varphi(x + \mu \Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x + \mu \Delta x, y)].$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist ebenso gebildet wie die Differenz $\varphi(a, y+\Delta y) - \varphi(a, y)$, wenn man sich a konstant $= x + \mu \Delta x$ gesetzt denkt; wegen

$$\varphi(a, y+\Delta y) - \varphi(a, y) = \Delta y \,.\, \varphi'(a, y + \nu \Delta y), \qquad 0 < \nu < 1,$$

folgt nun

$$(4) \quad \frac{f(x+\Delta x, y \Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y)}{\Delta x \, \Delta y}$$
$$= \varphi'(x + \mu \Delta x, y + \nu \Delta y).$$

Die linken Seiten der Gleichungen (3) und (4) sind identisch, mithin ist auch

$$\psi'(x + \lambda \varDelta x, y + \varkappa \varDelta y) = \varphi'(x + \mu \varDelta x, y + \nu \varDelta y).$$

Läßt man die bisher willkürlichen Zunahmen $\varDelta x$ und $\varDelta y$ gegen die Null konvergieren, so erhält man

$$\psi'(x, y) = \varphi'(x, y),$$

d. h. vermöge der Bedeutungen von $\psi'(x, y)$ und $\varphi'(x, y)$

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Damit ist der fragliche Satz bewiesen, jedoch nur unter bestimmten Voraussetzungen. Die mehrfach benutzte Formel

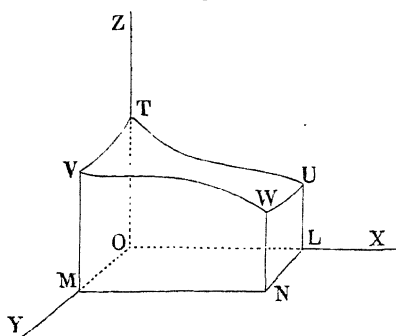
$$F(u + h) - F(u) = hF'(u + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1$$

gilt nämlich nur dann, wenn $F(u)$ überhaupt einen Differentialquotienten $F'(u)$ besitzt und wenn $F(u)$ und $F'(u)$ endlich und stetig bleiben, während u bis $u + h$ anwächst. Im vorliegenden Falle folgt hieraus, daß x und y keine solchen Werte erhalten dürfen, für welche die eine oder andere der Funktionen

Fig. 14.

$$f(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y},$$

die Existenz der drei letzten vorausgesetzt, aufhört, stetig zu sein.

Man kann diesem Theoreme eine sehr anschauliche Seite abgewinnen, wenn man sich z als das Volumen denkt, welches unterhalb von einem beliebigen Rechteck aus den Seiten $OL = x$ und $OM = y$ (Fig. 14), seitwärts von den vier auf OL, LN, NM, MO errichteten Vertikalebenen, und von oben durch irgend eine Fläche begrenzt wird; es ist dann in der Tat z eine Funktion von x und y; verzichten wir einmal auf volle Strenge, so können wir sagen: vermehren wir x um den kleinen Zuwachs dx, so vermehrt sich das Volumen z um eine dünne Platte, die annähernd als Zylinder mit der Grundfläche $LNWU$ und der Höhe dx betrachtet werden kann.

Anderseits ist jene Platte annähernd

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx;$$

somit folgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{Fläche } LNWU.$$

Ebenso wächst die Fläche $LNWU$ um einen nahezu rechteckigen Streifen von der Höhe NW und der Breite dy, wenn LN oder y um dy wächst; daraus folgt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial (LNWU)}{\partial y} = NW;$$

anderseits erhält man ebenso

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \text{Fläche } MNWV, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial (MNWV)}{\partial x} = NW,$$

was mit dem vorigen übereinstimmt.

Sind beliebig viele Differentiationen nach ebenso vielen Unabhängigen auszuführen, so lassen sich nach dem vorigen immer je zwei aufeinander folgende Differentiationen vertauschen; auf diese Weise kann man jede beliebige Anordnung der Differentiationen herbeiführen, ohne daß das Resultat eine Änderung erleidet.

II. Mittels des vorigen lassen sich die höheren totalen Differentiale einer Funktion leicht entwickeln; man hat nämlich zunächst bei zwei Veränderlichen

$$dz = \frac{\partial z}{\partial y} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy; \tag{6}$$

da dx und dy als Zuwüchse der Unabhängigen x und y beliebig, also von x und y selbst unabhängig sind, so findet man, indem man in der Formel (6) die Größe z durch dz ersetzt,

$$d^2 z = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} dx\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} dy$$
$$+ \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right)}{\partial y} dy;$$

dies ist soviel als

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy\, dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (5)

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{7}$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens findet sich

$$\begin{aligned} d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 x}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy \\ + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3, \end{aligned} \tag{8}$$

und wenn man beachtet, daß die hier vorkommenden Zahlenkoeffizienten durch dieselbe fortschreitende Addition wie in § 12, II. entstehen, so erkennt man als allgemeines Gesetz:

$$\begin{aligned} d^n z = \binom{n}{0} \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy \\ + \binom{n}{2} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \cdots + \binom{n}{n} \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n. \end{aligned} \tag{9}$$

Kürzer schreibt man dafür in symbolischer Form

$$d^n z = \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy\right)^n \partial^n z. \tag{10}$$

Bei drei Veränderlichen, wenn z. B. u eine Funktion von x, y und z bedeutet, erhält man auf gleiche Weise:

$$d^n u = \left(\frac{1}{\partial x} \partial x + \frac{1}{\partial y} dy + \frac{1}{\partial z} dz\right)^n \partial^n u, \tag{11}$$

und man übersieht auf der Stelle, wie sich die Sache bei mehreren Unabhängigen gestaltet.

Diese Formeln setzen, wie gesagt, wesentlich voraus, daß x, y, z unabhängige Veränderliche sind. Sind sie dagegen Funktionen anderer Größen, so verschwinden die Größen $d^2 x$, $d^2 y$, ... nicht immer, und man hat, wenn z. B. $u = f(x, y)$, zu setzen

$$\begin{aligned} d^2 u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\,dy \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2 y; \end{aligned}$$

die Formel kann angewandt werden, wenn $x = \varphi(v, w)$, $y = \psi(v, w)$ gesetzt wird mit unabhängigen v, w; damit erhält man

$$d^2 x = \varphi''_{uu} du^2 + 2\,\varphi''_{uv} du\,dv + \varphi''_{vv} dv^2, \quad dx = \varphi'_u du + \varphi'_v dv;$$

ähnliche Ausdrücke gelten für dy und $d^2 y$, und das Differential $d^2 u$ erscheint als homogene Funktion zweiten Grades in du und dv; die

Striche am Funktionszeichen werden, entsprechend ihrer Bedeutung bei Funktionen einer einzigen Unabhängigen, durch die Gleichungen

$$\varphi''_{uu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \quad \varphi''_{uv} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \quad \text{usf.}$$

erklärt.

§ 15. Höhere Ableitungen unentwickelter Funktionen.

I. Eine Anwendung finden diese Ergebnisse bei der Aufgabe, die höheren Ableitungen impliziter Funktionen zu finden. Gilt z. B. die Gleichung $f(x, y) = 0$, wobei x und y Funktionen von t sind, so findet man

$$d f = 0, \quad d^2 f = 0,$$

$$d^2 f = f''_{xx} d x^2 + 2 f''_{xy} d x d y + f''_{yy} d y^2 + f'_x d^2 x + f'_y d^2 y;$$

wenn also im besonderen $x = t$, $d^2 x = 0$, also x als Unabhängige genommen wird

$$0 = f''_{xx} + 2 f''_{xy} \frac{d y}{d x} + f''_{yy} \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + f'_y \frac{d^2 y}{d x^2};$$

die Größe

$$\frac{d y}{d x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

ist ja, der Gleichung $d f = 0$ gemäß, bekannt. Setzt man $d^3 f = 0$ an, so findet man

$$\begin{aligned} 0 = & f'''_{xxx} d x^3 + 3 f'''_{xxy} d x^2 d y + 3 f'''_{xyy} d x d y^2 + f'''_{yyy} d y^3 \\ & + 3 f''_{xx} d x d^2 x + 3 f''_{xy} (d x d^2 y + d y d^2 x) + 3 f''_{yy} d y d^2 y \\ & + f'_x d^3 x + f'_y d^3 y, \end{aligned}$$

also wenn $d^2 x = d^3 x = 0$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} 0 = & f'''_{xxx} + 3 f'''_{xxy} \cdot y' + 3 f'''_{xyy} \cdot y'^2 + f'''_{yyy} y'^3 \\ & + 3 f''_{xy} \cdot y'' + 3 f''_{yy} \cdot y' y'' + f'_y \cdot y'''. \end{aligned}$$

Nimmt man im besonderen $f = x - \varphi(y)$, so findet man z. B.

$$d^2 f = d^2 x - \varphi'(y) d^2 y - \varphi''(y) d y^2 = 0,$$

also wenn $d^2 x = 0$,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)^3} \tag{1}$$

oder

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{d^2 x}{d y^2} : \left(\frac{d x}{d y}\right)^3, \quad D_x^2 y = -D_y^2 x : (D_y x)^3,$$

wobei freilich in der ersten Gleichung links $d^2 x = 0$, rechts $d^2 y = 0$ vorausgesetzt wird. Ebenso ergibt sich mit $d^2 x = 0$

$$0 = d^3 f = -\varphi'(y)\, d^3 y - 3\, \varphi''(y)\, d y\, d^2 y - \varphi'''(y)\, d y^3,$$

oder nach (1)

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{3\, \varphi''(y)^2 - \varphi(y)\, \varphi'''(y)}{\varphi'(y)^5} = \left[3\left(\frac{d^2 x}{d y^2}\right)^2 - \frac{d x}{d y}\frac{d^3 x}{d y^3}\right] : \left(\frac{d x}{d y}\right)^5.$$

Diese Formeln zeigen, wie man zweite und dritte Ableitungen bildet, indem man die Rollen von x und y als Unabhängige und Funktion vertauscht.

II. Über Rechnungen mit Differentialen, in denen ein oder mehrere unabhängige Differentiale stecken, ist im allgemeinen folgendes zu bemerken. Jedes Differential n^{ter} Ordnung ist, wie ein Blick auf die vorhergehenden Formeln zeigt, in dem Buchstaben d homogen von n^{ter} Ordnung, d. h., rechnet man alle Zeiger des Buchstabens d zusammen wie Potenzexponenten, so erhält man in allen Gliedern dieselbe, die n^{te} Scheinpotenz von d. Bringt man alles auf die unabhängigen Differentiale, so erhält man ein in diesen homogenes Polynom von der Dimension n. Bildet man daher eine Summe von Produkten von Differentialen beliebiger Ordnung und achtet darauf, daß in allen Produkten der Buchstabe d in gleicher, etwa der n^{ten} Vielfachheit erscheint, so ist die Summe ebenfalls in den unabhängigen Differentialen ein homogenes Polynom von der Dimension n. Gleichungen zwischen solchen Polynomen können bei der Willkürlichkeit der unabhängigen Differentiale sofort in eine Anzahl von Gleichungen zwischen bestimmten endlichen Größen zerlegt werden. Wenn man allgemeine homogene Funktionen der unabhängigen Differentiale, und zwar Funktionen derselben Dimension einander gleich setzt, bekommt man eine Gleichung, die außer bestimmten endlichen Größen noch die Verhältnisse der unabhängigen Differentiale, also eine Anzahl willkürlicher Größen, enthält und daher im allgemeinen nach Umformung in ein System von diesen willkürlichen Größen unabhängiger Gleichungen umgewandelt werden kann. So bedeutet die Gleichung

$$(2) \qquad d s = \sqrt{d x^2 + d y^2},$$

der wir später oft begegnen werden, wenn x, y, s Funktionen der einen Unabhängigen t sind und $d x / d t = x'$ usw. gesetzt wird, die bestimmte Gleichung

$$\overline{\quad + y'^2}$$

Sind x und y Funktionen der Unabhängigen u und v und setzt man $\partial x/\partial u = x'_u$ usw., so ergibt die Gleichung (2)

$$(3) \qquad ds = \sqrt{(x'_u\,du + x'_v\,dv)^2 + (y'_u\,du + y'_v\,dv)^2}.$$

Kennt man anderseits die Formel

$$(4) \qquad ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

in der E, F, G Funktionen von u und v sind, so ergeben die Gleichungen (3) und (4), indem man quadriert und die Faktoren gleicher Potenzen und Produkte von du und dv vergleicht,

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2, \quad G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2, \quad F = x'_u x'_v + y'_u y'_v.$$

Hier sieht man, wie eine Gleichung zwischen Differentialen, die Gleichheit der Ausdrücke (3) und (4), eine Schar von Gleichungen in übersichtlicher Weise zusammenfassen kann.

§ 16. Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren aufeinander folgenden Ableitungen.

Sowie in § 6 Gleichungen zwischen einer Funktion und ihrem ersten Differentialquotienten abgeleitet wurden, so lassen sich auch allgemeinere Formeln entwickeln, in denen außer einer gegebenen Funktion noch beliebig viele ihrer Differentialquotienten vorkommen. Man gelangt hierzu auf folgendem Wege.

Analog der Gleichung

$$(1) \qquad f(b) = f(a) + (b-a)f'[a + \vartheta(b-a)], \quad 0 < \vartheta < 1,$$

ist auch unter den gehörigen Bedingungen

$$f'(c) = f'(a) + (c-a)f''[a + \varepsilon(c-a)], \quad 0 < \varepsilon < 1;$$

nimmt man $c = a + \vartheta(b-a)$, substituiert nachher den Wert von $f'(c)$ in die vorhergehende Gleichung und bezeichnet $\vartheta\varepsilon$ kurz mit ϑ_1, so erhält man die neue Formel

$$(2) \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \vartheta(b-a)^2 f''[a + \vartheta_1(b-a)].$$

Im letzten Summanden kommen zwei positive echte Brüche ϑ und ϑ_1 vor, deren Werte man nicht näher kennt; um diesen Übelstand zu vermeiden, suchen wir den Betrag der Summe

$$f(a) + (b-a)f'(a)$$

auf anderem Wege zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sei

$$(3) \qquad \varphi(x) = f(x) + (b-x)f'(x);$$

es ist dann einerseits

$$(4) \qquad \varphi(a) = f(a) + (b-a) f'(a), \quad \varphi(b) = f(b),$$

anderseits durch Differentiation der Gleichung (3)

$$(5) \qquad \varphi'(x) = (b-x) f''(x).$$

Hier läßt sich die bekannte Formel [§ 6 (6)]

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \frac{b-a}{p(1-\theta)^{p-1}} \varphi'[a + \theta(b-a)]$$

anwenden, indem man nach (4) die Werte von $\varphi(b)$ und $\varphi(a)$ und nach (5)

$$\varphi'[a + \theta(b-a)] = (1-\theta)(b-a) f''[a + \theta(b-a)]$$

einsetzt; man gelangt sofort zu der Gleichung

$$(6) \quad f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{p(1-\theta)^{p-2}} f''[a + \theta(b-a)],$$

welche genauer als die frühere (2) ist, insofern sie nur den einen positiven echten Bruch θ enthält. Etwas einfacher wird die Formel (6) für $p = 2$, nämlich

$$(7) \quad f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 f''[a + \theta(b-a)].$$

Übrigens gelten diese Resultate nur unter der Voraussetzung, daß $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$, mithin auch $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ stetig und endlich bleiben von $x = a$ bis $x = b$.

Das soeben benutzte Verfahren läßt sich wieder auf die Formel (7) anwenden; man hat nämlich, unter ε einen positiven echten Bruch verstanden,

$$f''(c) = f''(a) + (c-a) f'''[a + \varepsilon(c-a)],$$

mithin, wenn

$$c = a + \theta(b-a), \qquad \theta\varepsilon = \theta_1$$

genommen und substituiert wird,

$$(8) \quad f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 f''(a) + \tfrac{1}{2}\theta(b-a)^3 f'''[a + \theta_1(b-a)].$$

Auch hier kommen zwei unbekannte Brüche θ und θ_1 vor, und daher verbessern wir die Formel auf folgende Weise. Es sei

$$(9) \qquad \psi(x) = f(x) + (b-x) f'(x) + \tfrac{1}{2}(b-x)^2 f''(x),$$

so haben wir einerseits

$$\psi(a) = f(a) + (b-a) f'(a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 f''(a), \quad \psi(b) = f(b),$$

anderseits durch Differentiation der Gleichung (9)

$$\psi'(x) = \tfrac{1}{2}(b-x)^2 f'''(x),$$

$$\psi'[a+\vartheta(b-a)] = \tfrac{1}{2}(1-\vartheta)^2(b-a)^2 f'''[a+\vartheta(b-a)].$$

Substituieren wir diese Werte in die Formel

$$(10) \qquad \psi(b) = \psi(a) + \frac{b-a}{p(1-\vartheta)^{p-1}}\psi'[a+\vartheta(b-a)],$$

so gelangen wir augenblicklich zu der Gleichung

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 f''(a) + \frac{(b-a)^3}{2p(1-\vartheta)^{p-3}} f'''[a+\vartheta(b-a)],$$

die sich für $p = 3$ noch etwas vereinfacht, nämlich

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 f''(a) + \tfrac{1}{6}(b-a)^3 f'''[a+\vartheta(b-a)].$$

Dabei müssen $\psi(x)$ und $\psi'(x)$, mithin auch $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = a$ bis $x = b$.

Um die bisherige Schlußweise ganz allgemein auszuführen, setzen wir

$$(11) \qquad \psi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1}f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1.2}f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x),$$

worin $f(x)$ eine gegebene Funktion, $\psi(x)$ dagegen die unbekannte Summe der rechts stehenden Summanden bezeichnet. Einerseits ist

$$\psi(a) = f(a) + \frac{b-a}{1}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a),$$

$$\psi(b) = f(b),$$

anderseits durch Differentiation der Gleichung (11), wobei sich alle negativen Ausdrücke heben,

$$(12) \qquad \psi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x),$$

$$\psi'[a+\vartheta(b-a)] = \frac{(1-\vartheta)^{n-1}(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}[a+\vartheta(b-a)],$$

und wenn man diese Werte in die Gleichung (10) einsetzt, so gelangt man zu der Formel

$$(13)\quad f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\vartheta)^{n-p}(b-a)^n}{(n-1)!\,p} f^{(n)}[a + \vartheta(b-a)].$$

Zur Gültigkeit der vorstehenden Gleichung gehört übrigens die Endlichkeit und Kontinuität der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi'(x)$; dazu ist hier, wo $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ durch die Gleichungen (11) und (12) bestimmt werden, erforderlich, daß $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = a$ bis $x = b$.

Für $b - a = h$ nimmt die Formel (13) folgende Gestalt an:

$$(14)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\vartheta)^{n-p} h^n}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(a + \vartheta h),$$

und dabei müssen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = a$ bis $x = a + h$.

Als Sonderwerte der Zahl p empfehlen sich die Werte $p = n$ und $p = 1$; im ersten Falle erhält man

$$(15)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \vartheta h),$$

dagegen im zweiten Falle

$$(16)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\vartheta)^{n-1} h^n}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \vartheta h).$$

Hier bedeutet ϑ immer einen positiven echten Bruch, dessen Wert nicht näher bekannt ist. Dieser kann übrigens in den drei letzten Formeln verschieden sein, denn man sieht an einzelnen Beispielen zu Formel (14) sehr leicht, daß ϑ gleichzeitig von a, h, n und p abhängt und daher bei verschiedenen p im allgemeinen verschiedene Werte erhält.

Eine sehr einfache Anwendung von Formel (15) gewährt der Sonderansatz

$$f(x) = \log x,$$

wobei $M = \log e$ den Modulus des logarithmischen Systems bezeichnen möge; es ist dann

$$(17)\quad \log(a+h) = \log a + M\left[\frac{1}{1}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^3 - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{h}{a}\right)^{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{h}{a+\vartheta h}\right)^n\right],$$

und zwar gilt diese Formel für alle positiven a und h. Setzt man für ϑ das eine Mal die Null, das andere Mal die Einheit, so wird der absolute Wert des letzten Summanden im ersten Falle zu groß, im zweiten zu klein, und man erhält daher zwei Zahlen, zwischen denen $\log(a+h)$ enthalten ist.

Auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher können ähnliche Gleichungen wie (14), (15) oder (16) entwickelt werden.

Kapitel III.

Untersuchungen über krumme Linien und Flächen.

§ 17. Der Lauf ebener Kurven.

I. Die erste Frage bei der Betrachtung einer ebenen krummen Linie wird sich immer auf deren Steigung oder Fall beziehen, weil schon hieraus die Gestalt der Kurve mit einiger Sicherheit zu ersehen ist. Soll nun die Kurve steigen, so muß die nächstfolgende Ordinate größer als die vorhergehende sein, beim Herabsteigen dagegen entspricht der größeren Abszisse eine kleinere Ordinate. Betrachten wir daher

$$x \text{ und } y = f(x),$$
$$x + \Delta x \text{ und } y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

als Koordinaten zweier benachbarter Punkte, so steigt die Kurve, wenn bei hinreichend kleinen Δx die Differenz

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

positiv ist und es bleibt, falls Δx noch weiter abnimmt und gegen die Null konvergiert; dagegen fällt die Kurve bei negativ bleibenden Δy. Zufolge der Voraussetzung eines positiven Δx kann man auch sagen, daß die Kurve steigt oder fällt, je nachdem der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

das positive oder negative Vorzeichen behält. Wie in § 6 nachgewiesen wurde, hat aber der Differenzenquotient bei hinreichend kleinen Δx dasselbe Vorzeichen wie der Differentialquotient; es gilt daher der Satz:

> Die Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, steigt so lange, als $f'(x)$ positiv bleibt, sie fällt dagegen, solange $f'(x)$ das negative Zeichen behält.

Man wird dies geometrisch sogleich bestätigt finden, wenn man sich an die Gleichung

(1) $$y' = f'(x) = \operatorname{tg} \tau$$

erinnert. Bei positiven $f'(x)$ ist nämlich τ positiv und die Tangente TP (Fig. 15) bildet mit der positiven Seite der x-Achse den spitzen, und zwar positiven Winkel XTP, wobei die Drehung von der Rechten zur Linken als die Drehung im positiven Sinne betrachtet wird; unter diesen Umständen steigt die Kurve. Dem negativen $f'(x)$ entspricht ein negativer Winkel $\tau = \angle XT_1U$, welcher durch die entgegengesetzte Drehung entstanden ist; die Kurve fällt dann.

Die Hauptgleichung (1) bleibt auch richtig, wenn man unter τ immer den hohlen Winkel versteht, den die obere, im Gebiet positiver Ordinaten liegende Hälfte der Tangente mit der positiven x-Richtung bildet; absteigende Teile der Kurve geben dann stumpfe Winkel τ, und die Größe y' erhält nach (1) richtig das negative Vorzeichen.

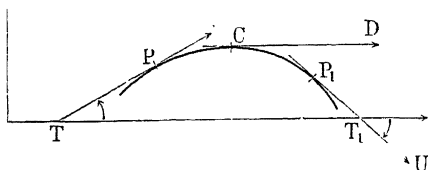



Fig. 15.

Wenn die Ableitung $f'(x)$ ihr Vorzeichen auf die Weise ändert, daß sie entweder vom Positiven durch Null hindurch ins Negative, oder umgekehrt aus dem Negativen durch Null hindurch ins Positive übergeht, so tritt an der Stelle, wo $f'(x) = 0$ wird, entweder der Übergang von Steigen zu Fallen oder von Fallen zu Steigen ein. Derartige Punkte kann man passend Kulminationspunkte nennen; im ersten Falle ist die Kulmination eine obere, im zweiten eine untere. An jedem Kulminationspunkte wird $\tau = 0$, mithin die Tangente parallel zur Abszissenachse, wie in Fig. 15 an dem oberen Kulminationspunkte C.

Als Beispiel kann man die Ellipsengleichung

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{2\,ax - x^2}$$

benutzen; der Differentialquotient

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{2\,ax - x^2}}$$

hat für $x < a$ das positive, für $x > a$ das negative Vorzeichen und geht an der Stelle $x = a$ aus dem Positiven ins Negative über.

Die Kurve besitzt daher an der Stelle $x = a$, $y = b$ einen oberen Kulminationspunkt, wie auch geometrisch bekannt ist.

II. Hat man mittels der angegebenen Regel gefunden, daß eine Kurve innerhalb eines gewissen Intervalls steigt oder fällt, so bleibt noch die zweite Frage, wie jenes Steigen oder Fallen geschieht. Eine Kurve kann nämlich beim Steigen entweder die erhabene oder die hohle Seite gegen die Abszissenachse kehren, wenn sie diese auf der betrachteten Strecke nicht schneidet (s. Fig. 16 und 17). Dasselbe gilt auch, wenn die Kurve fällt, und es bedarf daher eines Unterscheidungszeichens für diese verschiedenen Lagen. Ist nun der Bogen PP_2 konvex gegen die Abszissenachse (Fig. 16), so heißt dies nichts anderes, als daß er zwischen seiner Sehne und der x-Achse liegt; dagegen ist der Bogen PP_2 konkav (Fig. 17), wenn umgekehrt die Sehne zwischen dem Bogen und der Abszissenachse durchgeht. Schalten wir auf der Mitte der Sehne noch den Punkt Q ein und bezeichnen mit P_1 denjenigen Kurvenpunkt, welcher die nämliche Abszisse wie Q besitzt, so haben wir bei konvexer Krümmung

Fig. 16.

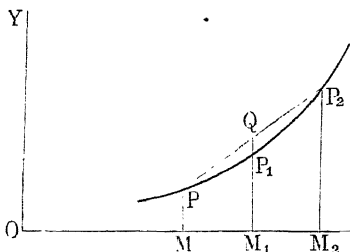
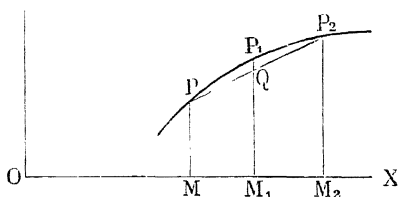
Fig. 17.

$$M_1 Q > M_1 P_1,$$

bei konkaver Krümmung

$$M_1 Q < M_1 P_1,$$

und es ist also die Kurve konvex oder konkav gegen die Abszissenachse, je nachdem $M_1 Q - M_1 P_1$ das positive oder negative Vorzeichen hat. Für $OM = x$, $MM_1 = M_1 M_2 = \varDelta x$ und mit Rücksicht darauf, daß $M_1 Q$ das arithmetische Mittel zwischen MP und $M_2 P_2$ darstellt, findet sich

$$M_1 Q - M_1 P_1 = \frac{f(x + 2\varDelta x) + f(x)}{2} - f(x + \varDelta x)$$
$$= \frac{f(x + 2\varDelta x) - 2f(x + \varDelta x) + f(x)}{2};$$

dieser Ausdruck hat immer dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2}=\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}.$$

und letzterer ist wieder nach § 10 einerlei mit

$$f''(x)+\varrho,$$

wo ϱ eine gleichzeitig mit Δx gegen die Null konvergierende Größe bezeichnet. Hieraus folgt, daß bei hinreichend kleinen Δx der zweite Differenzenquotient dasselbe Vorzeichen wie der zweite Differentialquotient besitzt, daß mithin die Kurve konvex oder konkav ist, je nachdem $f''(x)$ das positive oder negative Zeichen hat. Diese Bemerkungen sind leicht auf den Fall auszudehnen, wo die Kurve unterhalb der Abszissenachse liegt, mithin $f(x)$, $f(x+\Delta x)$, $f(x+2\Delta x)$ negativ sind; man findet, daß umgekehrt ein negatives $f''(x)$ die konvexe, ein positives $f''(x)$ die konkave Krümmung anzeigt. Mit

Fig. 18.

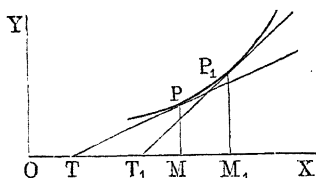
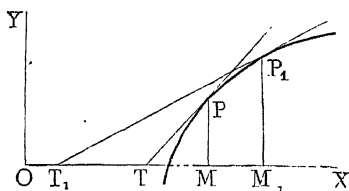



Fig. 19.

dem vorigen zusammen gibt dies den Satz, daß die Kurve konvex oder konkav gegen die Abszissenachse gekrümmt ist, je nachdem $f(x)$ und $f''(x)$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Zu demselben Resultate führt auch eine andere Bemerkung. Bei einer konvex steigenden Kurve wachsen nämlich die Tangentenwinkel, bei einer konkav steigenden nehmen sie ab, wie man unmittelbar aus Fig. 18 und 19 ersieht, worin PT und P_1T_1 die Tangenten an zwei aufeinander folgenden Punkten sind. Die gleiche Bemerkung gilt auch für fallende Kurven, und daher deutet jederzeit ein wachsendes τ auf konvexe, ein abnehmendes τ auf konkave Krümmung. Die Zunahme oder Abnahme von τ erkennt man an dem Vorzeichen des Differentialquotienten

$$\frac{d\tau}{dx}=\frac{d\operatorname{arctg} y'}{dx}=\frac{1}{1+y'^2}\,y'',$$

dieses Vorzeichen hängt lediglich von y'' ab, und damit gelangt man wieder zu dem vorigen Satze. Um letzteren von der bisherigen

Voraussetzung, die Abszissenachse werde nicht geschnitten, frei zu machen, denken wir uns die Abszissenachse so weit abwärts parallel zu sich selbst verschoben, daß alle in Frage kommenden Ordinaten positiv ausfallen; mit anderen Worten, wir vergrößern alle innerhalb der betrachteten Strecke liegenden Ordinaten um ein konstantes Stück, welches mehr als jede vorkommende Ordinate beträgt. Auf y' und y'' hat diese Operation keinen Einfluß; der vorige Satz aber lautet dann:

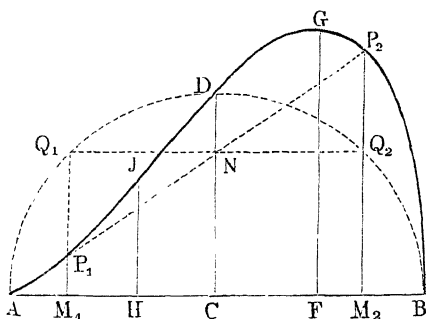
> Die Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, kehrt die erhabene oder die hohle Seite nach unten, d. h. nach der Seite abnehmender Ordinaten, je nachdem $f''(x)$ positiv oder negativ ist.

Ändert $f''(x)$ sein Vorzeichen mittels Durchganges durch den Wert $f''(x) = 0$, so findet an dieser Stelle ein Krümmungswechsel statt; ein derartiger Punkt heißt ein Wendepunkt.

Fig. 20.

III. Nach diesen Sätzen ist der Lauf einer durch ihre Gleichung gegebenen Kurve auf folgende Weise zu untersuchen. Man ermittelt zunächst die Strecken, innerhalb deren y sein Vorzeichen behält, sowie die Stellen, wo $y = 0$ wird; man erhält dadurch die Punkte, welche die Kurve mit der Abszissenachse gemein hat, d. h. Durchschnitte oder Berührungspunkte mit der x-Achse. Nachher entscheidet man, wieweit y' positiv, wieweit es negativ ist und wo y' sein Vorzeichen mittels Durchganges durch Null wechselt; dies gibt die Kulminationspunkte. Endlich untersucht man, innerhalb welcher Intervalle y'' positiv bleibt, innerhalb welcher anderen negativ, und an welchen Stellen y'' sein Vorzeichen mittels Durchganges durch Null wechselt, d. h. wo Wendepunkte vorkommen. Diese sogenannten ausgezeichneten Punkte reichen hin, um die Gestalt der Kurve kennenzulernen.

Als Beispiel diene eine Kurve von folgender Entstehungsweise. In einem über dem Durchmesser $AB = 2a$ (Fig. 20) konstruierten Kreise sind parallel zu AB Sehnen gezogen, von denen $Q_1 Q_2$ irgend eine darstellen möge; sie schneidet den zu AB senkrechten Durch-

messer in einem Punkte N. Man legt ferner $M_1 Q_1 \parallel CD \parallel M_2 Q_2$ und zieht die Gerade AN; letztere trifft $M_1 Q_1$ in P_1, $M_2 Q_2$ in P_2, und nun sollen P_1, P_2 Punkte der neuen Kurve sein. Bezeichnet man AM_1 oder AM_2 mit x und die zugehörige Ordinate mit y, so erhält man als Gleichung der krummen Linie

$$y = \frac{x\sqrt{2ax - x^2}}{2},$$

und hieraus ergibt sich, das Wurzelzeichen erst als positiv vorausgesetzt, daß zu jedem negativen x ein imaginäres y gehört, daß ferner für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, daß jedem zwischen 0 und $2a$ liegenden x ein positives y entspricht, daß für $x = 2a$ wieder $y = 0$, und für $x > 2a$ jedes y imaginär ist. Die Kurve geht demnach von A aus über die x-Achse hinauf und steigt am Ende in B wieder zu ihr herab. Nimmt man das Wurzelzeichen negativ, so erhält man gleich große und entgegengesetzte Ordinaten; demnach besteht die Kurve aus zwei kongruenten, über und unter der Abszissenachse liegenden Zweigen, die zusammen eine geschlossene Figur, ein sogenanntes Blatt bilden.

Man erhält weiter als ersten Differentialquotienten

$$y' = \frac{x(3a - 2x)}{a\sqrt{2ax - x^2}},$$

wobei das Wurzelzeichen positiv genommen werden kann, weil man nur einen der beiden kongruenten Zweige zu untersuchen braucht. Für $x = 0$ wird $y' = 0$; so lange $x < \frac{3}{2}a$ bleibt, ist y' positiv, für $x = \frac{3}{2}a$ wird $y' = 0$, bei größeren x wird y' negativ und zuletzt, d. h. für $x = 2a$, negativ unendlich groß. Demnach hat die Kurve in A die Abszissenachse zur Tangente; von A aus steigt sie bis zu dem oberen Kulminationspunkte G, dessen Koordinaten $AF = \frac{3}{2}a$, $FG = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$ sind, und fällt dann bis B, wo sie die Abszissenachse rechtwinklig schneidet.

Was ferner den zweiten Differentialquotienten

$$y'' = \frac{x(3a^2 - 6ax + 2x^2)}{a\sqrt{(2ax - x^2)^3}} = \frac{2x[(x - \frac{3}{2}a)^2 - \frac{3}{4}a^2]}{a\sqrt{(2ax - x^2)^3}}$$

anbetrifft, so übersieht man leicht, daß derselbe positiv bleibt von $x = 0$ bis zu dem kleineren der beiden Werte, welche $(x - \frac{3}{2}a)^2 = \frac{3}{2}a^2$ machen, d. h. bis zu $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{2}a - a\cos 30^0$. Beim Über-

schreiten dieses Wertes geht y'' aus dem Positiven ins Negative über und bleibt negativ bis $x = 2a$. Es würde zwar später für $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} a$ wieder ein Zeichenwechsel eintreten; dieser kommt aber nicht in Frage, weil $\frac{3 + \sqrt{3}}{2} a > 2a$ ist und die zugehörigen y, y', y'' imaginär sind. Die Kurve ist demnach konvex gegen die Abszissenachse von A bis zu dem Wendepunkte I, dessen Koordinaten $AH = \frac{3}{2} a - a \cos 30^0$ und HI leicht konstruiert werden können; darüber hinaus bleibt die Linie gegen die Abszissenachse konkav.

§ 18. Tangenten, Asymptoten und Normalen ebener Kurven.

I. Die schon öfter benutzte Gleichung

$$\operatorname{tg} \tau = y' = \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

bildet die Grundlage für alle Formeln und Konstruktionen, welche mit dem Probleme des Tangentenziehens in irgend einem Zusammenhange stehen; in ihr ist τ der Richtungswinkel der Tangente.

Dieser Winkel war in § 17 positiv oder negativ, zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ gelegen. Bisweilen ist es zweckmäßig, den Richtungswinkel τ einer beliebigen Richtung beliebig anwachsen zu lassen. Der Drehungssinn, der die positive x-Achse durch eine Drehung um 90^0, nicht 270^0, in die positive y-Achse überführt, heiße positiv; bei der immer von uns festgehaltenen Orientierung der Achsen ist er dem Uhrzeigerlauf entgegengesetzt. Der Richtungswinkel irgend einer Strecke AB oder in bestimmter Richtung gezogenen Geraden ist dann der Winkel τ, um den man die positive x-Achse im positiven Sinne drehen muß, um sie in die bestimmte Richtung, die von A nach B weist, überzuführen. Vollzieht man noch eine volle Umdrehung, so kommt man wieder zu derselben Richtung; τ ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt; negative spitze Winkel τ sind z. B. mit Winkeln zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π gleichbedeutend.

Haben dann A und B die Koordinaten x, y und ξ, η, ist r die Länge der Strecke AB, so hat man nach der Definition der trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel

$$\xi - x = r \cos \tau, \qquad \eta - y = r \sin \tau.$$

Errichtet man die Strecke $s = AC$ senkrecht auf AB, so ist der Richtungswinkel der Strecke AC entweder $\tau + \frac{1}{2}\pi$ oder $\tau - \frac{1}{2}\pi$;

im ersten Falle hat man, wenn ξ_1, η_1 die Koordinaten des Punktes C sind,

$$\xi_1 - x = s\cos(\tau + \tfrac{1}{2}\pi) = -s\sin\tau,$$
$$\eta_1 - y = s\sin(\tau + \tfrac{1}{2}\pi) = +s\cos\tau;$$

in diesem Falle ist die Strecke AC gegen AB im positiven Sinne um 90° gedreht.

In der Formel (1) ist zunächst τ der Richtungswinkel der im Sinne wachsender x, also nach rechts gezogenen Tangente. Sind auf der betrachteten Kurve x und y Funktionen eines Parameters t, so ist dies auch die Richtung wachsender t, wenn $dx/dt > 0$; man kann daher setzen, wenn $dt > 0$,

$$(2)\qquad \cos\tau = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad \sin\tau = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Diese Formeln bleiben aber auch richtig, wenn $dx/dt < 0$; denn dann ist die Richtung wachsender t die Richtung abnehmender x, der Winkel τ ist von dem bisherigen um π verschieden, seine trigonometrischen Funktionen den bisherigen entgegengesetzt, was damit übereinstimmt, daß dx und dy den bisherigen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Formeln (2) geben also den Richtungswinkel der im Sinne wachsender t gezogenen Tangente; der bisher betrachtete Winkel τ erscheint im Falle $dx > 0$.

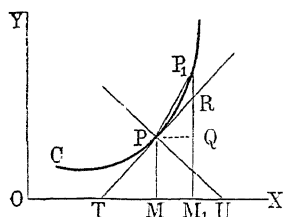



Fig. 21.

II. Um nun durch den Punkt P eine Tangente an die Kurve zu legen, kann man entweder den Berührungswinkel τ aus der Formel (1) bestimmen und sein Komplement MPT (Fig. 21) an die Ordinate MP antragen, oder eine der Geraden MT, PT berechnen und, wenn möglich, konstruieren. Die erste dieser Strecken heißt die Subtangente, die zweite die Tangente, und zwar ist

$$(3)\qquad \text{Subtg} = y\cot\tau = \frac{y}{\operatorname{tg}\tau} = \frac{y}{y'},$$

$$(4)\qquad \text{Tg} = \frac{y}{\sin\tau} = \frac{y\sqrt{1 + y'^2}}{y'}.$$

Diese Ausdrücke geben die betrachteten Strecken mit einem gemeinsamen Vorzeichen behaftet, und zwar dem positiven oder negativen, je nachdem die Richtung TM mit der positiven x-Richtung übereinstimmt oder nicht.

Bezeichnen ferner ξ und η die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente, so gilt die Gleichung

$$\eta - y = (\xi - x) \operatorname{tg} \tau,$$

von deren Richtigkeit man sich durch wirkliche Konstruktion der Differenzen $\xi - x$ und $\eta - y$ leicht überzeugt; demnach lautet die Gleichung der Tangente:

$$\eta - y = y' (\xi - x). \tag{5}$$

Für den Fall, daß die Gleichung der Kurve in der unentwickelten Form

$$F(x, y) = 0$$

gegeben ist, erhält man

$$y' = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y},$$

also für die Gleichung der Tangente die symmetrische Gestalt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0. \tag{6}$$

III. An die Gleichung (5) oder

$$\eta = y' \xi + y - x y'$$

knüpft sich noch folgende Bemerkung. Wenn die Kurve ins Unendliche geht, so kann es geschehen, daß bei unendlich wachsenden x die Ausdrücke

$$y' \quad \text{und} \quad y - x y'$$

sich bestimmten Grenzen nähern; es gibt dann eine feste Grenzlage der Tangenten, der sie sich mehr und mehr nähern, je weiter der Punkt (x, y) fortrückt, d. h. eine Asymptote der Kurve. Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} \lim y' &= \lim f'(x) = A, \\ \lim (y - x y') &= \lim [f(x) - x f'(x)] = B, \end{aligned}\right\} (x = \infty),$$

so haben wir als Gleichung der Asymptote

$$\eta = A \xi + B. \tag{7}$$

Nur für den Fall, daß die Asymptote parallel zur y-Achse liegt, wird diese Gleichung unbrauchbar wegen $A = \infty$ und $B = \infty$; man hat aber dann die vorige Betrachtung nicht nötig, weil sich eine derartige Asymptote von selbst dadurch bemerklich macht, daß einem endlichen x ein unendliches y entspricht.

IV. Errichtet man im Punkte P auf der Tangente eine Senkrechte, welche die Abszissenachse in U schneidet, so erhält man die sogenannte Normale der Kurve; MU heißt die Subnormale (Fig. 21).

Aus der Bemerkung, daß

$$\angle MPU = \angle MTP = \tau$$

ist, findet man leicht

$$\text{Subnormale} = y \operatorname{tg} \tau = y y',$$

$$\text{Normale} = \frac{y}{\cos \tau} = y \sqrt{1 + y'^2}.$$

Auch diese Strecken erscheinen mit einem geometrisch deutbaren Vorzeichen behaftet; die Subnormale hat dasselbe Vorzeichen wie die Subtangente, und die Normale ist positiv oder negativ, je nachdem die Richtung UP in die obere oder untere Hälfte der Ebene, $y > 0$ oder $y < 0$, hineinweist.

Ferner ist, wenn ξ und η die Koordinaten eines Punktes der Normale bezeichnen,

$$\eta - y = (x - \xi) \cot \tau,$$

mithin die Gleichung der Normale:

$$\eta - y = -\frac{1}{y'} (\xi - x).$$

Der unentwickelten Form der Kurvengleichung entspricht als Gleichung der Normale

$$(\xi - x) \frac{\partial F}{\partial y} - (\eta - y) \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Anwendungen dieser allgemeinen Vorschriften gibt der nächste Paragraph.

§ 19. Beispiele von Tangenten- und Normalenkonstruktionen.

I. Die Kegelschnitte. Nimmt man die Hauptachse eines Kegelschnittes zur x-Achse und einen ihrer Endpunkte zum Koordinatenanfang, so ist bekanntlich

$$y^2 = 2 p x + q x^2$$

die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, worin p den Halbparameter (die Ordinate im Brennpunkte) bedeutet. Man findet hieraus

$$(1) \qquad y y' = p + q x, \quad y' = \frac{p + q x}{y},$$

mithin als Gleichung der Tangente

$$\eta - y = \frac{p + q x}{y} (\xi - x).$$

Für $\xi = 0$ ergibt sich hieraus ein spezielles η, das η_0 heißen möge, und zwar bedeutet es geometrisch die Strecke OT, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet; man hat dafür

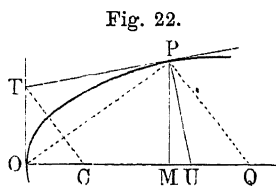
$$\eta_0 = y - xy' = y - \frac{p + qx}{y} \cdot x = \frac{y^2 - px - qx^2}{y}$$

oder, vermöge des Wertes von y^2,

$$\eta_0 = \frac{px}{y}.$$

Dies gibt folgende Tangentenkonstruktion (Fig. 22). Man nehme $OC = p$, fälle von dem festen Punkte C auf den Radiusvektor OP eine Senkrechte, welche die Ordinatenachse in T schneidet, und ziehe die Gerade TP.

Fig. 22.

Man hat ferner durch Substitution des Wertes von y

$$\pm y' = \frac{p + qx}{\sqrt{2px + qx^2}} = \frac{\frac{p}{x} + q}{\sqrt{2\frac{p}{x} + q}},$$

$$\pm (y - xy') = \pm \eta_0 = \frac{px}{\sqrt{2px + qx^2}} = \frac{p}{\sqrt{2\frac{p}{x} + q}};$$

bei unendlich wachsenden x wird hieraus

$$\pm \lim y' = \frac{q}{\sqrt{q}} = \sqrt{q}, \qquad \pm \lim (y - xy') = \frac{p}{\sqrt{q}},$$

und von den Vorzeichen gelten entweder alle oberen oder alle unteren.

Diese Ausdrücke sind reell und von endlichem Werte, wenn $q > 0$, d. h. der Kegelschnitt eine Hyperbel ist; letztere besitzt daher zwei Asymptoten, deren Gleichungen in der Form

$$\pm \eta = \sqrt{q} \cdot \xi + \frac{p}{\sqrt{q}}$$

darstellbar sind, wobei $\sqrt{q}$, wie immer, die positive Quadratwurzel bedeutet.

Was endlich die Normale betrifft, so bemerke man, daß die Gleichung (1) linker Hand den Ausdruck yy', d. h. die Subnormale, enthält, und daß die Gleichung (1) mit folgender übereinkommt:

$$yy' = \frac{y^2}{x} - p.$$

Man kann daher die Normale unabhängig von der Tangente durch folgende Konstruktion erhalten: Auf dem Radiusvektor OP errichtet man in P eine Senkrechte, welche der Abszissenachse in Q begegnet, und konstruiert auf der Abszissenachse die Strecke $QU = p$ mit Berücksichtigung des Vorzeichens; dann ist PU die Normale.

II. Die Cykloide ist bekanntlich der Weg, den irgend ein Punkt eines Kreises beschreibt, wenn letzterer, ohne zu gleiten, auf einer Geraden fortrollt, wobei sich die Peripherie des Kreises auf jener Geraden abwickelt. Nehmen wir die gegebene Gerade AB, die sogenannte Basis, zur x-Achse, den Anfangspunkt der Bewegung zum

Fig. 23.

Koordinatenanfang und setzen (Fig. 23) $AM = x$, $MP = y$, $LP = LU = a$, $\angle PLU = \omega$, so gelten folgende Gleichungen:

$$x = AU - MU = \operatorname{arc} UP - PV,$$

d. i.

$$x = a\omega - a\sin\omega; \tag{2}$$

$$y = UV = LU - LV,$$

d. i.

$$y = a - a\cos\omega. \tag{3}$$

Durch Elimination von ω aus (2) und (3) würde man zu einer Gleichung zwischen x und y gelangen, da aber dieselbe etwas kompliziert ausfällt, so tut man besser, die obigen zwei Gleichungen beizubehalten und darin den Wälzungswinkel ω als Unabhängige zu betrachten. Dann ist

$$dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega, \quad dy = a\sin\omega\,d\omega,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega} = \cot\tfrac{1}{2}\omega$$

oder, zufolge der geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten,

$$\operatorname{tg}\tau = \cot\tfrac{1}{2}\omega = \operatorname{tg}(90^0 - \tfrac{1}{2}\omega).$$

Da während der ersten halben Umwälzung $\omega < 180^0$, mithin $90^0 - \frac{1}{2}\omega$ ein spitzer Winkel und ebenso τ jedenfalls $< 90^0$ ist, so schließt man aus der vorigen Gleichung

$$\tau = 90^0 - \tfrac{1}{2}\omega \quad \text{oder} \quad 90^0 - \tau = \tfrac{1}{2}\omega,$$

d. h. $\angle MPT =$ dem Peripheriewinkel UWP; es ist folglich WPT die Tangente und die darauf senkrechte PU die Normale.

Nicht selten nimmt man den höchsten Punkt C der Cykloide zum Koordinatenanfang und den Pfeil CD zur Abszissenachse. Für $CN = x_1$, $NP = y_1$ ist dann

$$x_1 = CD - DN = 2a - y = a(1 + \cos\omega),$$

$$y_1 = AD - AM = \pi a - x = a(\pi - \omega + \sin\omega),$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dx}{dy} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1 - \cos\omega}{1 + \cos\omega}},$$

oder wegen $\cos\omega = \frac{x_1}{a} - 1$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \sqrt{\frac{2a - x_1}{x_1}} = \frac{\sqrt{2ax_1 - x_1^2}}{x_1}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem vorigen überein. Die linke Seite bedeutet nämlich die trigonometrische Funktion der Tangente des Winkels τ_1, den die Tangente PT mit der neuen Abszissenachse einschließt; es ist daher

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{NQ}{NC} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} MPT = \frac{NQ}{NC},$$

woraus wieder folgt, daß $PW \parallel CQ$ die Tangente sein muß.

III. Die Kettenlinie. Aus statischen Gründen bildet ein vollkommen biegsamer homogener Faden, frei aufgehangen und nur der Einwirkung seines Gewichtes unterworfen, eine krumme Linie von folgender Gleichung

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right). \tag{4}$$

Bei dieser Gelegenheit führen wir die hyperbolischen Funktionen

$$\mathfrak{Cof}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \qquad \mathfrak{Sin}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

ein, die offenbar die Gleichungen

$$\mathfrak{Cof}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u = 1, \quad d\,\mathfrak{Cof}\, u = \mathfrak{Sin}\, u\, du, \quad d\,\mathfrak{Sin}\, u = \mathfrak{Cof}\, u\, du \tag{5}$$

erfüllen; dann ist die Gleichung der Kettenlinie

$$y = k \operatorname{Cof} \frac{x}{k},$$

wobei die Abszissenachse horizontal in der Entfernung k unter dem Scheitel der Kurve liegt, und die Ordinatenachse vertikal durch den Scheitel geht (Fig. 24). Aus (4) folgt

Fig. 24.

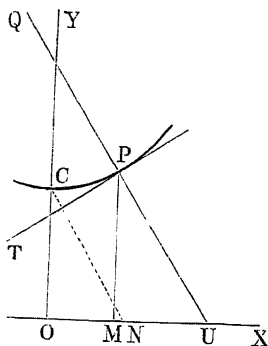
$$y' = \operatorname{Sin} \frac{x}{k},$$

und es ist vermöge der ersten Gleichung (5)

$$\left(\frac{y}{k}\right)^2 - y'^2 = 1,$$

$$y' = \pm \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1},$$

oder zufolge der geometrischen Bedeutung von y'

$$\operatorname{tg} \tau = \pm \frac{\sqrt{y^2 - k^2}}{k},$$

und das Vorzeichen ist das der Größe x. — Um hiernach die Tangente am Punkte P zu konstruieren, beschreibt man aus dem Scheitel C mit MP als Halbmesser einen Kreis, welcher die Abszissenachse in N schneidet, zieht die Gerade CN, die mit OC einen Winkel $= \tau$ bildet, und legt PT senkrecht zu CN; die Normale PU ist parallel zu CN.

§ 20. Bogendifferential und Bogenlänge.

Auf einer Kurve, längs deren x und y als Funktionen einer Unabhängigen t dargestellt werden, hat die Größe $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ eine besondere Bedeutung. Auf einer Geraden $y = ax + b$ z. B. kann man $x = t$ setzen und findet sofort

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = d\left(x\sqrt{1 + a^2}\right) = ds, \quad s = x\sqrt{1 + a^2},$$

und die Größe s ist, da durch $a = \operatorname{tg} \tau$ der Richtungswinkel der Geraden festgelegt ist, $= x/\cos \tau$, also die Länge der Geraden von ihrem Schnitt mit der y-Achse gemessen, wenn $x > 0$. Auf einem Kreise vom Radius 1 kann man setzen: $x = \cos t$, $y = \sin t$, und

findet, wenn $dt > 0$,

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dt,$$

kann also $s = t$ setzen, um die Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

zu erzielen. Nach Einl. III ist aber t, mithin auch s die Bogenlänge des Kreises.

Angeregt durch diese Beispiele nehmen wir allgemein an, es gebe eine Funktion $s = F(t)$, die die Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

erfüllt, und zwar auf der Strecke von $t = a$ bis $t = b$ längs der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, dann kann man auch schreiben:

$$F'(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2},$$

und hieraus folgt nach dem Mittelwertsatz des § 6

$$\Delta F(t) = \Delta t F'(t_1), \quad t_1 = t + \theta_1 \Delta t, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$
$$\Delta F(t) = \Delta t \sqrt{\varphi'(t_1)^2 + \psi'(t_1)^2}.$$

Anderseits ist der Abstand der zu t und $t + \Delta t$ gehörigen Punkte

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta t \sqrt{\varphi'(t_2)^2 + \psi'(t_3)^2},$$

wobei

$$t_2 = t + \theta_2 \Delta t, \quad t_3 = t + \theta_3 \Delta t, \quad 0 < \theta_2 < 1, \quad 0 < \theta_3 < 1,$$

da man wiederum nach dem Mittelwertsatze setzen kann:

$$\Delta x = \Delta t \,.\, \varphi'(t_2), \quad \Delta y = \Delta t \,.\, \psi'(t_3).$$

Wenn nun φ' und ψ' auf der Strecke $a \ldots b$ stetige Funktionen von t sind, so sind die Unterschiede der Größen

$$\varphi'(t_1)^2 + \psi'(t_1)^2, \quad \varphi'(t_2)^2 + \psi'(t_3)^2,$$

sowie auch ihrer Quadratwurzeln kleiner als die beliebig klein gegebene Größe ε, sobald $0 < \Delta t < \delta$ und δ passend gewählt wird; dann hat man also

$$(1) \qquad -\varepsilon \Delta t < \Delta F(t) - \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \varepsilon \Delta t.$$

Diese Ungleichung wenden wir auf n Strecken an, in die wir die Strecke $a \ldots b$ einteilen, wobei

$$b - a = \Delta_1 t + \Delta_2 t + \cdots + \Delta_n t, \quad t_0 = a, \quad t_n = b,$$
$$t_\nu - t_{\nu-1} = \Delta_\nu t \ldots, \quad x_\nu = \varphi(t_\nu), \quad y_\nu = \psi(t_\nu)$$

gesetzt werde und allgemein $0 < \varDelta t_\nu < \delta$ sei, was durch eine hinreichend große Zahl n erreicht werden kann. Dann ist

$$\varDelta_\nu F(t) = F(t_\nu) - F(t_{\nu-1});$$

addiert man die den einzelnen Zuwüchsen $\varDelta_\nu t$ entsprechenden Gleichungen (1), so ergibt sich daher

$$-\varepsilon(b-a) < F(b) - F(a) - \sum_\nu^{1,n} \sqrt{(\varDelta_\nu x)^2 + (\varDelta_\nu y)^2} < \varepsilon(b-a);$$

dabei wird allgemein die Bedeutung des Summenzeichens durch die Gleichung

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_\nu^{1,n} A_\nu$$

erklärt. Hiermit ist die Gleichung

$$F(b) - F(a) = \lim \sum_\nu^{1,n} \sqrt{(\varDelta_\nu x)^2 + (\varDelta_\nu y)^2}$$

in dem Sinne bewiesen, daß die sämtlichen Werte $\varDelta_\nu t$ unter einer Schranke δ liegen und diese der Null unbeschränkt angenähert wird.

Jetzt ist $\sqrt{(\varDelta_\nu x)^2 + (\varDelta_\nu y)^2}$ der Abstand der Punkte $(x_{\nu-1}, y_{\nu-1})$ und (x_ν, y_ν); die Summe dieser Quadratwurzeln ist also die Länge der vieleckigen gebrochenen Linie, deren Ecken die Punkte (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ sind, die also dem von $t = a$ bis $t = b$ reichenden Bogen der betrachteten Kurve einbeschrieben sind. Den Grenzwert dieser Vieleckslänge nennt man sinngemäß die Länge des Kurvenbogens; also ist $F(b) - F(a)$ diese Länge. Nimmt man für b den beliebigen Wert t, so ist $s = F(t) - F(a)$ die bis zu dem entsprechenden Punkt (x, y) hin gemessene Länge der Kurve vom Punkt $t = a$ an, und man hat, wovon wir ausgingen, die Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und wenn $t = x$ gesetzt werden kann und x' positiv ist,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Genau in derselben Weise zeigt man, daß, wenn eine Raumkurve durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ gegeben ist und eine Funktion $s = F(t)$ existiert, die die Gleichung $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ erfüllt, die Größe $F(b) - F(a)$ als Länge der Kurve zwischen den Stellen $t = a$ und $t = b$ angesehen werden kann, d. h. daß sie der Grenzwert der Länge eines der Kurve auf

der bezeichneten Strecke eingeschriebenen Polygons ist, wenn dessen Seiten unendlich abnehmen.

Als Beispiele betrachten wir die Kettenlinie und die Cykloide. Bei ersterer ist

$$y = k\,\mathfrak{Cof}\frac{x}{k}, \qquad y' = \mathfrak{Sin}\frac{x}{k}, \qquad \frac{ds}{dx} = \mathfrak{Cof}\frac{x}{k};$$

man errät daher leicht, daß man setzen kann

$$s = k\,\mathfrak{Sin}\frac{x}{k} = F(x).$$

Der Wert $x = 0$ entspricht dem Scheitel der Kettenlinie, in ihm ist $F(0) = 0$. Die von ihm aus gemessene Bogenlänge ist also s.

Bei der Cykloide ersetzen wir die in § 17 gebrauchte Größe ω durch t und finden aus den dort gegebenen Werten dx und dy

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= a\sqrt{2 - 2\cos t}\,dt \\ &= 2a\sin\frac{t}{2}\,dt; \end{aligned}$$

die elementaren Differentialformeln der trigonometrischen Funktionen geben

Fig. 25.

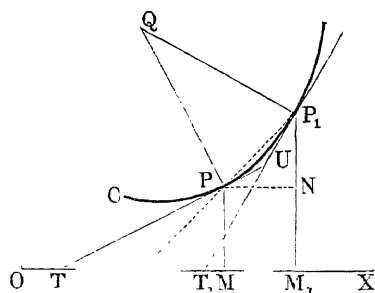
$$ds = d\left(-4a\cos\frac{t}{2}\right. \qquad F(t) = -4a\cos\frac{t}{2}.$$

Messen wir die Bogenlänge von der dem Wert $t = 0$ entsprechenden Spitze ab, so ist sie

$$F(t) - F(0) = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right).$$

§ 21. Krümmungskreis, Krümmungsmittelpunkt und Evolute.

I. An zwei Punkte P und P_1 einer Kurve CPP_1 (Fig. 25) denken wir uns die Tangenten TP und T_1P_1 mit den Richtungswinkeln τ und τ_1 gelegt, die sich in U schneiden, und die zugehörigen Normalen konstruiert, deren Durchschnitt Q heißen möge; in dem Sehnenvierecke PQP_1U ist dann

$$\angle PQP_1 = \angle TUT_1 = \angle M_1T_1P_1 - \angle MTP = \tau_1 - \tau,$$

der Winkel PQP_1 gibt also den Zuwachs des Tangentenwinkels τ an, wenn dieser mit x wächst und kann daher mit $\Delta\tau$ bezeichnet werden. Wenn freilich abweichend von der Figur τ bei wachsenden Werten von x abnimmt, ist der absolut genommene Winkel PQP_1 durch $\tau - \tau_1$ oder $-\Delta\tau$, allgemein also durch $|\Delta\tau|$ zu bezeichnen. Ziehen wir ferner die Sekante P_1PS und setzen

$$\angle PSM = \sigma,$$

so haben wir im Dreiecke PP_1Q

$$\angle PQP_1 = |\Delta\tau|, \quad \angle SPT = |\sigma - \tau|, \quad \angle SPT_1 = |\sigma - \tau_1|,$$
$$\angle P_1PQ = 90^0 - \angle P_1PU = 90^0 - \angle SPT = 90^0 - |\sigma - \tau|,$$
$$\angle PP_1Q = 90^0 - \angle PP_1U = 90^0 - \angle SP_1T_1 = 90^0 - |\tau_1 - \sigma|,$$
$$PP_1 = \sqrt{(\overline{PN}^2 + \overline{P_1N}^2)} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2};$$

vermöge der Proportionalität der Seiten und der Sinus der Gegenwinkel können wir hieraus die Strecken $PQ = r$ und $P_1Q = r_1$ berechnen und finden

$$r = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sin|\Delta\tau|} \sin PP_1Q$$

oder, wenn Δx wie in der Figur positiv genommen wird, da immer $\cos u$ für $\cos|u|$ gesetzt werden kann,

$$r = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}{\frac{\sin\Delta\tau}{\Delta\tau} \cdot \left|\frac{\Delta\tau}{\Delta x}\right|} \cos(\tau + \Delta\tau - \sigma)$$

und dementsprechend

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}{\frac{\sin\Delta\tau}{\Delta\tau} \cdot \left|\frac{\Delta\tau}{\Delta r}\right|} \cos(\sigma - \tau).$$

Lassen wir jetzt den Punkt P_1 immer näher an P rücken, mithin Δx, $\Delta\tau$ und $\sigma - \tau$ gleichzeitig gegen die Null konvergieren, so verändert der Durchschnitt Q seine Lage, geht aber nicht ins Unendliche hinaus; vielmehr nähern sich r und r_1 der gemeinschaftlichen Grenze

$$\lim r = \lim r_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left|\frac{d\tau}{dx}\right|},$$

welche wir ϱ nennen wollen. Aus $\operatorname{tg} \tau = y'$ folgt ferner, weil τ einen positiven oder negativen spitzen Winkel bedeutet,

$$\tau = \operatorname{arctg} y', \frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{1+y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{1+y'^2} y'',$$

daher ist zusammengenommen

$$(1) \qquad \varrho = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{|y''|}.$$

Wollen wir feststellen, nach welcher Seite hin diese Strecke auf der Normale des Punktes P abzutragen ist, so beachten wir, daß nach dem Mittelwertsatze die Sekante PP_1 einer Tangente des Bogens PP_1 parallel läuft, deren Richtungswinkel σ ist. Wenn dann τ mit x wächst, also y'' wie in der Figur positiv ist, so ist $\sigma > \tau$, also PP_1 gegen die im Sinne wachsender x gezogene Tangente PU im positiven Sinne gedreht. Der Punkt P_1 liegt also in dem rechten Winkel, der von PU und der nach oben gehenden Normale des Punktes P begrenzt wird. Weiter ist die in der Richtung wachsender x gezogene Tangente des Punktes P_1 gegen PU im positiven Sinne gedreht; daraus folgt, daß die Normale des Punktes P_1 die obere Hälfte der Normale des Punktes P treffen muß. Die Strecke PQ liegt also im Falle $y'' > 0$ von P nach oben oder nach der konkaven Seite der Kurve hin, die in diesem Falle (§ 17) nach oben ihre hohle Seite kehrt. Dasselbe gilt aber auch, wenn $y'' < 0$; dann ist die Sekante PP_1 gegen PU im negativen Sinne gedreht, PQ liegt nach unten, was aber jetzt wiederum die hohle Seite der Kurve ist.

Das für den ersten Augenblick überraschende Resultat, daß der Durchschnitt zweier Normalen beim Zusammenfallen der letzteren nicht ins Unendliche, sondern nur bis zu einem bestimmten Grenzpunkte fortrückt, ist übrigens geometrisch leicht zu erklären. Je weniger nämlich die Entfernung der Punkte P und P_1 beträgt, um so kleiner ist auch die Differenz der Längen von PQ und P_1Q, mithin läßt sich näherungsweise $PQ = P_1Q$ als Halbmesser eines Kreises ansehen, welcher sowohl die Punkte P und P_1 als die zugehörigen Tangenten PT und P_1T_1 mit der Kurve gemein hat. Eben deswegen schließt sich dieser Kreis genauer an die Kurve an als jeder andere, dessen Mittelpunkt willkürlich auf der Normale PQ gewählt wäre und der nur die eine Tangente PT mit der Kurve gemein hätte, oder kurz ausgedrückt, jener Kreis hat nahezu dieselbe Krümmung wie die Kurve von P bis P_1. Die Grenzlage des Normalendurchschnittes Q heißt der Krümmungsmittelpunkt, die

Strecke ϱ, als Radius eines Kreises gedacht, der **Krümmungshalbmesser**, und der mit ϱ aus jenem Punkte beschriebene Kreis der **Krümmungskreis**; er schließt sich der Kurve genauer an als jeder andere in P sie berührende Kreis und hat durchweg dieselbe Krümmung wie die Kurve in P.

Diese Vorstellungsweise führt auch sehr rasch zur Formel (1). Setzt man nämlich arc $CP = s$, so ist arc $PP_1 = \Delta s$, ferner näherungsweise, indem man Δs wie einen mit dem Halbmesser $PQ = P_1 Q = r$ beschriebenen und zum Zentriwinkel $PQP_1 = |\Delta \tau|$ gehörigen Kreisbogen berechnet,

$$\Delta s = r \,.\, |\Delta \tau| \quad \text{oder} \quad r = \left|\frac{\Delta s}{\Delta \tau}\right|,$$

folglich genau beim Übergange zur Grenze für verschwindende Δs und $\Delta \tau$

$$\varrho = \left|\frac{ds}{d\tau}\right|. \tag{2}$$

Durch Einführung der Werte

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \,.\, dx, \quad d\tau = \frac{1}{1 + y'^2}\, y''\, dx$$

geht die Formel (2) in die Formel (1) über.

Will man mit einer Formel ohne Zeichen des absoluten Betrages rechnen, also für (1) schreiben

$$\varrho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''},$$

so erhält man als Krümmungsradius eine positive oder negative Größe, je nachdem y'' positiv oder negativ ist, also die Kurve nach oben, in der Richtung der positiven y-Achse konkav ist, oder nach unten; oder auch je nachdem die nach der konkaven Seite der Kurve gezogene Normale gegen die nach wachsenden Werten von x gerichtete Tangente im positiven oder negativen Sinne um 90^0 gedreht ist.

Für die Konstruktion des Krümmungshalbmessers ist in manchen Fällen die Bemerkung von Nutzen, daß

$$\varrho = \frac{u^3}{y^3 y''} \tag{3}$$

gesetzt werden kann, wo u die Normale im Punkte P, mit dem Vorzeichen der Ordinate y genommen, bezeichnet.

Aus der Gleichung der Kegelschnitte

$$y = \sqrt{2px + qx^2}$$

erhält man z. B. durch zweimalige Differentiation

$$y'' = -\frac{p^2}{\sqrt{(2px + qx^2)^3}} = -\frac{p^2}{y^3},$$

und daher ist der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -\frac{u^3}{p^2} = -u\left(\frac{u}{p}\right)^2,$$

was sich ohne Schwierigkeit konstruieren läßt, wenn man z. B. $\frac{u}{p}$ als Tangente eines Winkels betrachtet. Die eleganteste Konstruktion der Formel werden wir im § 23 zeigen.

Für die Cykloide ist nach § 19

$$dx = 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\, d\omega, \quad y' = \cot\tfrac{1}{2}\omega,$$

mithin

$$dy' = -\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\omega}\, d\omega,$$

woraus durch Division mit dx und dessen Werte folgt

$$y'' = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{1}{2}\omega}.$$

Dies gibt den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -4a\sin\tfrac{1}{2}\omega = -2PU$$

oder gleich dem Doppelten der Normale; der Krümmungsmittelpunkt wird demnach erhalten, wenn man die Normale PU um ihre eigene Größe verlängert.

Für die Kettenlinie ist nach § 19

$$y' = \mathfrak{Sin}\frac{x}{k}, \qquad u = y\sec\tau = \frac{y^2}{k},$$

ferner

$$y'' = \frac{1}{k}\mathfrak{Cof}\frac{x}{k} = \frac{y}{k^2},$$

mithin nach (3)

$$\varrho = \frac{y^2}{k} = u.$$

Die Kettenlinie hat also mit dem Kreise die Eigenschaft gemein, daß die Krümmungshalbmesser gleich der Normale ist; die Lagen sind aber einander entgegengesetzt.

II. Um die Koordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes zu bestimmen, braucht man nur zu berücksichtigen, daß der gesuchte Punkt auf der Normale um $|\varrho|$ vom Punkte P entfernt liegt, und zwar nach der konkaven Seite der Kurve hin, also nach der Richtung, die, wenn τ der Richtungswinkel der Tangente ist, den Richtungswinkel $\tau + \frac{1}{2}\pi$ oder $\tau - \frac{1}{2}\pi$ aufweist, je nachdem y'' positiv oder negativ ist. Man erhält also nach § 18, indem die oberen Vorzeichen dem ersten, die unteren dem zweiten Falle zukommen,

$$\xi - x = |\varrho| \cos(\tau \pm \tfrac{1}{2}\pi), \quad \eta - y = |\varrho| \sin(\tau \pm \tfrac{1}{2}\pi),$$

$$\xi - x = \mp |\varrho| \sin\tau = \mp |\varrho| \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\eta - y = \pm |\varrho| \cos\tau = \pm \frac{|\varrho|}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Nun hat ϱ das Vorzeichen von y'', also ist immer $\pm|\varrho| = \varrho$; man erhält daher in beiden Fällen

$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''}y', \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \tag{4}$$

Für die Parabel, deren Gleichung

$$y = \sqrt{2px}$$

ist, findet man hiernach

$$\xi = 3x + p, \quad \eta = -\sqrt{\frac{8x^3}{p}}.$$

Wenn die Gleichung der Kurve nicht in entwickelter Form gegeben ist, so müssen y' und y'' nach den Lehren der §§ 10 und 15 berechnet werden.

III. Die Formeln (4) enthalten in letzter Instanz nur die drei Variablen ξ, η und x, da man, wenigstens bei entwickelten Gleichungen von der Form $y = f(x)$, sowohl y als y' und y'' durch x ausdrücken kann. Denkt man sich aus den obigen Gleichungen x eliminiert, so bleibt nur eine Gleichung zwischen ξ und η übrig, d. h. die Gleichung derjenigen Kurve, welche von den stetig aufeinanderfolgenden Krümmungsmittelpunkten gebildet wird. Dieser geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte heißt die Evolute der gegebenen Kurve, und zwar kommt diese Benennung daher, daß man sich die ursprüngliche Kurve der Abwicklung eines um die Evolute gelegten Fadens entstanden denken kann; die Gleichungen (4) ergeben nämlich $d\xi^2 + d\eta^2 = d\varrho^2$, worauf wir bei der Theorie der Hüllen zurückkommen.

Als Gleichung der Parabelevolute findet man mittels der angegebenen Elimination

$$\eta^2 = \frac{8}{27} \frac{(\xi - p)^3}{p},$$

also eine Kurve dritten Grades (die sogenannte semikubische Parabel).

Für die Ellipse, deren Gleichung unter der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

dargestellt wird, erhält man als Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad b_1 = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

Für die Hyperbel ist die Mittelpunktsgleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

daraus ergibt sich als Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$$a_1 = \frac{a^2 + b^2}{a}, \quad b_1 = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

Für die Cykloide gilt der bemerkenswerte Satz, daß die Evolute eine mit ihr kongruente Cykloide ist, die jedoch eine andere Lage besitzt.

§ 22. Formeln für Polarkoordinaten.

Bei dem Gebrauche von Polarkoordinaten wird meistenteils der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Abszissenachse als Unabhängige betrachtet und jener Vektor als abhängige Veränderliche; für $\angle\, XOP = \theta$ und $OP = r$ (Fig. 26) ist demnach die entwickelte Gleichung der Kurve von der Form

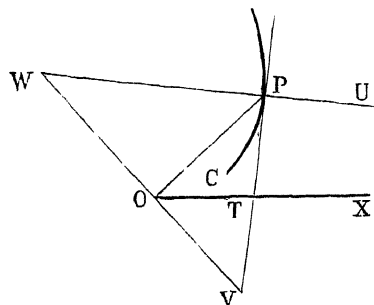
$$r = f(\theta),$$

woraus sich die Differentialquotienten

$$\frac{dr}{d\theta} = r' = f'(\theta), \quad \frac{d^2 r}{d\theta^2} = r'' = f''(\theta) \quad \text{usw.}$$

leicht ableiten lassen. Es fragt sich nun, welche neue Formeln an die Stelle der früheren treten, wenn man statt der rechtwinkligen Koordinaten Polarkoordinaten einführt.

Der Übergang von dem einen zum anderen Koordinatensystem geschieht bekanntlich mittels der Formeln

Fig. 26.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$

θ kann als Parameter t im Sinne des § 18 gelten, und man findet

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta;$$

durch Division unter Berücksichtigung der Formeln § 18 (2)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\operatorname{tg}\theta + r}{\frac{dr}{d\theta} - r\operatorname{tg}\theta}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{dr}{d\theta} = r\,\frac{1 + \operatorname{tg}\tau\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\theta} = r\,\frac{1}{\operatorname{tg}(\tau - \theta)}$$

oder, wenn $\tau - \theta = \varphi$ gesetzt wird,

$$\text{(1)} \qquad \cot\varphi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{r'}{r}.$$

Dabei ist τ der im positiven Drehsinne positiv gerechnete Winkel zwischen der positiven x-Achse und der im Sinne wachsender θ gezogenen Tangente VP; die Differenz φ kann positiv oder negativ sein und mißt den Winkel, um den die soeben bezeichnete Tangentenrichtung gegen OP gedreht ist. Nach § 18 (2) sind die Größen $\cos\tau$ und $\sin\tau$ mit ihrem Vorzeichen zu berechnen.

Nennen wir ψ den Winkel OPU, welchen die Normale mit dem Radiusvektor einschließt, wenn sie gegen die bezeichnete Tangentenrichtung im positiven Sinne um 90° gedreht ist, so ist $\psi = 90^0 + \varphi$, folglich

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{r'}{r}.$$

Eine im Koordinatenanfange auf der Geraden OP errichtete Senkrechte wird von der Tangente in einem Punkte V, von der Normale in einem Punkte W geschnitten; die Strecke OV heißt dann die Polarsubtangente, OW die Polarsubnormale. Wird letztere nach der um 90° gegen OP gedrehten Richtung, OV aber nach der entgegengesetzten Richtung positiv genommen, so findet man $OV = r \operatorname{tg} \varphi$ oder

$$\text{Polarsubtg} = \frac{r^2}{r'},$$

$$\text{Polarsubn} = r';$$

die letzte Gleichung läßt die geometrische Bedeutung von r' erkennen.

Die Formel für das Bogendifferential

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

verwandelt sich nach Substitution der mit der Unabhängigen θ gebildeten Werte von dx und dy in die folgende

$$ds^2 = dr^2 + (r\,d\theta)^2$$

oder, wenn $d\theta > 0$,

$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = d\theta \sqrt{r^2 + r'^2}. \tag{2}$$

Zu demselben Resultate führt auch eine einfache geometrische Betrachtung.

Um endlich den Krümmungshalbmesser in Polarkoordinaten auszudrücken, halten wir uns an die Formel

$$\varrho = \left|\frac{ds}{d\tau}\right|$$

worin ds schon durch (2) bekannt und daher noch $d\tau$ zu berechnen ist. Die Formel (1) liefert bis auf Vielfache von π

$$\tau - \theta = \operatorname{arccot} \frac{r'}{r},$$

daher ist:

$$d\tau - d\theta = -\frac{\dfrac{r\,dr' - r'\,dr}{r^2}}{1 + \left(\dfrac{r'}{r}\right)^2} = -\frac{r\,dr' - r'\,dr}{r^2 + r'^2}$$

$$= -\frac{r\dfrac{dr'}{d\theta} - r'\dfrac{dr}{d\theta}}{r^2 + r'^2}\,d\theta = -\frac{r r'' - r'^2}{r^2 + r'^2}\,d\theta$$

oder

$$d\tau = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2}\,d\theta,$$

und nun ergibt sich vermöge der Werte von ds und $d\tau$

$$(3)\qquad \varrho = \left| \frac{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \right|.$$

Für den Fall, daß die Gleichung der Kurve unentwickelt in Polarkoordinaten gegeben ist, hat man r' und r'' nach § 15 zu berechnen.

I. Die Kegelschnitte. Nimmt man den einen Brennpunkt des Kegelschnittes zum Pol, die Hauptachse zur Abszissenachse und rechnet den Winkel θ vom nächsten Scheitel aus, so ist bekanntlich die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte

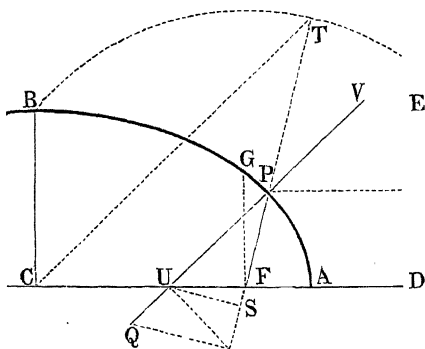



Fig. 27.

$$(4)\qquad \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

und in Beziehung auf Fig. 27 $FP = r$, $\angle AFP = \theta$; dabei bedeutet p den Halbparameter gleich der Brennpunktsordinate FG und ε die numerische Exzentrizität, d. h. das Verhältnis von r zum Abstande PN des Punktes P von der Direktrix DE. Nach (4) erhält man für den Winkel $UPT = \psi$ zwischen Vektor und Normale die Formeln

$$\psi = 90^0 + \tau - \theta, \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

und für dessen Supplement FPU, welches χ heißen möge,

$$\chi = 90^0 + \theta - \tau, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

$$\cos \chi = \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2}}, \quad \sin \chi = \frac{\varepsilon \sin \theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2}}.$$

Hieraus kann der Winkel zwischen der Normalen und der Hauptachse abgeleitet werden; es ist nämlich $\angle FUP = \theta - \chi$,

$$\sin FUP = \sin \theta \cos \chi - \cos \theta \sin \chi$$

und nach Substitution der Werte von $\cos \chi$ und $\sin \chi$

$$\sin FUP = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2}}.$$

In dem Dreiecke FPU kennt man jetzt eine Seite $FP = r$ und alle Winkel, woraus die übrigen Seiten FU und $PU = u$ leicht zu berechnen sind. Man hat zunächst

$$FU = \frac{r \sin \chi}{\sin FUP} = \varepsilon r,$$

mithin

$$\frac{FU}{r} = \varepsilon = \frac{r}{PN}, \quad FU = \frac{r^2}{PN};$$

dies gibt eine neue Normalenkonstruktion entweder mit Hilfe der Direktrix oder bequemer in der Weise, daß man auf dem Vektor die Strecke FT gleich der großen Halbachse des Kegelschnittes nimmt, T mit dem Mittelpunkte C verbindet und nachher die Normale $PU \parallel TC$ legt. Für die Normale u erhält man

$$u = \frac{r \sin \theta}{\sin FUP} = r\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2},$$

mithin

$$u \cos \chi = r(1 + \varepsilon \cos \theta) = p;$$

hierin liegt der bemerkenswerte Satz, daß die Projektion der Normalen auf den Vektor FP eine konstante Größe, und zwar gleich dem Halbparameter ist. Nimmt man demgemäß auf dem Vektor die Strecke $PS = FG$ und errichtet in S auf PS eine Senkrechte, so bestimmt letztere auf der Achse den Punkt U, durch welchen die Normale geht. Aus der obigen Gleichung ersieht man ferner die geometrische Bedeutung von $u:p$, und hierdurch wird die in § 21 für den Krümmungshalbmesser des Kegelschnittes entwickelte Formel zur folgenden

$$\varrho = -u \sec^3 \chi,$$

deren Konstruktion einfach darin besteht, daß man in U auf der Normalen eine Senkrechte errichtet, welche den Vektor in R schneidet, und nachher durch R eine zu PR senkrechte Gerade legt, welche der Normalen im Krümmungsmittelpunkte Q begegnet.

II. Die Lemniskate. Auf einer Geraden sind zwei feste Punkte F und G im Abstande $FG = 2c$ gegeben, und es wird der geometrische Ort des beweglichen Punktes P für den Fall gesucht, daß das Rechteck $FP \cdot GP$ von konstantem Inhalte, und zwar gleich dem Quadrate über $\frac{1}{2}FG = c$ ist. Auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen x-Achse die Gerade FG (Fig. 28) und dessen Anfang der Mittelpunkt von FG ist, lautet die Gleichung der Kurve

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = c^2,$$

und nach gehöriger Reduktion

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ wird die Gleichung einfacher

$$r^4 = 2\,c^2 r^2 \cos 2\,\theta$$

oder, wenn $c\sqrt{2} = a$ gesetzt wird,

$$r = a\sqrt{\cos 2\,\theta}.$$

Hieraus ergibt sich augenblicklich

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{r'}{r} = \operatorname{tg} 2\,\theta;$$

der spitze Winkel zwischen dem Vektor OP und der Normale beträgt also das Doppelte von θ, wonach die Normale sehr leicht zu konstruieren ist.

III. Die Kreisevolvente. Wenn eine Gerade ohne zu gleiten so um einen Kreis herumgedreht wird, daß sie denselben immer

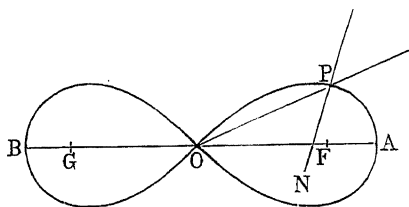
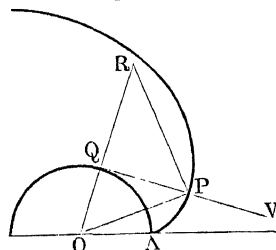



Fig. 28. Fig. 29.

berührt, so beschreibt ein bestimmter Punkt der Geraden die genannte Kurve. Bei der Anfangslage der Geraden sei A jener Punkt und zugleich Berührungspunkt, eine spätere Lage der Geraden sei QP, der Wälzungswinkel $AOQ = \omega$, $\angle AOP = \theta$, $AO = a$ (Fig. 29), es ist dann

$$QP = \operatorname{arc} QA = a\omega,$$

mithin in dem Dreiecke OPQ

$$r = a\sqrt{1+\omega^2}, \quad \operatorname{tg}(\omega - \theta) = \omega.$$

Durch Elimination von ω würde man aus diesen Gleichungen eine Gleichung zwischen r und θ ableiten können, doch ist es bequemer, die obigen Gleichungen ungeändert beizubehalten und ω als unabhängigen Parameter zu betrachten. Man hat jetzt

$$dr = \frac{a\omega\,d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \frac{d\omega - d\theta}{\cos^2(\omega-\theta)} = d\omega,$$

und aus der zweiten Gleichung

$$d\theta = \sin^2(\omega - \theta)\, d\omega = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}\, d\omega,$$

mithin durch Division

$$r' = \frac{dr}{d\theta} = \frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}.$$

Setzt man wie früher $\angle\, OPV = \psi$, $\angle\, OPQ = \chi$, so ergibt sich

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{r'}{r} = -\frac{1}{\omega}, \quad \operatorname{tg}\chi = \frac{1}{\omega} = \cot(\omega - \theta),$$

es ist folglich $\chi = 90^0 - \angle\, POQ$ oder PQ die Normale, wie zu erwarten war.

Man hat ferner

$$dr' = d\left(\frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}\right) = -\frac{a}{\omega^2\sqrt{1+\omega^2}}\, d\omega$$

und durch Division mit $d\theta$

$$r'' = -\frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega^4};$$

nach Formel (3) ergibt sich

$$\varrho = a\omega = PQ,$$

mithin ist Q der Krümmungsmittelpunkt, wie sich nach der Entstehungsweise der Kurve erwarten ließ.

§ 23. Einige Hauptsätze der analytischen Geometrie.

Aus der analytischen Geometrie des Raumes benutzen wir folgende Begriffe und leicht ersichtliche Tatsachen.

Seien P, P_ν die Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und x_ν, y_ν, z_ν, sei ferner O der Anfangspunkt des Koordinatensystems oder Bezugssystems; d. h. durch O seien drei zueinander senkrechte Gerade, die x-, y- und z-Achse, gezogen, die wir immer gegeneinander orientiert, wie die Richtungen nach Westen, Süden und oben annehmen. Dann sind x, y, z die Projektionen der Strecke OP, deren Richtung und absolute Größe wir durch r bezeichnen, auf die Achsen, und gelten die Gleichungen

$$x = r\cos(xr), \qquad y = r\cos(yr),$$
$$z = r\cos(zr), \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

dabei sind (xr) usf. die hohlen Winkel zwischen den Richtungen x und r usf., $\cos(xr)$ usf. sind die Richtungskosinus der Richtung r.

Verschiebt man den Anfangspunkt in die Stelle P_0 und sind ξ, η, ζ die Koordinaten des Punktes P in dem neuen System, so ist

(1) $$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta;$$

ist ϱ nach absoluter Größe und Richtung die Strecke $P_0 P$, so ist, entsprechend den soeben für r gegebenen Formeln,

$$\varrho = \overline{P_0 P} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$\cos(x\varrho) = \cos(\xi\varrho) = \frac{\xi}{\varrho} = \frac{x - x_0}{\varrho},$$

$$\cos(y\varrho) = \cos(\eta\varrho) = \frac{y - y_0}{\varrho}, \quad \cos(z\varrho) = \cos(\zeta\varrho) = \frac{z - z_0}{\varrho}.$$

Die Drehung des Bezugssystems um die z-Achse wird, wenn α der Drehungswinkel ist, vermittelt durch die Gleichungen

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \quad z = Z,$$

aus denen hervorgeht, daß, wenn P_1, P_2 irgend zwei Punkte sind,

(2) $$s = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

invariant ist. Sind ferner

(3) $$x_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad y_3 = -(x_1 z_2 - x_2 z_1), \quad z_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

die Koordinaten des Punktes P_3 und entsprechend in großen Buchstaben, so ist

$$x_3 = X_3\cos\alpha - Y_3\sin\alpha, \quad y_3 = X_3\sin\alpha + Y_3\cos\alpha, \quad z_3 = Z_3;$$

die Größen $X_3 \ldots$ sind also die Koordinaten des Punktes P_3 im neuen System.

Aus Drehungen um eine der Achsen läßt sich nun bei festem Anfangspunkt jede Koordinatenverwandlung erzeugen; sind ξ, η, ζ die neuen Achsen, und X etwa die Schnittlinie der Ebenen xy und $\xi\eta$ in einer der beiden Richtungen genommen, so drehe man erst die x-Achse um die z-Achse aus der ursprünglichen Lage in die Lage X, nehme die Achsen z und Z identisch und die Achse Y auf X und z senkrecht und so gerichtet, daß die Achsen X, Y, Z die oben festgesetzte Orientierung haben; dann stehen ζ und Z auf X senkrecht; man kann also um X so drehen, daß Z in ζ übergeht; ist die Orientierung der Achsen ξ, η, ζ auch die festgesetzte, so geht bei der letzten Drehung Y in η, nicht in die entgegengesetzte Richtung über, und der Übergang von x, y, z zu ξ, η, ζ ist durch zwei Drehungen vollzogen.

Bei jeder Verwandlung eines Bezugssystems in ein gleich orientiertes mit demselben Anfang bleiben also die Größe s und der

Punkt P_3 invariant. Daraus läßt sich ihre geometrische Bedeutung ableiten. Legt man die x-Achse in die Richtung OP_1, so ist $y_1 = z_1 = 0$, also $s = x_1 x_2$ oder, wenn allgemein der absolut genommene Abstand $OP_\nu = r_\nu$ gesetzt wird, $s = r_1 r_2 \cos(P_1 O P_2)$. Man findet also in jedem Bezugssystem, wenn r_ν auch als Zeichen für die Richtung OP_ν gilt,

$$(4) \qquad \frac{s}{r_1 r_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2} = \cos(r_1 r_2)$$
$$= \cos(x r_1)\cos(x r_2) + \cos(y r_1)\cos(y r_2) + \cos(z r_1)\cos(z r_2),$$

womit der hohle Winkel zweier Richtungen aus ihren Richtungskosinus bestimmt wird. Die Formel gilt auch für zwei von einem beliebigen von O verschiedenen Punkte ausgehenden Strecken, da man unter O einen beliebigen Punkt, unter x, y, z Parallele zu drei beliebigen Achsen eines Bezugssystems verstehen kann. Berücksichtigt man die für die Richtungskosinus der Strecke $P_0 P$ gegebenen Ausdrücke, in denen $x - x_0, \ldots$ als Komponenten der Strecke $P_0 P$ nach den Achsen $x, \ldots$ anzusehen sind, so kann die Bedingung für die senkrechte Lage zweier Strecken, deren Komponenten A, B, C und A_1, B_1, C_1 sind, in der Form

$$A A_1 + B B_1 + C C_1 = 0$$

geschrieben werden; die Strecken $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ stehen z. B. aufeinander senkrecht, wenn

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) + (z_1 - z_0)(z_2 - z_0) = 0.$$

Man kann auch statt wie bisher mit Komponenten mit Strecken selbst rechnen, die man dann als Vektoren bezeichnet. Die Grundlagen der Vektorenrechnung sind jetzt leicht anzugeben. Schreibt man $\mathfrak{V}_\nu$ für OP_ν und $\mathfrak{W}_\nu$ für $P_0 P_\nu$, so setzt man

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_0 + \mathfrak{W}_1, \quad s = \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2, \quad \mathfrak{V}_3 = \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2,$$

wodurch die Summe, das innere Produkt und das äußere Produkt definiert sind; Summe und äußeres Produkt sind Vektoren, das innere Produkt ist eine Zahl. Die Formeln (1), (2), (3) geben den Sinn dieser Gleichungen durch die Komponenten ausgedrückt, sowie die Rechenregeln

$$\mathfrak{V}_1(\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3) = \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_3,$$
$$\mathfrak{V}_1 \times (\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3) = \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_3,$$
$$\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}_1, \quad \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{V}_1 = 0;$$

wird ein Vektor $= 0$, so bedeutet das, daß seine Komponenten verschwinden.

Legt man ferner die x-Achse in die Richtung OP_1, die y-Achse so in die Ebene OP_1P_2, daß sie von der Geraden OP_1 nach derselben Seite weist wie die Strecke OP_2, so wird $z_2 = y_1 = z_1 = 0$, $x_2 = r_1 \cos P_1OP_2$, $y_2 = r_1 \sin P_1OP_2$, $x_1 = r_1$ also $x_3 = y_3 = 0$, $z_3 = x_1 y_2 = r_1 r_2 \sin P_1OP_2 = OP_3$. Diese Strecke steht also auf der Ebene OP_1P_2 senkrecht, und zwar so, daß auch die Richtungen OP_1, OP_2, OP_3 dieselbe Orientierung haben wie die Achsen, abgesehen von der Rechtwinkligkeit der letzteren, und die Strecke OP_3 gibt durch ihre Länge den doppelten Inhalt des Dreiecks OP_1P_2.

Wird ferner aus den Strecken OP_1, OP_2 und OP_4 ein Spat gebildet, indem man durch P_4, P_1, P_2 Parallelebenen beziehentlich zu den Ebenen OP_1P_2, OP_2P_4, OP_1P_4 legt, so ist die Höhe dieses Spats, die auf der Ebene OP_1P_2 senkrecht steht, nach der Formel (4)

$$h = OP_4 . \cos P_4OP_3 = r_4 \cos(r_3 r_4) = r_4 [\cos(x r_4)\cos(x r_3) + \cdots]$$
$$= \frac{x_4 x_3 + y_4 y_3 + z_4 z_3}{r_3} = \frac{\mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4}{r_3},$$

aber mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem der Winkel P_4OP_3 spitz oder stumpf ist, oder je nachdem die Punkte P_3 und P_4 auf derselben oder verschiedenen Seiten der Ebene OP_1P_2 liegen, oder endlich je nachdem die Richtungen OP_1, OP_2, OP_4 ebenso oder entgegengesetzt orientiert sind wie die Koordinatenachsen x, y, z. Nun ist r_3 der Inhalt des mit den Seiten OP_1 und OP_2 gebildeten Parallelogramms, also der in der Ebene OP_1P_2 liegenden Grundfläche des Spats; der Inhalt desselben ist also

$$r_3 h = x_4 x_3 + y_4 y_3 + z_4 z_3 = \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4,$$

positiv oder negativ, je nachdem die erste oder zweite der soeben unterschiedenen Lagemöglichkeiten vorliegt. Setzt man für x_3, y_3, z_3 ihre Werte (3), so wird dieser Inhalt nach § 9 die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) - y_4(x_1 z_2 - x_2 z_1) + z_4(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \mathfrak{B}_4(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2);$$

sie verschwindet, wenn $h = 0$, also wenn P_4 in der Ebene OP_1P_2 liegt.

Wendet man dies Ergebnis an auf das Bezugssystem ξ, η, ζ mit dem Anfangspunkte P_0, so ist x_ν durch $x_\nu - x_0$ zu ersetzen usf., und man findet für den Inhalt des Spats, der aus den Strecken P_0P_1,

P_0P_2, P_0P_3 ebenso wie oben aus den Strecken OP_1 usf. gebildet ist, den Wert

$$\begin{vmatrix} x_4 - x_0, & y_4 - y_0, & z_4 - z_0 \\ x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = \mathfrak{W}_4(\mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{W}_2);$$

der sechste Teil dieser Größe ist, absolut genommen, der Rauminhalt des Tetraeders $P_0P_1P_2P_4$ und sein Vorzeichen hat die angegebene geometrische Bedeutung.

§ 24. Tangenten und Normalebenen an doppelt gekrümmten Linien.

I. Eine Kurve doppelter Krümmung hat bekanntlich zwei Gleichungen, weil sie als Durchschnitt zweier Flächen angesehen werden kann; sind die Gleichungen der letzteren gegeben, etwa in der Gestalt

(1) $$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

so kann man aus ihnen einmal z, einmal y eliminieren und erhält dann zwei neue Gleichungen von der Form

(2) $$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x),$$

womit die Projektionen der Kurve auf die xy- und auf die xz-Ebene bestimmt sind. Allgemeiner kann man x, y, z als Funktionen eines Parameters t geben, wodurch dann entsprechend wachsenden Werten desselben eine bestimmte Fortgangsrichtung auf der Kurve festgelegt ist.

Es mögen nun zwei Kurvenpunkte P und P_1 betrachtet werden, deren Koordinaten x, y, z und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ heißen sollen; P_1 liege von P aus in der Richtung wachsender t. Die Länge der Sehne PP_1 ist

$$PP_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

ihre Richtung heiße σ; dann haben wir nach § 23 die Formeln

$$\cos(x\sigma) = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

$$\cos(y\sigma) = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

$$\cos(z\sigma) = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}.$$

Bei unendlich abnehmenden Δx rücken die Punkte P und P_1 einander immer näher, die Sekante dreht sich um den fest bleibenden Punkt P und die Richtung σ geht schließlich in die Tangente über, deren Richtung durch T bezeichnet werde; aus den vorigen Gleichungen erhalten wir nach § 20, wenn ds das Bogendifferential ist,

$$\cos(xT) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(yT) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(zT) = \frac{dz}{ds}.$$

Um die Gleichungen der Tangente im Punkte xyz aufzustellen, nennen wir ξ, η, ζ die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente, r seinen Abstand vom Punkte xyz und haben

$$\xi - x = r\cos(xT), \qquad \eta - y = r\cos(xT), \qquad \zeta - z = r\cos(zT),$$

mithin

$$\frac{\xi - x}{\cos(xT)} = \frac{\eta - y}{\cos(yT)} = \frac{\zeta - z}{\cos(zT)}$$

oder vermöge der drei angegebenen Kosinuswerte

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{ds}}.$$

Denkt man sich die Tangente auf die Ebenen xy und xz projiziert, so gelten für die Projektionen die Gleichungen

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x),$$

d. h. die Projektionen der Tangente sind die Tangenten an den gleichnamigen Projektionen der Kurve, was geometrisch unmittelbar einleuchtet.

II. Eine Ebene, die senkrecht zur Tangente durch den Berührungspunkt der letzteren gelegt ist, heißt eine Normalebene der doppelt gekrümmten Kurve; ihre Gleichung findet sich auf folgendem Wege. Sind ξ, η, ζ die Koordinaten eines beliebigen Punktes P_1 auf der Normalebene des Kurvenpunktes P, so sind $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ nach § 23 die Komponenten der Strecke PP_1, die auf der Tangente des Punktes P senkrecht steht. Daraus folgt nach § 23 als Gleichung der Normalebene

$$\cos(xT)(\xi - x) + \cos(yT)(\eta - y) + \cos(zT)(\zeta - z) = 0,$$

d. h.

$$\frac{dx}{ds}(\xi - x) + \frac{dy}{ds}(\eta - y) + \frac{dz}{ds}(\zeta - z) = 0$$

oder auch

$$\xi - x + \frac{dy}{dx}(\eta - y) + \frac{dz}{dx}(\zeta - z) = 0.$$

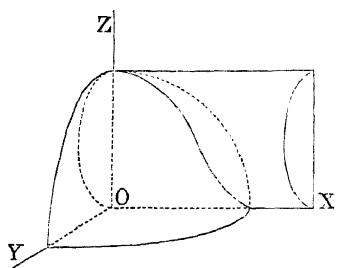
Die in den vorigen Formeln auftretenden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ kann man aus den Gleichungen (2) unmittelbar erhalten, wenn die Gleichungen der Kurve in dieser Form gegeben sind; kennt man aber nur die beiden Flächen, als deren Durchschnitt die Linie angesehen wird, und läßt sich die im Anfange dieses Paragraphen angedeutete Elimination nicht ausführen, so muß man die Gleichungen (1) zur Entwicklung von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ benutzen. Die Differentiation derselben gibt unter Rücksicht auf den Umstand, daß eine Unabhängige x und zwei abhängige Größen y, z vorhanden sind,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

und hieraus findet sich durch Elimination

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = + \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}}$$

Fig. 30.

Als Beispiel diene der Durchschnitt einer Kugelfläche mit einem Zylinder, dessen kreisförmiger Querschnitt den Kugelhalbmesser zum Durchmesser haben, und dessen Mantel durch den Kugelmittelpunkt gehen möge. Nennen wir $2a$ den Kugelhalbmesser und legen die x-Achse in die erzeugende Gerade, welche durch das Kugelzentrum geht (Fig. 30), so gelten für unsere Kurve folgende Gleichungen:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0,$$
$$F(x, y, z) = y^2 - 2az + z^2 = 0.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - a)$$

und mittels der Formeln (3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(z-a)}{ay}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{a};$$

demnach sind die Gleichungen der Tangente

$$\eta - y = \frac{x(z-a)}{ay}(\xi - x), \quad \zeta - z = -\frac{x}{a}(\xi - x).$$

Die Gleichung der Normalebene ist

$$\xi - x + \frac{x(z-a)}{ay}(\eta - y) - \frac{x}{a}(\zeta - z) = 0$$

und bei gehöriger Reduktion

$$\frac{a}{x}\xi + \frac{z-a}{y}\eta - \zeta = 0;$$

man ersieht hieraus, daß die Normalebene immer durch den Koordinatenanfang (den Kugelmittelpunkt) geht, was bei einer sphärischen Kurve zu erwarten war.

§ 25. Die Krümmung der Raumkurven.

Zieht man zu der in der Richtung wachsender t gezogenen Tangente T einer Raumkurve im Punkt P eine Parallele MQ, die in Q die Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 1 durchschneide, so beschreibt Q eine Raumkurve, die auf der Kugel liegt; die Koordinaten des Punktes Q sind

$$(1) \qquad \alpha_1 = \frac{dx}{ds} = \cos(xT), \quad \beta_1 = \frac{dy}{ds} = \cos(yT),$$
$$\gamma_1 = \frac{dz}{ds} = \cos(zT).$$

Dem Fortgang des Punktes P in der Richtung wachsender t entspricht dann ein Fortgang auf der Q-Kurve, und die in dieser Richtung gezogene Tangente hat nach § 24 die Richtungskosinus

$$\alpha_2 = \frac{d\alpha_1}{\sqrt{d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2}}, \quad \beta_2 = \frac{d\beta_1}{\sqrt{d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2}},$$
$$\gamma_2 = \frac{d\gamma_1}{\sqrt{d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2}};$$

dabei ist

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2}$$

das Bogenelement der Q-Kurve, und wenn wir $ds = \varrho\, d\sigma$ setzen, ergibt sich

$$(2)\qquad \alpha_2 = \varrho\frac{d\alpha_1}{ds},\quad \beta_2 = \varrho\frac{d\beta_1}{ds},\quad \gamma_2 = \varrho\frac{d\gamma_1}{ds},\quad \varrho > 0.$$

Seien ferner $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Richtungskosinus der Richtung MR oder 3, die auf den Tangentenrichtungen der ursprünglichen und der Q-Kurve, die wir auch 1 und 2 nennen, senkrecht steht, und zwar so, daß die Richtungen 1, 2, 3 orientiert sind, wie die Achsen xyz des Bezugssystems. Die Richtungen 2 und 3 nennt man Hauptnormale und Binormale; Normalen überhaupt sind alle Lote auf der Tangente. Bei der festgesetzten Orientierung der Achsen 1, 2, 3 ist nach § 23

$$(3)\qquad \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1,\quad \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1,\quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1,$$

und da die Richtungen 3, 1, 2 und 2, 3, 1 ebenso orientiert sind, folgt weiter

$$(4)\qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, & \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, & \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2,\\ \alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, & \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, & \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3. \end{aligned}$$

Jetzt beschreibt auch der Punkt R eine Kurve auf der Kugel, deren Tangentenrichtung 4 sei und die Richtungskosinus $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ habe; wir wollen zeigen, daß sie mit der Richtung 2 zusammenfällt oder entgegengesetzt ist. Seien P_1, P_2, P_3 Punkte der ursprünglichen Kurve, die wir nachher in P zusammenrücken lassen, Q_1, Q_2, Q_3 die entsprechenden Punkte der Q-Kurve. Zunächst ist nach der allgemeinen Formel des § 24

$$(5)\qquad \alpha_4 = \frac{d\alpha_3}{\sqrt{d\alpha_3^2 + d\beta_3^2 + d\gamma_3^2}}, \cdots$$

aber

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1,\quad \alpha_3\, d\alpha_3 + \beta_3\, d\beta_3 + \gamma_3\, d\gamma_3 = 0,$$

also

$$\alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4 + \gamma_3\gamma_4 = 0,\quad \cos(3, 4) = 0.$$

Weiter gelten, da 1 und 3 aufeinander senkrecht stehen, die Gleichungen

$$\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0,\quad \alpha_3\frac{d\alpha_1}{ds} + \alpha_1\frac{d\alpha_3}{ds} + \cdots = 0,$$

also nach (2)

$$\frac{1}{\varrho}\left(\alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2\right) + \alpha_1\frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1\frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1\frac{d\gamma_3}{ds} = 0,$$

oder, da auch $\cos(2, 3) = 0$ ist,

$$\alpha_1\, d\alpha_3 + \beta_1\, d\beta_3 + \gamma_1\, d\gamma_3 = 0,$$

oder nach (5)

$$\alpha_1\alpha_4 + \beta_1\beta_4 + \gamma_1\gamma_4 = 0.$$

Die Richtung 4 steht also auf 1 und 3 senkrecht, muß also mit 2 zusammenfallen oder entgegengesetzt sein. Man kann also setzen

$$(6)\qquad \frac{d\alpha_3}{ds} = -\frac{\alpha_2}{\tau}, \quad \frac{d\beta_3}{ds} = -\frac{\beta_2}{\tau}, \quad \frac{d\gamma_3}{ds} = -\frac{\gamma_2}{\tau};$$

dabei ist offenbar

$$\tau^2 = \frac{d\alpha_3^2 + d\beta_3^2 + d\gamma_3^2}{ds^2}.$$

Differenziert man endlich die letzte Gruppe der Gleichungen (4) nach s, so folgt mittels der übrigen Gleichungen (3) und (4)

$$\frac{d\alpha_2}{ds} = -\frac{\alpha_1}{\varrho} + \frac{\alpha_3}{\tau}, \quad \frac{d\beta_2}{ds} = -\frac{\beta_1}{\varrho} + \frac{\beta_3}{\tau}, \quad \frac{d\gamma_2}{ds} = -\frac{\gamma_1}{\varrho} + \frac{\gamma_3}{\tau}.$$

Diese Gleichungen, verbunden mit den Gleichungen (2) und (6), sind die Frenetschen Formeln; sie drücken die Differentiale der Richtungskosinus der Richtungen 1, 2, 3 durch diese Größen selbst, ϱ und τ in einfacher Weise aus.

Um nun die Werte der Größen τ und ϱ zu finden, gehen wir von der Gleichung

$$\alpha_3 dx + \beta_3 dy + \gamma_3 dz = 0$$

aus, die auch $\cos(1, 3) = 0$ geschrieben werden kann. Aus ihr folgt

$$\alpha_3 d^2x + \beta_3 d^2y + \gamma_3 d^2z = -dx \,.\, d\alpha_3 - dy \,.\, d\alpha_3 - dz \,.\, d\alpha_3,$$

und wenn man rechts die Werte (6) und (1) einsetzt und die Gleichung $\alpha_2\alpha_1 + \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1 = 0$ benutzt,

$$\alpha_3 d^2x + \beta_3 d^2y + \gamma_3 d^2z = 0.$$

Hieraus folgt weiter nach (2), (3) und (6), wenn $d^2s = 0$, also $d\alpha_1/ds = d^2x/ds^2$ genommen wird,

$$\alpha_3 d^3x + \beta_3 d^3y + \gamma_3 d^3z = -d\alpha_3\, d^2x - d\beta_3\, d^2y - d\gamma_3\, d^2z$$

$$= \frac{ds}{\tau}(\alpha_2 d^2x + \beta_2 d^2y + \gamma_2 d^2z) = \frac{ds^3}{\varrho\tau},$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\varrho}{ds^6}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}.$$

Für ϱ ergeben die Formeln (1) und (2), immer wenn $d^2s = 0$, unmittelbar

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Will man für s eine beliebige andere Unabhängige einführen, so braucht man nur auszurechnen

$$\frac{d^2 x}{d s^2} = \frac{d\left(\frac{d x}{d s}\right)}{d s} = \frac{d s d^2 x - d x d^2 s}{d s^3} \quad \text{usf.,}$$

und findet so

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{d s^3}\sqrt{(d y d^2 z - d z d^2 y)^2 + (d z d^2 x - d x d^2 z)^2 + (d x d^2 y - d y d^2 x)^2};$$

der Ausdruck für $1/\tau$ behält seine Form, da die mit $d^2 s$ und $d^3 s$ behafteten Glieder sich heben.

Die geometrische Bedeutung der Größen $1/\varrho$ und $1/\tau$, die man Krümmung und Windung oder Torsion, ϱ den Krümmungsradius nennt, zeigt folgende Betrachtung.

Ist eine Richtung, die von der Unabhängigen t abhängt, durch die Richtungskosinus

$$\alpha = \cos u, \quad \beta = \cos v, \quad \gamma = \cos w$$

bestimmt, und entsprechen dem Zuwachs $\varDelta t$ die Zuwüchse

$$\varDelta \alpha = \cos(u + \varDelta u) - \cos u \quad \text{usf.,}$$

so ist der Winkel der zu t und $t + \varDelta t$ gehörigen Richtungen, den wir ω nennen, nach § 23 durch die Gleichung

$$\cos \omega = \cos u \cos(u + \varDelta u) + \cos v \cos(v + \varDelta v) + \cos w \cos(w + \varDelta w)$$

gegeben; man findet aus ihr

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos \omega) &= -2\alpha \varDelta \alpha - 2\beta \varDelta \beta - 2\gamma \varDelta \gamma, \\ -4\sin^2\frac{\omega}{2} &= (\alpha + \varDelta \alpha)^2 + (\beta + \varDelta \beta)^2 + (\gamma + \varDelta \beta)^2 - 1 \\ &\quad - (\varDelta \alpha)^2 - (\varDelta \beta)^2 - (\gamma \varDelta)^2, \end{aligned}$$

und da $\frac{1}{2}\omega$ ein spitzer Winkel ist, folgt

$$2\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{(\varDelta \alpha)^2 + (\varDelta \beta)^2 + (\varDelta \gamma)^2}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\omega \cdot \left(\frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right) = \sqrt{\varDelta \alpha^2 + \varDelta \beta^2 + \varDelta \gamma^2},$$

und da die eingeklammerte Größe links dem Grenzwerte 1 bei der Annahme $\lim \varDelta t = 0$ zustrebt, ergibt sich

$$\lim \frac{\omega}{\varDelta t} = \lim \frac{\sqrt{\varDelta \alpha^2 + \varDelta \beta^2 + \varDelta \gamma^2}}{\varDelta t}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}.$$

Diese Quadratwurzel ist also der Grenzwert des Verhältnisses $\omega / \varDelta t$.

So ist, wenn z. B. $t = s$ und $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ gesetzt wird, also 1 die von s abhängige veränderliche Richtung ist, die Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_1}{ds}\right)^2} = \lim \frac{\omega}{\varDelta s},$$

wobei ω der Winkel zweier Tangenten ist, deren Berührungspunkte durch einen Bogen von der Länge $\varDelta s$ getrennt sind; dem entspricht die obige Formel $ds = \varrho\, d\sigma$. Mit genau denselben Worten kann nach § 21 die Krümmung ebener Kurven definiert werden, die sich also hier mit $1/\varrho$ ergibt, wenn die betrachtete Raumkurve zufällig eben sein sollte.

Ebenso ist nach (6)

$$\left|\frac{1}{\tau}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\alpha_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{ds}\right)^2} = \lim \frac{\theta}{\varDelta s},$$

und θ ist der Winkel zweier Richtungen 3 in Punkten, die wiederum durch die Bogenlänge $\varDelta s$ getrennt sind.

Die Bedeutung der Torsion $|1/\tau|$ wird noch deutlicher, wenn wir eine Ebene durch den Punkt P und die Richtungen 1 und 2 ziehen, die Krümmungsebene oder Schmiegebene der Kurve. Ist S einer ihrer Punkte, ξ, η, ζ seine Koordinaten, so bildet die Strecke PS mit der Richtung 3 einen rechten Winkel, also ist nach § 23

$$\alpha_3(\xi - x) + \beta_3(\eta - y) + \gamma_3(\zeta - z) = 0,$$

oder auch nach (1), (2) und (3), indem wir einen gemeinsamen Faktor weglassen,

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung vergleichen wir mit einer anderen, die entsteht, wenn den Werten t, $t + \varDelta t$, $t + 2\varDelta t$ die Größen x, $x + \varDelta x$,

$x + \Delta x + (\Delta x + \Delta^2 x)$ usf. entsprechen, und die Differentiale durch die übrigens gleichbezeichneten Differenzen ersetzt werden:

$$\text{(8)} \qquad \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ \Delta^2 x & \Delta^2 y & \Delta^2 z \end{vmatrix} = 0;$$

diese ist erfüllt, wenn $\xi = x$, oder $\xi = x + \Delta x$, oder $\xi = x + 2\Delta x + \Delta^2 x$ und entsprechende Werte für η und ζ eingesetzt werden; sie ist also die Gleichung der Ebene durch die drei Kurvenpunkte, die den Parameterwerten t, $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$ entsprechen. Hebt man nun in den Gleichungen (7) und (8) die Faktoren dt^3 oder Δt^3 heraus, so gehen in letzterer Gleichung, wenn $\lim \Delta t = 0$, die Differenzquotienten in Ableitungen, also die Gleichung (8) in die Gleichung (7) über. Die Schmiegebene ist also die Grenzgestalt einer Ebene durch drei Kurvenpunkte, wenn diese zusammenrücken.

Der Winkel zweier benachbarter Binormalen 3, die auf den Schmiegebenen senkrecht stehen, ist der Winkel zweier Schmiegebenen, und die absolut genommene Torsion mißt in der Grenze den Drehwinkel der Schmiegebene im Verhältnis zur durchlaufenen Bogenlänge der Kurve.

Das Vorzeichen der Torsion $1/\tau$ hat eine anschauliche Bedeutung. Es stellt nach § 23 die Orientierung dreier Strecken dar, deren Komponenten sich beziehentlich von den Größen dx, dy, dz; d^2x, d^2y, d^2z; d^3x, d^3y, d^3z um positive Faktoren unterscheiden; das Vorzeichen ist also invariant bei den Koordinatentransformationen, auf die wir uns beschränken und die die Orientierung der Achsen ungeändert lassen. Jetzt werde im besonderen das Bezugssystem so gewählt, daß die x-Achse in die wachsenden Werten eines Parameters t entsprechende Tangentenrichtung im Punkt P fällt, die y-Achse in die Richtung der Hauptnormale des Punktes P; dann ist $dy = dz = 0$; die Gleichung der Schmiegebene ist $\zeta = 0$, also folgt u. a. $dz\,d^2x - dx\,d^2z = 0$, also $d^2z = 0$; nimmt man $t = x$ so folgt, daß man bis auf höhere Potenzen von x entwickeln kann

$$\text{(9)} \qquad y = ax^2 + \cdots, \qquad z = bx^3 + \cdots,$$

und die Größe S wird, da $d^2y = 2a\,dx^2$, $d^3z = 6b\,dx^3$ zu setzen ist,

$$\begin{vmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & d^2y & 0 \\ 0 & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 12ab\,dx^6,$$

also, wenn $dx > 0$ genommen wird, positiv oder negativ wie ab. Die Gleichungen (9) zeigen nun, wenn a und b positiv sind, daß die Projektion der Kurve auf die xy-Ebene auf derselben Seite der x-Achse wie die y-Achse liegt und die konkave Seite der y-Achsenrichtung zukehrt, daß ferner z mit x beim Passieren des Punktes P wächst. Von einem Punkte der negativen y-Achse betrachtet, geht die Kurve also von links unten nach rechts oben, wenn die positive z-Achse als Richtung nach oben angesehen wird, und liegt auf einem Zylinder, der dem Beobachter die konvexe Seite zukehrt. Die Kurve windet sich also wie ein Korkzieher. Ist eine der Größen a, b negativ, so windet sie sich in entgegengesetzter Weise; sind beide negativ, wieder wie wenn beide positiv sind. Das Vorzeichen der Größe τ entscheidet also über den Sinn der Windung der Kurve; das positive Zeichen gibt die Korkzieherwindung.

§ 26. Tangentialebenen und Normalen an Flächen.

Die Gleichung einer Fläche kann in einer der Formen

$$z = f(x, y), \qquad F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

gegeben sein, die auch für jede auf der Fläche verlaufende Kurve $\mathfrak{C}$, die durch den Punkt $P(x, y, z)$ geht, erfüllt sind. Längs dieser Kurve seien x, y, z Funktionen von t; dann kann man die Gleichungen (1) nach t differenzieren und erhält, $p = \partial f / \partial x$ und $q = \partial f / \partial y$ gesetzt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0, \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Nun sind die Differentiale $dx, \ldots$ den Richtungskosinus der Tangente der Kurve $\mathfrak{C}$ proportional; diese Tangente steht also nach § 23 senkrecht auf einer Strecke, deren Komponenten die Größen p, q, -1 sind, also einer Strecke, die festbleibt mit P. Die Gerade durch P, der sie angehört, nennen wir die Normale der Fläche im Punkt P; die in P auf ihr senkrechte Ebene, in der $Q\ (\xi, \eta, \zeta)$ ein beliebiger Punkt sei, enthält die in P berührenden Tangenten aller Kurven $\mathfrak{C}$, und heißt die Tangentialebene der Fläche im Punkt P. Die Komponenten der Strecke PQ sind $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$; die Gleichung, die ausdrückt, daß jede Strecke PQ auf der Normale senkrecht steht, ist nach § 23

$$(-1)(\zeta - z) + p(\xi - x) + q(\eta - y) = 0,$$

womit die Gleichung der Tangentialebene hergestellt ist.

Ist ξ, η, ζ ein Punkt der Normale, der N heiße, so müssen die Komponenten der Strecke PN den Größen $p, q, -1$ proportional sein, also

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = p : q : -1;$$

oder als Gleichungen der Normale erhält man

$$\xi - x = -p(\zeta - z), \quad \eta - y = -q(\zeta - z).$$

Nennen wir ν eine der beiden Richtungen der Normale, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\cos^2(x\nu) + \cos^2(y\nu) + \cos^2(z\nu) = 1, \\ &\cos(\nu x) : \cos(\nu y) : \cos(\nu z) = p : q : -1, \end{aligned} \tag{2}$$

aus diesen folgen die Werte

$$\cos(x\nu) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos(y\nu) = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos(z\nu) = \frac{-1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

oder die drei entgegengesetzten; die hingeschriebenen gelten, wie die dritte Gleichung zeigt, für diejenige Richtung der Normale, die mit der z-Achse einen stumpfen Winkel bildet.

Legt man die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ zugrunde, so braucht man nur die Werte

$$p = -\frac{F_x}{F_z}, \quad q = -\frac{F_y}{F_z},$$

in denen F_x für F'_x oder $D_x F$ usf. gesetzt ist, einzusetzen; die Gleichung der Tangentialebene wird

$$(\xi - x) F_x + (\eta - y) F_y + (\zeta - x) F_z = 0,$$

die Gleichungen der Normale

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = F_x : F_y : F_z.$$

Da ferner

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{\varepsilon}{F_z} \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

zu setzen ist, wobei $\varepsilon = \pm 1$ und εF_z positiv ist, so findet man für die oben definierte Normalenrichtung ν die Gleichungen

$$\cos(x\nu) = \frac{\varepsilon F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos(y\nu) = \frac{\varepsilon F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$

$$\cos(z\nu) = \frac{\varepsilon F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

Da nun die Funktion F bei wachsenden Werten von z zunimmt oder abnimmt, je nachdem ε positiv oder negativ ist, so kann man auch sagen, daß die Richtung N, für welche die Gleichungen

$$\cos(xN) = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos(yN) = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$
$$\cos(zN) = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

bestehen, diejenige Normalrichtung ist, nach der die Größe $F(x, y, z)$ wächst; sie ist mit ν identisch oder entgegengesetzt, je nachdem $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist.

Eine dritte Form der Richtungskosinus der Normale ergibt sich, wenn die Fläche durch drei Gleichungen

$$(3) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

dargestellt wird, in denen u, v Unabhängige bedeuten, die man etwa aus den ersten beiden Gleichungen ausrechnen und in die dritte einsetzen könnte, um die erste Form der Flächengleichung $z = f(x, y)$ zu erhalten. Will man z. B. die Erdoberfläche, deren Radius a sei, darstellen, und ist P ein beliebiger Punkt, O der Mittelpunkt und zugleich Anfangspunkt des Bezugssystems, die z-Achse nach dem Nordpol A und die x-Achse nach dem Nullmeridian hin gerichtet, so kann man für u den hohlen Winkel AOP, für v die geographische Länge des Punktes P nehmen und findet

$$(4) \qquad x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \cos u,$$

woraus sich sofort $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ergibt; ebenso kann man für die Ellipsoidfläche setzen:

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = b \sin u \sin v, \quad z = c \cos v,$$

da sich hieraus

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

ergibt.

In der Gleichung $z = f(x, y)$ kann man nun die Werte (3) eingesetzt denken und nach den Unabhängigen u und v ableiten; dann erhält man, indem man x_u für $\partial x/\partial u$ usf. schreibt,

$$z_u = p x_u + q y_u, \quad z_v = p x_v + q y_v,$$

also den Gleichungen (2) zufolge:

$$p : q : -1 = y_u z_v - y_v z_u : -(x_u z_v - x_v z_u) : x_u y_v - x_v y_u$$
$$= \cos(\nu x) : \cos(\nu y) : \cos(\nu z) = \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} : -\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} : \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

und wenn

$$\varDelta = \sqrt{(y_u z_v - y_v z_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2}$$

gesetzt wird, ergibt sich aus der Gleichung

$$\cos^2(\nu x) + \cos^2(\nu y) + \cos^2(\nu z) = 1$$

für eine der beiden Normalenrichtungen

$$\cos(Nx) = \frac{y_u z_v - y_v z_u}{\varDelta},$$

$$\cos(Ny) = \frac{-(x_u z_v - x_v z_u)}{\varDelta},$$

$$\cos(Nz) = \frac{x_u y_v - x_v y_u}{\varDelta};$$

die Richtung N bildet mit der positiven z-Achse einen spitzen oder stumpfen Winkel, je nachdem $x_u y_v - x_v y_u > 0$ oder < 0, und Ähnliches läßt sich bezüglich der anderen Achsen aussagen.

Man kann die Richtung N aber noch anders bestimmen. Auf der Fläche $z = f(x, y)$ erhält man Kurven, wenn man v oder u festen Werten gleichsetzt; auf den Kurven $v = \text{const.}$, also im obigen Beispiel der Erdkugel auf den Breitenkreisen, kann u als Parameter gelten, und die im Sinne wachsender u, also in der Richtung $dv = 0$, $du > 0$ gezogene Tangente dieser Kurve, im Beispiel die nach Osten gerichtete, hat nach § 24 die Richtungskosinus

$$\frac{x_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}, \quad \frac{y_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}, \quad \frac{z_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}};$$

ebenso hat die in der Richtung $du = 0$, $dv > 0$ gezogene Tangente der Fläche und der Kurve $u = \text{const.}$, im Beispiel die nach Süden gerichtete Tangente des Meridians, die Richtungskosinus

$$\frac{x_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}, \quad \frac{y_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}, \quad \frac{z_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}.$$

Nennen wir diese Richtungen T_u und T_v, so ergibt sich sofort

$$\begin{vmatrix} \cos(xT_u) & \cos(yT_u) & \cos(zT_u) \\ \cos(xT_v) & \cos(yT_v) & \cos(zT_v) \\ \cos(xN) & \cos(yN) & \cos(zN) \end{vmatrix} = \frac{\varDelta^2}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}};$$

diese Größe ist also positiv und nach § 23 folgt hieraus: N ist diejenige Flächennormale, die gegen die Richtungen T_u und T_v so orientiert ist, wie die z-Achse zur x- und y-Achse des Bezugssystems.

Die Größe $\varDelta$ ist leicht anzugeben, wenn man das Bogenelement einer beliebigen auf der Fläche liegenden Kurve kennt. Dasselbe drückt sich aus durch die Formel

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \sqrt{(x_u\,du + x_v\,dv)^2 + (y_u\,du + y_v\,dv)^2 + (z_u\,du + z_v\,dv)^2} \\ &= \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}, \end{aligned}$$

wobei gesetzt ist

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

und eine leichte Umrechnung gibt

$$\varDelta^2 = EG - F^2.$$

Auf der Erdkugel findet man aus den Formeln (4)

$$E = a^2, \ F = 0, \ G = a^2 \sin^2 u, \ ds^2 = a^2 (du^2 + \sin^2 u\,dv^2),$$
$$\varDelta = a^2 \sin u.$$

Beispiele auch für die früheren Formeln dieses Paragraphen bieten die Flächen zweiten Grades dar. Bei den Flächen ohne Mittelpunkt, deren Gleichung in der Form $z = Ax^2 + By^2$ geschrieben werden kann, wird man die Formeln in p und q, z. B. (2) benutzen; bei Mittelpunktsflächen, deren Gleichungen in der Form $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ enthalten sind, wird man, um Wurzelzeichen zu vermeiden, die in F_x, F_y, F_z ausgedrückten Formeln benutzen. Für das dreiachsige Ellipsoid z. B., dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, findet man als Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) + \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0$$

oder

$$\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1,$$

woraus folgt, daß die Strecken, die diese Ebene von den Koordinatenachsen abschneidet, der Reihe nach a^2/x, b^2/y, c^2/z sind.

§ 27. Die Krümmung der Flächen.

Durch einen beliebigen Punkt P auf einer gegebenen Fläche werde eine Ebene gelegt, die die Fläche in einer ebenen Kurve $\mathfrak{C}$ schneidet. Der Krümmungsmittelpunkt kann, wie in § 24 bemerkt,

nach der allgemeinen für Raumkurven abgeleiteten Formel berechnet werden; die Richtungskosinus der nach dem Krümmungsmittelpunkte hingehenden Normale N_0 der ebenen Kurve im Punkt P haben daher nach § 24 (2), wenn wir die dortige Bezeichnung ds durch $d\sigma$ ersetzen, die Werte

$$\frac{\xi - x}{\varrho} = \varrho \frac{d\alpha}{d\sigma}, \quad \frac{\eta - y}{\varrho} = \varrho \frac{d\beta}{d\sigma}, \quad \frac{\zeta - z}{\varrho} = \varrho \frac{d\gamma}{d\sigma},$$

wobei

$$\alpha = \frac{dx}{d\sigma}, \quad \beta = \frac{dy}{d\sigma}, \quad \gamma = \frac{dz}{d\sigma}.$$

Die Flächennormale N, die mit der z-Achse einen spitzen Winkel bildet, hat im Punkte P die Richtungskosinus

$$X = \cos(xN) = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = \cos(yN) = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$Z = \cos(zN) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

man findet also nach § 23

$$\frac{\cos(NN_0)}{\varrho} = \frac{X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z}{d\sigma^2}; \tag{1}$$

dabei sind die Gleichungen

$$d\alpha = d\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) = \frac{d^2x}{d\sigma} - \frac{dx\,d^2\sigma}{d\sigma^2}, \cdots X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

benutzt. Nimmt man im besonderen x und y als Unabhängige, so hat man die Gleichungen $d^2x = d^2y = 0$,

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

wobei wieder $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$ gesetzt ist. So erhält man

$$\frac{\cos(NN_0)}{\varrho} = \frac{r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

und hier ist besonders zu beachten, daß rechts von den auf die Kurve $\mathfrak{C}$ bezüglichen Größen nur erste Differentiale vorkommen, so daß bei zwei Kurven $\mathfrak{C}$, die in P dieselbe Tangente, also dieselben Verhältnisse $dx/d\sigma$ usf. darbieten, die rechte Seite denselben Wert hat. Darin liegt der Satz von Meusnier, nach welchem die Krümmungen aller durch eine bestimmte Tangente gehenden Schnitte der Fläche nach der Formel

$$\varrho = \cos(NN_0)\,.\,\text{const.}$$

zusammenhängen. Fallen besonders N und N_0 zusammen, so ist $\mathfrak{C}$ in einen Normalschnitt der Fläche übergegangen, d. h. in einen Schnitt einer durch die Normale des Punktes P gehenden Ebene, den wir $\mathfrak{C}_0$ nennen. Ist in dieser $\varrho = R$, so hat man allgemein, da $\cos(NN_0) = \pm 1$,

$$\pm \frac{\cos(NN_0)}{\varrho} = \frac{1}{R}, \tag{2}$$

und das Vorzeichen ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt der Kurve $\mathfrak{C}^0$ von P aus in der Richtung N liegt oder in der entgegengesetzten. Bei der Untersuchung der Krümmungen aller Schnitte $\mathfrak{C}_0$ ist es zweckmäßig, dem Krümmungsradius das positive oder negative Vorzeichen beizulegen, je nachdem der erste oder zweite der erwähnten beiden Fälle eintritt; dann geben die Formeln (1) und (2) allgemein, indem ϱ immer positiv, R positiv oder negativ ist,

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos(NN_0)}{\varrho} = \frac{X d^2 x + Y d^2 y + Z d^2 z}{d\sigma^2}, \tag{3}$$

oder, wenn wieder $d^2 x = d^2 y = 0$, $dy/dx = y'$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{R} = \frac{r + 2 s y' + t y'^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\sqrt{1 + y'^2 + (p + q y')^2}},$$

wobei aber auch $y' = \infty$ werden kann, so daß die allgemeine Formel lautet

$$\frac{1}{R} = \left[r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2\right](1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

$$\cdot\left[\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \left(p\frac{dx}{d\sigma} + q\frac{dy}{d\sigma}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man, was hiernach möglich ist,

$$\frac{dx}{d\sigma} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \sin\alpha,$$

so ist auf dem betrachteten Normalschnitt $dy/dx = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$; also ist α der eine Winkel der Schnittgeraden dieses Schnittes und der Tangentialebene $z = 0$ mit der x-Achse, $\alpha + \pi$ der andere; läßt man α von 0 einschließlich bis 2π ausschließlich wachsen, so erhält man jeden Normalschnitt genau zweimal. Verfährt man nun wie bei der Transformation eines Kegelschnitts auf die Hauptachsen, indem man $\alpha = \beta + \alpha_0$ setzt, so erhält man

$$\begin{aligned} 1/R &= r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha \\ &= r^0\cos^2\beta + 2s^0\cos\beta\sin\beta + t^0\sin^2\beta, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} s^0 &= 2(r - t)\cos\alpha_0\sin\alpha_0 + s(\cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0) \\ &= (r - t)\sin 2\alpha_0 + s\cos 2\alpha_0, \end{aligned}$$

also $s^0 = 0$, wenn $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = s/(t - r)$ gesetzt wird, was immer möglich ist, da die Größe tg alle positiven und negativen Werte annimmt; im Falle $t = r$ setzt man $\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi$. Auf diese Weise erhält man die Gleichung:

$$(5) \qquad 1/R = r^0\cos^2\beta + t^0\sin^2\beta, \quad \beta = \alpha - \alpha_0.$$

Wäre nun $r^0 = t^0$, so wäre $1/R = r^0$ konstant; alle Normalschnitte der Fläche im betrachteten Punkte P hätten dieselbe Krümmung; in diesem Falle nennen wir den betrachteten Punkt P einen Nabelpunkt der Fläche.

Von diesem besonderen Falle abgesehen, sei etwa $r^0 > t^0$; dann zeigt die Formel (5) in etwas anderer Form geschrieben:

$$(6) \qquad 1/R = r^0 - (r^0 - t^0)\sin^2\beta = t^0 + (r^0 - t^0)\cos^2\beta,$$

daß r^0 der größte, t^0 der kleinste Wert von $1/R$ ist, und daß, wenn man β von 0 bis 2π die vier Quadranten durchlaufen läßt, die Größe $1/R$ von r^0 bis t^0 abnimmt, dann von t^0 bis r^0 wächst, wieder von r^0 bis t^0 abnimmt und wieder bis r^0 wächst. Werte β, die sich um π unterscheiden, geben denselben Wert von $1/R$, dessen Vorzeichen nach der Definition der Größe R die Seite angibt, nach der hin von P aus der Krümmungsmittelpunkt eines Normalschnittes gelegen ist. Ist $r^0 < t^0$, so sind in den Angaben über den Wert (6) die Worte größte und kleinste, wächst und abnimmt zu vertauschen.

Haben die Größen r^0 und t^0 dasselbe Vorzeichen, so gilt dieses auch für die Größe $1/R$; die Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte liegen von P aus nach derselben Richtung, nach der also

auch alle Normalschnitte ihre hohle Seiten kehren; die Fläche heißt in einem solchen Punkte elliptisch gekrümmt, konkav-konkav oder konvex-konvex. Haben die Größen r^0 und t^0 entgegengesetzte Vorzeichen, so kann auch R sowohl positiv wie negativ werden; die Normalschnitte kehren von P aus ihre hohle Seite teils nach der einen, teils nach der anderen Richtung; die Fläche ist sattelförmig, hyperbolisch gekrümmt oder konkav-konvex. Den Übergang bilden die Normalschnitte, in denen $1/R = 0$ wird, also Wendepunkte in P vorhanden sind; sie trennen die nach der einen und anderen Normalrichtung hohlen Normalschnitte voneinander.

Einen Übergang bildet der Fall, daß eine der Größen r^0, t^0 verschwindet, z. B. $r^0 > 0$, $t^0 = 0$, dann wird $1/R$ für den einen Normalschnitt $\beta = \pi/2$ oder $\beta = \frac{3}{2}\pi$ verschwinden, bleibt übrigens positiv; die Normalschnitte kehren alle bis auf einen ihre Höhlung nach derselben Seite; der eine bietet einen Wendepunkt dar. Der betrachtete Punkt P heißt dann parabolisch gekrümmt. Zylinder und Kegelflächen enthalten nur solche Punkte.

Die Schnitte der Fläche mit den Normalebenen, in denen $\beta = 0$ und $\beta = \pi/2$ ist, heißen Hauptschnitte; die Werte r^0 und t^0 die Hauptkrümmungen, die reziproken Werte die Hauptkrümmungsradien; sie haben Vorzeichen und im parabolischen Falle wird einer von ihnen unendlich. Nennen wir sie R_1 und R_2, so gibt nach (5) die Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\beta}{R_1} + \frac{\sin^2\beta}{R_2} \tag{7}$$

den Krümmungsradius eines Normalschnittes, der mit dem Schnitte $\beta = 0$, in welchem $R = R_1$, positiv herum gerechnet den Winkel β bildet. Für den auf dem betrachteten senkrechten Normalschnitt ergibt sich also ein Wert R' nach der Formel

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2\beta}{R_1} - \frac{\cos^2\beta}{R_2},$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Die Summe der mit Vorzeichen genommenen Krümmungen zweier aufeinander senkrechter Normalschnitte ist also fest, und zwar gleich der Summe der Hauptkrümmungen.

Man sieht aus der Gleichung (7), daß die Hauptschnitte völlig bestimmt werden durch die Forderung

$$(8)\qquad D_\beta\left(\frac{1}{R}\right)=2\cos\beta\sin\beta\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=0;$$

denn diese Gleichung gibt für β die Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$.

In diese Gleichung werde für $1/R$ der Wert (3) eingesetzt und x, y, z wie in § 26 als Funktionen zweier Unabhängiger u, v ausgedrückt gedacht, wobei $X\varDelta = y_u z_v - y_v z_u$ und Ähnliches für Y und Z gilt; man hat ferner offenbar $d^2x = x_{uu}du^2 + 2x_{uv}du\,dv + x_{vv}dv^2$ zu setzen usf.; so ergibt sich

$$(9)\qquad \frac{1}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}=\frac{X\,d^2x+Y\,d^2y+Z\,d^2z}{d\sigma^2},$$

dabei ist

$$(10)\qquad \varDelta\,.\,L=\begin{vmatrix}x_{uu}&y_{uu}&z_{uu}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix},\quad \varDelta\,.\,M=\begin{vmatrix}x_{uv}&y_{uv}&z_{uv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix},$$

$$\varDelta\,.\,N=\begin{vmatrix}x_{vv}&y_{vv}&z_{vv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}.$$

Nun bestimmt jeder Wert von β eine Richtung auf der Fläche, also ein Verhältnis $du:dv$; man darf daher auch die Größen

$$\lambda=\frac{du}{\sqrt{du^2+dv^2}},\quad \mu=\frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}}$$

als Funktionen von β betrachten und kann die Gleichung (9) schreiben:

$$\varPhi(\lambda,\mu)=\frac{1}{R}\,\varPsi(\lambda,\mu),\quad \varPsi(\lambda,\mu)=E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2,$$

$$\varPhi(\lambda,\mu)=L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2.$$

Differenziert man nach β, so ergibt sich

$$-\varPhi'_\lambda D_\beta\lambda-\varPhi'_\mu D_\beta\mu+\frac{1}{R}(\varPsi'_\lambda D_\beta\lambda+\varPsi'_\mu D_\beta\mu)+\varPsi(\lambda,\mu)D_\beta\left(\frac{1}{R}\right)=0;$$

da nun $\varPsi$ nicht verschwindet, ist die Gleichung (8) erfüllt, wenn man ansetzt

$$-\varPhi'_\lambda+\frac{1}{R}\varPsi'_\lambda=0,\quad -\varPhi'_\mu+\frac{1}{R}\varPsi'_\mu=0,$$

und diese ergeben, wenn man die Werte von $\varPhi$ und $\varPsi$ einsetzt und das Verhältnis λ/μ eliminiert,

$$(11)\qquad \left(M-\frac{1}{R}F\right)^2-\left(L-\frac{1}{P}E\right)\left(N-\frac{1}{R}G\right)=0.$$

Die hierdurch bestimmten Werte von R erfüllen die Gleichung (8); nun sind solche nach dem Früheren nur zwei vorhanden; also sind diese mit den Wurzeln der letzten Gleichung identisch, und man erhält im besonderen

$$(12) \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Nach den Gleichungen (10) können nun die Größen $\Delta^2 . LN$ und $\Delta^2 . M^2$ mittels des Multiplikationssatzes der Determinanten (§ 9) in einfache Determinanten verwandelt werden; man erhält so

$$\Delta^2 . (LN - M^2)$$
$$= \begin{vmatrix} \sum x_{uv}^2 & \sum x_u x_{uv} & \sum x_v x_{uv} \\ \sum x_u x_{uv} & E & F \\ \sum x_v x_{uv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sum x_{uu} x_{vv} & \sum x_u x_{vv} & \sum x_v x_{vv} \\ \sum x_u x_{uu} & E & F \\ \sum x_v x_{uu} & F & G \end{vmatrix};$$

dabei ist z. B. $\sum x_{uv}^2 = x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2$ gesetzt, und ähnlich ist die Bedeutung des Zeichens $\sum$ überall. Die Bedeutung der Determinanten zeigt unmittelbar, daß man hierfür schreiben kann

$$\Delta^2 . (LN - M^2)$$
$$= \begin{vmatrix} \sum (x_{uv}^2 - x_{uu} x_{vv}) & \sum x_u x_{uv} & \sum x_v x_{uv} \\ \sum x_u x_{uv} & E & F \\ \sum x_v x_{uv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \sum x_u x_{vv} & \sum x_v x_{vv} \\ \sum x_u x_{uu} & E & F \\ \sum x_v x_{uu} & F & G \end{vmatrix}.$$

Da nun $E = \sum x_u^2$, $F = \sum x_u x_v$, $G = \sum x_v^2$, ergibt sich, indem man einfach differenziert,

$$\sum x_u x_{vv} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \quad \sum x_v x_{uu} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\sum (x_{uv}^2 - x_{uu} x_{vv}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2},$$

$$\sum x_u x_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \quad \sum x_v x_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \quad \sum x_u x_{uu} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u},$$

$$\sum x_v x_{vv} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v};$$

diese Größe $\Delta^2 (LN - M^2) = (EG - F^2)(LN - M^2)$ und damit auch nach (12) die Größe $1/R_1 R_2$ ist also allein durch die Größen E, F, G und ihre Teilableitungen nach u und v ausdrückbar.

Die Gleichung (11) gibt noch

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN + GL - 2MF}{EG - F^2};$$

diese Größe heißt die mittlere Krümmung, die Größe $1/R_1 R_2$ das Krümmungsmaß; letzteres ist offenbar positiv, negativ oder Null, je nachdem die Fläche elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch gekrümmt ist.

Nimmt man $u = x$, $v = y$, so erhält man

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad L = r(1 + p^2 + q^2)^{-1/2},$$
$$M = s(1 + p^2 + q^2)^{-1/2}, \quad N = t(1 + p^2 + q^2)^{-1/2},$$
$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2)}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}.$$

Die obige Ausdrucksform des Krümmungsmaßes durch E, F, G und ihre Ableitungen enthält das Theorema egregium von Gauß. Es besagt, daß, wenn zwei Flächen dieselben inneren Maßverhältnisse, d. h. dieselbe Form von $d\sigma$ aufweisen, wenn z. B. die eine in die andere durch Biegung ohne Dehnung der Längen übergeführt werden kann, das Krümmungsmaß in jedem Punkte unverändert bleibt.

§ 28. Einhüllende und umhüllte Kurven.

Enthält die Gleichung einer ebenen Kurve einen Parameter h, und wird sie in der Form

$$F(x, y, h) = 0 \tag{1}$$

geschrieben, so stellt sie eine Schar von Kurven dar, entsprechend den verschiedenen Werten, die man dem Parameter h geben kann; man denke nur etwa an die Kreisschar $x^2 + y^2 = h^2$, in der der Radius der Parameter ist. Eine der Kurven (1) kann nun mit der Nachbarkurve

$$F(x, y, h + \Delta h) = 0$$

einen Punkt gemein haben, für den nach dem Mittelwertsatz, wenn die Ableitung F'_h in dem betrachteten Gebiete stetig ist, die Gleichung

$$F'_h(x, y, h + \theta \Delta h) = 0, \quad 0 < \theta < 1$$

gilt. Betrachtet man also hinreichend kleine Δh, d. h. Schnitte hinreichend nahe benachbarter Kurven (1), so erfüllen die Schnittpunkte mit immer größerer Annäherung die Gleichung

$$F'_h(x, y, h) = 0, \quad d_h F(x, y, h) = 0, \tag{2}$$

die mit der Gleichung (1) zusammen eine Kurve bestimmt, die wir die Hülle oder Enveloppe der Kurven (1) nennen, die ihr gegenüber die Umhüllten heißen mögen. Nähern sich die Schnittpunkte, wenn $\lim h = 0$, bestimmten Grenzlagen, so erfüllen diese die letzte Gleichung genau, da ja F'_h als stetig vorausgesetzt wird. Man erhält

also die Gleichung der Hülle, indem man die Gleichung der Umhüllten so differenziert, daß die laufenden Koordinaten x, y fest bleiben; sodann eliminiert man h aus den Gleichungen (1) und (2).

Die Hülle wird von den Umhüllten berührt; denn die längs der Umhüllten geltende Differentialbeziehung

$$F_x dx + F_y dy = 0 \tag{3}$$

gilt auch längs der Hülle; auf dieser ist h eine Funktion von x, da die Gleichungen (1) und (2) zusammen bestehen; es gilt also eine Gleichung

$$F_x dx + F_y dy + F_h dh = 0,$$

die sich aber nach (2) auf die Form (3) zurückführt. Längs der Hülle und der Umhüllten hat also dy/dx denselben Wert; beide Kurven haben in einem gemeinsamen Punkte auch dieselbe Tangente.

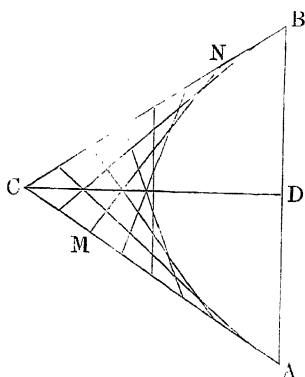



Fig. 31.

Man kann die Hülle auch dadurch entstanden denken, daß man $\varDelta h$ konstant $= \delta$ setzt, und den Schnittpunkt jeder Scharkurve (1) mit derjenigen betrachtet, deren Parameter um δ größer ist; den Ort dieser Schnittpunkte ergibt die Elimination von h aus den Gleichungen

$$F(x, y, h) = 0, \quad F(x, y, h + \delta) = 0,$$

deren zweite auch durch die Gleichung

$$\frac{F(x, y, h + \delta) - F(x, y, h)}{\delta} = 0$$

ersetzt werden kann. Die so erhaltene Kurve geht in die Hülle über, wenn man δ unendlich abnehmen läßt.

I. Das erste Beispiel hierzu mag etwas ausführlicher betrachtet werden. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC (Fig. 31), dessen Schenkel $AC = BC = c$ sein mögen, zieht man die Geraden MN so, daß immer $CM = BN$ ist; man sucht die Einhüllende aller dieser Geraden. Nehmen wir AC als Abszissen-, BC als Ordinatenachse und setzen

$$CM = BN = k,$$

so sind die Gleichungen zweier solcher Geraden

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{c - k} = 1, \qquad \frac{x}{k + \delta} + \frac{y}{c - (k + \delta)} = 1,$$

oder auch, wenn man die Brüche wegschafft, die zweite Gleichung von der ersten abzieht und mit δ dividiert,

$$(c-k)x + ky = k(c-k),$$
$$2k - c - x + y + \delta = 0.$$

Der zweiten Gleichung kann man den Wert von k entnehmen und in die erste substituieren; die Gleichung des gesuchten Ortes lautet dann

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 - \delta^2 = 0.$$

und bestimmt eine Parabel, auf welcher die Durchschnitte aller Geraden liegen, welche dadurch entstehen, daß M und N jedesmal um δ fortrücken. Für stetig nacheinander folgende Gerade hat man daher als Gleichung der Hülle

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 = 0$$

oder

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}.$$

Dasselbe findet man unmittelbar, wenn man k aus den Gleichungen

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{c-k} = 1 \quad \text{und} \quad -\frac{x}{k^2} + \frac{y}{(c-k)^2} = 0$$

eliminiert. Beiläufig werde noch bemerkt, daß der Scheitel dieser Parabel in der Mitte der Dreieckshöhe CD liegt, daß sie von AC und BC berührt wird, und daß ihr Halbparameter $= \overline{BD}^2 : CD$ ist.

II. Die Hülle der Normalen einer beliebigen Kurve zu bestimmen.

Die Gleichung der Normalen ist

$$\xi - x + (\eta - y)y' = 0, \tag{4}$$

in ihr ist x der Parameter h der allgemeinen Theorie; ξ, η sind das, was dort durch x, y bezeichnet wurde. Man hat also die Gleichung nach x zu differenzieren und dabei ξ, η als Konstante zu betrachten: das gibt

$$-1 - y'^2 + (\eta - y)y'' = 0;$$

kombiniert mit der Gleichung (4) ergibt diese Gleichung

$$\eta - y = \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \xi - x = -y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \tag{5}$$

also genau die Gleichungen (4) des § 21, in denen (ξ, η) der Krümmungsmittelpunkt der Kurve ist, die der Punkt (x, y) beschreibt. Die Hülle der Normalen ist also der Ort der Krümmungsmittelpunkte, also die Evolute, die von jeder Normalen im zugehörigen Krümmungsmittelpunkte berührt wird.

Sieht man in den Gleichungen (5), wie es sein muß, ξ und η als Funktionen von x an und schreibt sie

$$\eta = y + \frac{\varrho}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \xi = x - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\varrho,$$

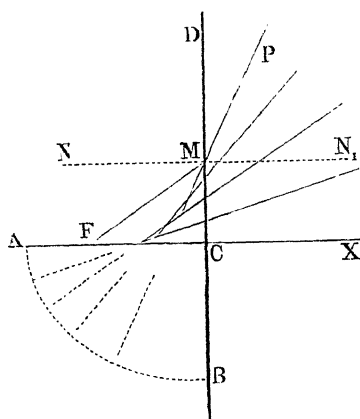
so ergibt sich

$$d\eta = y'dx + \frac{d\varrho}{\sqrt{1+y'^2}} + \varrho\, d\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

$$d\xi = dx - \frac{y'd\varrho}{\sqrt{1+y'^2}} - \varrho\, d\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

und hieraus

$$d\xi^2 + d\eta^2 = d\varrho^2,$$

Fig. 32.

woraus die Eigenschaft der Evolute, durch Abwicklung eines undehnbaren Fadens die ursprüngliche Kurve zu liefern, erkannt wird. Ist σ die Bogenlänge der Evolute, so folgt aus der letzten Gleichung $d\sigma = \pm d\varrho$, $\sigma \pm \varrho = \text{const.}$ Die Zunahme des Radius ϱ beim Fortgange längs der Evolute von A bis B ist also absolut genommen gleich dem Evolutenbogen AB, solange auf diesem $d\varrho$ nicht verschwindet.

III. In Fig. 32 sei F ein leuchtender Punkt, CD die Trennungslinie zweier durchsichtigen Media von verschiedener Brechbarkeit, FM ein Lichtstrahl, welcher bei M jene Trennungslinie trifft und nach dem bekannten Gesetze

$$\frac{\sin N_1 MP}{\sin NMF} = m$$

gebrochen wird; man sucht die einhüllende Kurve aller gebrochenen Strahlen.

Nimmt man C zum Koordinatenanfang, den ungebrochenen Strahl CX zur x-Achse, CD zur y-Achse und setzt $FC = c$, $CM = k$, $1 - m^2 = n^2$, so ist die Gleichung irgend eines gebrochenen Strahles MP

$$y = \frac{mk}{\sqrt{c^2 + n^2k^2}}x + k$$

oder

$$m^2k^2x^2 - (c^2 + n^2k^2)(y-k)^2 = 0. \tag{6}$$

Partiell in Beziehung auf k differenziert gibt dies

$$(7) \qquad m^2 k x^2 + (c^2 + n^2 k^2)(y-k) - n^2 k (y-k)^2 = 0;$$

multipliziert man dies mit k und subtrahiert von dem Produkte die Gleichung (6), so läßt sich der Rest mit $y - k$ dividieren und bleibt

$$c^2 y + n^2 k^3 = 0 \quad \text{oder} \quad k = -\sqrt[3]{\frac{c^2 y}{n^2}};$$

multipliziert man dagegen die Gleichung (7) mit $y - k$ und addiert die Gleichung (6), so kommt

$$m^2 x^2 y - n^2 (y-k)^3 = 0 \quad \text{oder} \quad y - k = \sqrt[3]{\frac{m^2 x^2 y}{n^2}}.$$

Indem man hierzu den vorigen Wert von k addiert, erhält man als Gleichung der Hülle

$$y = -\sqrt[3]{\frac{c^2 y}{n^2}} + \sqrt[3]{\frac{m^2 x^2 y}{n^2}}$$

oder

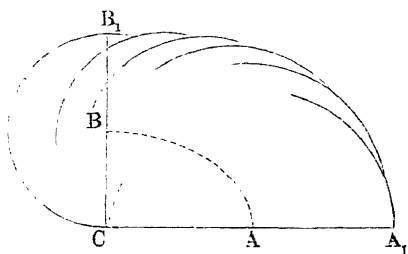
$$\left(\frac{mx}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{ny}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Fig. 33.

Für $m > 1$ charakterisiert diese Gleichung die Evolute einer Ellipse, für $m < 1$ eine Hyperbelevolute; die gebrochenen Strahlen stehen also im ersten Falle auf einer Ellipse, im zweiten Falle auf einer Hyperbel senkrecht. In jedem Falle ist F ein Brennpunkt des Kegelschnittes und seine Hauptthalbachse $= mc$ oder $= c\,\mu$, wenn μ den sogenannten Brechungsexponenten bezeichnet.

IV. Man sucht die Hülle aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ellipse liegen und deren Peripherien durch den Mittelpunkt derselben Ellipse gehen. Nimmt man die Achsen der Ellipse $CA = a$, $CB = b$ (Fig. 33) zu Koordinatenachsen und bezeichnet die Koordinaten eines Ellipsenpunktes mit p und q, sowie mit r den Radius eines Kreises, welcher (p, q) zum Mittelpunkt hat und durch C geht, so gelten, den angegebenen Bedingungen gemäß, folgende Gleichungen:

$$(8) \qquad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1,$$

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2; \qquad p^2 + q^2 = r^2;$$

aus den beiden letzten folgt

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0. \tag{9}$$

Der veränderliche Parameter ist hier p, und für q wäre sein Wert aus (8) zu substituieren, doch bleibt die Rechnung symmetrischer, wenn man die zwei Gleichungen (9) und (8) mit p und q beibehält. Durch Teildifferentiation derselben erhält man

$$\frac{p}{a^2} + \frac{q}{b^2}\frac{dq}{dp} = 0, \qquad x + y\frac{dq}{dp} = 0,$$

und nach Elimination von $\frac{dq}{dp}$

$$\frac{py}{a^2} - \frac{qx}{b^2} = 0. \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (8) und (10) finden sich p und q, und wenn man deren Werte in die Gleichung (9) einsetzt, so ergibt sich

$$(x^2 + y^2)^2 = (2a)^2 x^2 + (2b)^2 y^2$$

als Gleichung der gesuchten Kurve; sie ist die Fußpunktlinie einer aus den Halbachsen $2a$ und $2b$ konstruierten Ellipse.

V. Die Abänderung des allgemeinen Verfahrens, welche im letzten Beispiel benutzt wurde, kann allgemein auf folgende Weise dargestellt werden. Die Gleichung der veränderlichen Kurve sei

$$F(x, y, \varkappa, \lambda) = 0 \tag{11}$$

und enthalte zwei veränderliche Parameter $\varkappa$ und λ, welche aber nicht voneinander unabhängig, sondern durch die Bedingungsgleichung

$$\varphi(\varkappa, \lambda) = 0 \tag{12}$$

verbunden sein mögen. Das Nächstliegende wäre nun, erst λ aus (12) und (11) zu eliminieren und dann teilweise nach $\varkappa$ zu differenzieren; man kann aber auch den umgekehrten Weg gehen, wenn man die Änderung beachtet, welche λ infolge der Änderung von $\varkappa$ erleidet. Aus der Gleichung (11) folgt nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\cdot\frac{d\lambda}{d\varkappa} = 0,$$

anderseits ist nach (12)

$$\frac{d\lambda}{d\varkappa} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}},$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung substituiert, so erhält man

$$(13)\qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \varkappa}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda}}.$$

Durch Elimination von $\varkappa$ und λ aus den drei Gleichungen (13), (11) und (12) gelangt man wieder zur Gleichung der Hülle.

§ 29. Einhüllende Flächen.

I. Die im Eingange von § 28 angestellten Betrachtungen passen auf den Fall, wo die einhüllende Fläche einer Schar von Flächen gesucht wird, welche dadurch entstehen, daß man in der Flächengleichung

$$F(x, y, z, \varkappa) = 0$$

der Konstanten $\varkappa$ stetig aufeinander folgende verschiedene Werte beilegt; die Gleichung der Hüllfläche oder Hülle ergibt sich nämlich, indem man aus den Gleichungen

$$(1)\qquad F(x, y, z, \varkappa) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, z, \varkappa)}{\partial \varkappa} = 0$$

die Größe $\varkappa$ eliminiert.

Läßt man z. B. den Mittelpunkt einer Kugelfläche auf der z-Achse fortrücken und gleichzeitig den Radius proportional dem Abstande des Zentrums vom Koordinatenanfange wachsen, so ist die Gleichung der Kugelfläche, unter q eine Konstante verstanden,

$$x^2 + y^2 + (z - \varkappa)^2 = (q\varkappa)^2;$$

partiell in Beziehung auf $\varkappa$ differenziert gibt dies

$$-(z - \varkappa) = q^2 \varkappa$$

und durch Elimination von $\varkappa$ findet sich

$$x^2 + y^2 = \frac{q^2}{1 - q^2} z^2$$

als Gleichung der Hüllfläche. Für $q^2 < 1$ ist letztere ein Rotationskegel, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt, und dessen Seite mit der Achse den Winkel $\arcsin q$ einschließt.

II. Ein wichtiges Beispiel bieten die Normalebenen einer Raumkurve, die in der Bezeichnung des § 25 durch die Gleichung

$$(2)\qquad (\xi - x)\, dx + (\eta - y)\, dy + (\zeta - z)\, dz = 0$$

dargestellt werden. Hier ist ξ, η, ζ für x, y, z und t für $\varkappa$ zu nehmen; von t hängen x, y, z und die Differentiale ab. Die erhaltene Regel sagt aus: Für Punkte der Hülle der Normalebenen gilt außer der Gleichung (2) diejenige, die entsteht, wenn man sie nach t differenziert, indem man ξ, η, ζ wie Festwerte behandelt, also

$$(\xi - x)\, d^2x + (\eta - y)\, d^2y + (\zeta - z)\, d^2z - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0,$$

oder auch, wenn ds wieder das Bogenelement der Raumkurve ist,

$$(3) \qquad (\xi - x)\frac{d^2x}{ds^2} + (\eta - y)\frac{d^2y}{ds^2} + (\zeta - z)\frac{d^2z}{ds^2} - 1 = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt mit der Gleichung (2) eine von x abhängende Gerade $\mathfrak{g}$; die sämtlichen Lagen dieser Geraden erfüllen die gesuchte Hüllfläche.

Nach § 25 (2) kann die Gleichung (3) auch geschrieben werden:

$$(4) \qquad \alpha_2(\xi - x) + \beta_2(\eta - y) + \gamma_2(\zeta - z) = \varrho,$$

wobei α_2, β_2, γ_2 die Richtungskosinus der Hauptnormale bedeuten; sind P und Q die Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ), so sind $\xi - x, \ldots$ die Komponenten der Strecke PQ nach den Achsen, und die Gleichung sagt aus, daß die Strecke PQ nach der Hauptnormalenrichtung die feste Komponente ϱ ergibt. Die Gerade $\mathfrak{g}$ geht also durch den Punkt der Hauptnormale des Punktes P, der von diesem in der positiven Richtung der Strecke ϱ entfernt ist, den Krümmungsmittelpunkt der Raumkurve; die Gerade $\mathfrak{g}$ liegt ferner in der Ebene, die im Krümmungsmittelpunkte auf der Hauptnormale senkrecht steht, ist also auch auf dieser senkrecht. Sie ist endlich auch, weil in der Normalebene (2) liegt, zur Tangente senkrecht, hat also die Richtung der Binormale. Die Gerade $\mathfrak{g}$ wird bisweilen die rektifizierende Gerade genannt.

III. Auch in dem Falle, wo die Gleichung der gegebenen Fläche zwei Parameter enthält und letztere einer bestimmten Bedingung genügen müssen, kommt man wieder auf ähnliche Erörterungen, wie in V. des vorigen Paragraphen; aus den gegebenen Gleichungen

$$F(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\varkappa, \lambda) = 0$$

folgt nämlich durch Differentiation in der Bezeichnung der Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(F, \varphi)}{\partial(\varkappa, \lambda)} = 0,$$

und nachher sind $\varkappa$ und λ aus allen drei Gleichungen zu eliminieren.

Endlich kann es auch vorkommen, daß die gegebene Flächengleichung drei veränderliche Parameter enthält, welche an zwei

Bedingungen gebunden sind, daß also folgende drei Gleichungen vorliegen

$$(5)\quad F(x, y, z, \varkappa, \lambda, \mu) = 0, \quad \varphi(\varkappa, \lambda, \mu) = 0, \quad \psi(\varkappa, \lambda, \mu) = 0.$$

In diesem Falle sind λ und μ implizite Funktionen von $\varkappa$ und daher führt die Änderung von $\varkappa$ zu den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varkappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varkappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varkappa} = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen bestimmen $\frac{\partial \lambda}{\partial \varkappa}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa}$; setzt man deren Werte in die erste Differentialgleichung ein, so geht diese über in

$$(6)\quad \frac{\partial(F, \varphi, \psi)}{\partial(\varkappa, \lambda, \mu)} = 0,$$

und die Gleichung der Hüllfläche ergibt sich nun durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ aus den vier Gleichungen (5) und (6).

IV. Bei den vorigen Untersuchungen wurde immer nur ein Parameter ($\varkappa$) als willkürlich betrachtet, denn in den Fällen, wo mehrere Parameter vorkamen, waren auch so viel Bedingungsgleichungen vorhanden, daß die übrigen Parameter als implizite Funktionen von $\varkappa$ gelten mußten. Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Gleichung der Fläche zwei voneinander unabhängige Parameter enthält, die sich gleichzeitig ändern.

Die gegebene Gleichung sei

$$(7)\quad F(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0,$$

und es werde zunächst $\varkappa$ allein um δ geändert; die neue Gleichung

$$F(x, y, z, \varkappa + \delta, \lambda) = 0,$$

wofür man auch schreiben kann

$$(8)\quad \frac{F(x, y, z, \varkappa + \delta, \lambda) - F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\delta} = 0,$$

charakterisiert dann eine zweite Fläche derselben Art, nur von anderer Lage und von anderen Dimensionen. Dasselbe gilt für den Fall, daß λ allein um ε geändert wird, wodurch die Gleichung entsteht

$$(9)\quad \frac{F(x, y, z, \varkappa, \lambda + \varepsilon) - F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\varepsilon} = 0.$$

Im allgemeinen schneiden sich die drei Flächen, welche den Gleichungen (7), (8), (9) entsprechen, in einem Punkte (x, y, z), und wenn man aus jenen Gleichungen die beiden Größen $\varkappa$ und λ eliminiert, so gelangt man zur Gleichung des geometrischen Ortes aller Durchschnittspunkte, vorausgesetzt, daß sich $\varkappa$ jedesmal um $\Delta\varkappa = \delta$, und λ immer um $\Delta\lambda = \varepsilon$ ändert. Nun können die Gleichungen (8) und (9) nach dem Mittelwertsatze geschrieben werden:

$$F_\varkappa(x, y, z, \varkappa + \theta\delta, \lambda) = 0, \quad F_\lambda(x, y, z\ \varkappa, \lambda + \theta_1\varepsilon) = 0,$$

wobei $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$; läßt man also δ und ε unendlich abnehmen, so erhält man die Gleichungen:

$$(10) \qquad F'_\varkappa(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0, \quad F'_\lambda(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0;$$

eliminiert man $\varkappa$ und λ aus ihnen und der Gleichung (4), so erhält man die Gleichung einer Fläche, der Hülle, die als Grenzgestalt des bei festen δ und ε konstruierten Ortes der Schnittpunkte dreier Flächen (7) erscheint.

Beispielsweise suchen wir die einhüllende Fläche aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem elliptischen Paraboloid liegen, und deren Oberflächen durch den Scheitel des Paraboloides gehen. Nennen wir a, b die Halbparameter des Paraboloides, und $\varkappa$, λ, μ die Koordinaten des Mittelpunktes irgend einer jener Kugeln, so haben wir als Gleichung der beweglichen Fläche

$$(x - \varkappa)^2 + (y - \lambda)^2 + (z - \mu)^2 = \varrho^2,$$

wobei noch die Bedingungen zu erfüllen sind:

$$\mu = \frac{\varkappa^2}{2a} + \frac{\lambda^2}{2b}, \qquad \varrho^2 = \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2.$$

Setzt man die Werte von ϱ^2 und μ in die erste Gleichung ein, so wird letztere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\varkappa x - 2\lambda y - \left(\frac{\varkappa^2}{a} + \frac{\lambda^2}{b}\right)z = 0;$$

durch Teildifferentiationen in Beziehung auf $\varkappa$ und λ ergibt sich

$$x + \frac{\varkappa}{a}z = 0, \qquad y + \frac{\lambda}{b}z = 0,$$

und durch Elimination von $\varkappa$ und λ

$$(x^2 + y^2 + z^2)z + ax^2 + by^2 = 0.$$

Die einhüllende Fläche ist hier dieselbe wie die Fußpunktfläche eines elliptischen Paraboloides mit doppelten Parametern [1]). Für das hyperbolische Paraboloid gilt ein analoger Satz.

[1]) Siehe Schlömilch, Analyt. Geometrie des Raumes, 3. Aufl., S. 266.

Wir wollen noch den Fall betrachten, wo die Gleichung der gegebenen Fläche drei Parameter $\varkappa$, λ, μ enthält, welche an eine bestimmte Bedingung gebunden sind. Man hat jetzt zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \varkappa, \lambda, \mu) &= 0, \\ \varphi(\varkappa, \lambda, \mu) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

und könnte hieraus (wie im vorigen Beispiele) μ eliminieren, um nur zwei voneinander unabhängige Parameter übrig zu behalten. Dagegen wird die Rechnung eleganter, wenn man diese Elimination bis zuletzt aufspart und berücksichtigt, daß μ eine unentwickelte Funktion von $\varkappa$ und λ ist. Durch Differenzieren nach $\varkappa$ erhält man nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa} = 0,$$

mithin, wenn man den Wert von $\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa}$ aus der zweiten Gleichung in die erste einsetzt,

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} = 0.$$

Die Differentiation nach λ führt zu der analogen Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0;$$

beide Differentialgleichungen können in der Form

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \varkappa}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \mu}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}} \tag{12}$$

zusammengefaßt werden, und man findet nun die Gleichung der einhüllenden Fläche durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ aus (11) und (12).

Beispielsweise suchen wir die einhüllende Fläche aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem dreiachsigen Ellipsoide liegen, und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt des Ellipsoides gehen. Sind a, b, c die Halbachsen des Ellipsoides, $\varkappa$, λ, μ die Koordinaten

eines Kugelzentrums, so hat man als Gleichung der beweglichen Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\varkappa x - 2\lambda y - 2\mu z = 0,$$

wobei $\varkappa$, λ, μ der Bedingung

$$\frac{\varkappa^2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} + \frac{\mu^2}{c^2} - 1 = 0$$

genügen müssen. Die Gleichungen (12) sind hier

$$\frac{a^2 x}{\varkappa} = \frac{b^2 y}{\lambda} = \frac{c^2 z}{\mu}$$

und durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ ergibt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2).$$

Die einhüllende Fläche ist demnach die Fußpunktfläche für ein aus den doppelten Achsen konstruiertes Ellipsoid. Für die übrigen zentralen Flächen zweiten Grades gelten analoge Sätze.

Kapitel IV.

Die vieldeutigen Symbole.

§ 30. Die Formen $\frac{0}{0}$ und $\infty - \infty$.

I. Wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für einen speziellen Wert von x, etwa für $x = a$, gleichzeitig Null werden, so nimmt der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in diesem besonderen Falle die Form $\frac{0}{0}$ an, die keinen bestimmten Sinn hat. Als den wahren Wert dieses Bruches betrachten wir die Grenze, welcher sich $\varphi(a+\delta)/\psi(a+\delta)$ bei verschwindenden δ nähert. Wegen der Voraussetzung $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$ ist nun

$$\frac{\varphi(a+\delta)}{\psi(a+\delta)} = \frac{\varphi(a+\delta)-\varphi(a)}{\psi(a+\delta)-\psi(a)} = \frac{\dfrac{\varphi(a+\delta)-\varphi(a)}{\delta}}{\dfrac{\psi(a+\delta)-\psi(a)}{\delta}},$$

und hieraus folgt, wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ an der Stelle $x = a$ stetige Ableitungen besitzen und $\psi'(a)$ nicht verschwindet, durch Übergang zur Grenze für verschwindende δ

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}, \tag{1}$$

d. h. in dem besonderen Falle $x = a$, für welchen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ verschwinden, werden die sonst sehr verschiedenen Quotienten $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ und $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ einander gleich. Kann man also den Wert des zweiten Quotienten ermitteln, so hat man auch den des ersten. Das einfachste Beispiel bietet sich dar, wenn $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = x$ gesetzt wird; man findet einen bekannten Grenzwert (Einl. IV) in der Formel

$$\frac{\varphi(0)}{\psi(0)} = \frac{\varphi'(0)}{\psi'(0)} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Setzt man z. B. $\varphi(x) = 1 - \cos x$, $\psi(x) = x$, so findet man

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \sin x, \quad \frac{\varphi'(0)}{\psi'(0)} = 0,$$

und 0 ist als Wert des Ausdrucks $\varphi(0)/\psi(0)$ nach obiger Definition anzusehen.

Die Formel (1) läßt sich verallgemeinern, wenn man von der Mittelwertformel, § 6, (5) ausgeht, die, auch wenn $\psi'(a) = 0$ sein sollte, ergibt

$$\frac{\varphi(a+\delta)}{\psi(a+\delta)} = \frac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a)}{\psi(a+\delta) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(a+\theta\delta)}{\psi'(a+\theta\delta)}, \quad 0 < \theta < 1,$$

also

$$\lim_{x=a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a+0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

wenn der rechts stehende Grenzwert eigentlich oder uneigentlich existiert. Ist z. B. $\psi'(a) = 0$, $\varphi'(a) \gtrless 0$, so folgt

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \lim_{x=a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty;$$

z. B., wenn $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = x^2$ gesetzt wird,

$$\frac{\varphi(0)}{\psi(0)} = \lim_{x=+0} \frac{\cos x}{2x} = +\infty.$$

Man braucht auch die Stetigkeit der Ableitungen $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ nur für jede Strecke $a_1 \ldots b_1$, in der $b_1 > a_1 > a$ und a_1 und b_1 unter einer gewissen Schranke liegen, vorauszusetzen; dann erhält man

$$A = \frac{\varphi(b_1) - \varphi(a_1)}{\psi(b_1) - \psi(a_1)} = \frac{\varphi'(a_2)}{\psi'(a_2)}, \quad a_1 < a_2 < b_1.$$

Weiß man nun, daß

$$\lim_{x=a+0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = g$$

existiert und ist ε positiv beliebig klein gegeben, so findet man, sobald $b_1 - a$ hinreichend klein geworden ist,

$$g + \varepsilon > A = \frac{\varphi'(a_2)}{\psi'(a_2)} > g - \varepsilon;$$

läßt man jetzt b_1 fest und läßt $a_1 = a + 0$ gegen a heranrücken, so strebt A dem Grenzwert $\varphi(b_1)/\psi(b_1)$ zu, und man findet

$$g + \varepsilon \geq \frac{\varphi(b_1)}{\psi(b_1)} \geq g - \varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{x=a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = g = \lim_{x=a+0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Setzt man z. B. $a = 0$ und

$$\varphi(x) = \lg x, \quad \psi(x) = \frac{1}{x},$$

so ist

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = -x,$$

also folgt der bekannte Grenzwert

$$\lim_{x=+0} x \lg x = 0.$$

Wenn $a = 0$ und

$$\psi(x) = \cot x, \quad \varphi(x) = \lg x,$$

so folgt

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = -\frac{\sin^2 x}{x};$$

setzt man jetzt $\Phi(x) = \sin^2 x$, $\Psi(x) = x$, so gibt die obige Regel

$$\frac{\Phi(0)}{\Psi(0)} = \frac{\Phi'(0)}{\Psi'(0)} = \frac{2 \sin 0 \cos 0}{1} = 0,$$

also auch

$$\frac{\varphi(0)}{\psi(0)} = 0,$$

oder genauer -0, wenn $\lim x = +0$, oder wenn x von oben her dem Werte 0 zustrebt.

Der Quotient

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

nimmt für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an, die Ableitungen $\varphi'(a)$ und $\psi'(a)$ sind nur stetig, solange $a > 0$; hier ist

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{6}},$$

und da dieser Bruch für $x = a$ den bestimmten Wert $\frac{2}{3} a^{-\frac{1}{6}}$ erhält, so ist auch

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{2}{3} a^{-\frac{1}{6}},$$

und wenn $a = 0$ ist,

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \infty.$$

Für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird der Bruch

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\cos x}{\frac{1}{2}\pi - x}$$

unbestimmt $= \frac{0}{0}$ dagegen erhält

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\sin x}{1}$$

in demselben Falle den bestimmten Wert 1, der nun auch dem ersten Bruche zukommt.

Nicht selten trifft es sich, daß der neue Quotient $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ für $x = a$ gleichfalls die Form $\frac{0}{0}$ hat; dann muß man auf ihn wieder dasselbe Verfahren anwenden. Nehmen wir z. B.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x - \sin x}{x^3},$$

so erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{1 - \cos x}{3x^2}, \quad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{\sin x}{6x}, \quad \frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)} = \frac{\cos x}{6};$$

für $x = 0$ verschwinden $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ sowie $\psi(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, und daher gibt erst der letzte Quotient den wahren Wert des ursprünglichen Bruches $= \frac{1}{6}$.

II. Wenn die Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so erhält die Differenz $F(x) - f(x)$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$; ihr wahrer Wert kann dann auf folgende Weise definiert werden. Man setze

$$\frac{1}{F(x)} = F_1(x), \quad \frac{1}{f(x)} = f_1(x),$$

so ist identisch

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{F_1(x)} - \frac{1}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) - F_1(x)}{F_1(x) f_1(x)};$$

für $x = a$ verschwinden $F_1(x)$ und $f_1(x)$, mithin geht der letzte Bruch in $\frac{0}{0}$ über und kann nach der vorigen Regel untersucht werden.

So ist z. B.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)},$$

wobei die linke Seite für $x = 0$ die Form $\infty - \infty$ annimmt, und die rechte Seite $= \frac{0}{0}$ wird. Setzen wir

$$\varphi(x) = e^x - 1 - x, \quad \psi(x) = x(e^x - 1),$$

so erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{e^x - 1}{x e^x + e^x - 1}, \quad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{1}{x + 2},$$

und hier liefert der letzte Bruch den wahren Wert $= \frac{1}{2}$.

§ 31. Die Formen $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 und 1^∞.

I. Wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so stellt sich in diesem Falle der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$, deren wahrer Wert q auf folgende Weise ermittelt werden kann. Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

der neue Quotient erhält für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ und kann daher nach der Regel des vorigen Paragraphen behandelt werden. Dies gibt

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}} = \frac{F'(x)}{f'(x)} \left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]^2$$

und für $x = a$, wo $\frac{f(a)}{F(a)}$ den Wert q annimmt,

$$q = \frac{F'(a)}{f'(a)} q^2 \quad \text{oder} \quad q = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Die Regel zur Bestimmung des wahren Wertes eines vieldeutigen Bruches bleibt also bei der Form $\frac{\infty}{\infty}$ dieselbe wie bei der Form $\frac{0}{0}$, unter der Voraussetzung, daß ein wahrer Wert existiert. Sei z. B. $f(x) = \lg \sin x$, $F(x) = \lg x$; dann ist

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\cot x}{1/x} = \frac{x}{\operatorname{tg} x};$$

der Wert $f(0)/F(0)$ kann also nur $= 1$ sein.

II. Sind zwei Funktionen vorhanden, von denen die eine $\varphi(x)$ für $x = a$ verschwindet, während die andere $f(x)$ für $x = a$ unendlich wird, so nimmt das Produkt $\varphi(x) \cdot f(x)$ für $x = a$ die

unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ an; den wahren Betrag desselben kann man auf zweierlei Weise finden. Entweder setzt man

$$\frac{1}{f(x)} = \psi(x) \quad \text{und hat dann} \quad \varphi(x) . f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

für $x = a$ wird der Quotient $= \frac{0}{0}$ und gestattet die in § 30 angegebene Behandlung. Oder man setzt

$$\frac{1}{\varphi(x)} = F(x), \quad \text{mithin} \quad \varphi(x) . f(x) = \frac{f(x)}{F(x)};$$

der Quotient stellt sich dann unter die Form $\frac{\infty}{\infty}$ und ist nach I. zu beurteilen. Von beiden Methoden wählt man im konkreten Falle diejenige, welche die wenigste Rechnung verursacht.

So wird man z. B. an die Stelle des Produktes

$$\lg\left(2 - \frac{x}{a}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a},$$

welches für $x = a$ in $0 \cdot \infty$ übergeht, den Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lg\left(2 - \frac{x}{a}\right)}{\cot \frac{\pi x}{2a}}$$

treten lassen, weil der Differentialquotient des Logarithmus eine einfache algebraische Funktion ist; man erhält

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\frac{1}{2a - x}}{-\frac{\pi}{2a} \cdot \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2a}}{2a - x},$$

und für $x = a$ den wahren Wert $\frac{2}{\pi}$.

Wenn ein Ausdruck von der Form $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der vieldeutigen Gestalten 0^0, ∞^0, 1^∞ annimmt, so beachte man zunächst die identische Gleichung

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lg f(x) \cdot \varphi(x)}$$

und untersuche das Produkt $\lg f(x) . \varphi(x)$; ist w der wahre Wert desselben, so geht die gegebene Funktion in e^w über. So erhält man für

$$x^x = e^{x \lg x}$$

den wahren Wert $0^0 = 1$.

Kapitel V.

Maxima und Minima.

§ 32. Maxima und Minima der Funktionen einer Veränderlichen.

Wenn eine stetige Funktion $f(x)$ abwechselnd steigt und fällt, so vermutet man in ihrem Verlaufe Stellen, wo die Übergänge von Wachstum zu Abnahme oder umgekehrt von Abnahme zu Wachstum stattfinden. Bei einem Übergange der ersten Art, welcher etwa für $x = a$ eintreten möge, ist der entsprechende Funktionswert $f(a)$ größer als die Nachbarwerte $f(a - h)$ und $f(a + h)$, sobald nur h hinreichend klein genommen wird; dann heißt $f(a)$ ein Maximum der Funktion $f(x)$. Erfolgt dagegen an der Stelle $x = a$ ein Übergang von Abnahme zu Wachstum, so ist $f(a)$ kleiner als seine Nachbarwerte $f(a - h)$ und $f(a + h)$, und dann heißt $f(a)$ ein Minimum von $f(x)$. Nach dieser Erklärung versteht es sich von selbst, daß derartige Maxima und Minima nur relativ sind und nicht immer den absolut größten oder absolut kleinsten Wert der Funktion darstellen.

Für welche Werte von x dergleichen Maxima und Minima eintreten, das entscheidet sich durch ein früheres Theorem (§ 6, I.), demzufolge die Funktion $f(x)$ wächst oder abnimmt, je nachdem ihre Ableitung $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Ändert sich nun $f'(x)$ stetig, so kann der Übergang von positiven zu negativen oder von negativen zu positiven Werten der Ableitung $f'(x)$ nur mittels Durchganges durch Null geschehen; die Werte von x, welche $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, sind also Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$. Dies bedeutet geometrisch, daß die Tangente an jedem Kulminationspunkte einer Kurve parallel zur Abszissenachse liegt.

Hat man die Gleichung $f'(x) = 0$ aufgelöst, so bedarf es noch der Entscheidung, ob die gefundenen Werte von x Maxima oder

Minima der Funktion liefern. Zu diesem Zwecke erinnern wir an die in § 16 bewiesene Gleichung

$$\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=\tfrac{1}{2}f''(a+\vartheta h),$$

woraus bei verschwindenden h folgt

$$\lim\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=\tfrac{1}{2}f''(a).$$

Im vorliegenden Falle ist a eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, mithin $f'(a) = 0$ und

$$\lim\frac{f(a+h)-f(a)}{h^2}=\tfrac{1}{2}f''(a),$$

ebenso, wenn man $-h$ an die Stelle von h treten läßt,

$$\lim\frac{f(a-h)-f(a)}{h^2}=\tfrac{1}{2}f''(a).$$

Ist nun $f''(a)$ positiv, so müssen bei hinreichend kleinem h die beiden Quotienten

$$(1)\qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{h^2},\qquad \frac{f(a-h)-f(a)}{h^2}$$

positiv sein und es bleiben, wenn h gegen die Null konvergiert, weil außerdem der gemeinschaftliche Grenzwert jener Quotienten nicht positiv werden könnte; hieraus folgt

$$f(a-h)>f(a)<f(a+h),$$

mithin ist $f(a)$ ein Minimum. Wenn dagegen $f''(a)$ einen negativen Wert hat, so müssen bei hinreichend kleinem h die unter (1) angegebenen Quotienten negativ sein und bleiben; daraus folgt

$$f(a-h)<f(a)>f(a+h),$$

d. h. $f(a)$ ist ein Maximum. Die Entscheidung besteht also darin, daß $f(a)$ ein Minimum oder Maximum ist, je nachdem $f''(a)$ positiv oder negativ ausfällt. Geometrisch heißt dies: ein unterer Kulminationspunkt kann nur auf einem nach unten konvexen Bogen, ein oberer nur auf einem nach unten konkaven Bogen vorkommen.

Das angegebene Kriterium verliert seine Anwendbarkeit, wenn $f''(a)$ selber $= 0$ ist (wie z. B., wenn die Tangente an einem Inflexionspunkte parallel zur Abszissenachse liegt); man muß in diesem

Falle die höheren Differentialquotienten von $f(x)$ zu Rate ziehen, indem man den in § 16 bewiesenen Satz

$$\frac{f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1.2}f''(a)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)}{h^n}$$

$$=\frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)}{1.2.3\ldots n}$$

anwendet. Unter der Voraussetzung, daß nicht nur $f'(a)=0$ ist, sondern auch $f''(a)$, $f'''(a)$, $\ldots f^{(n-1)}(a)$ verschwinden, mithin $f^{(n)}(a)$ der erste nicht verschwindende Differentialquotient ist, vereinfacht sich die vorige Gleichung und gibt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)}{1.2\ldots n},$$

woraus folgt, wenn h gegen die Null konvergiert,

$$\lim\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}.$$

Hier unterscheiden wir die beiden Fälle eines ungeraden und eines geraden n. Bei ungeraden n ist

$$\lim\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}=+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n},$$

$$\lim\frac{f(a-h)-f(a)}{h^n}=-\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n},$$

mithin für ein positives $f^{(n)}(a)$ und hinreichend kleine h

$$f(a-h)<f(a)<f(a+h),$$

dagegen bei negativem $f^{(n)}(a)$

$$f(a-h)>f(a)>f(a+h).$$

Beide Ungleichungen stimmen darin überein, daß $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist. Wenn dagegen n eine gerade Zahl bedeutet, so gelten die Gleichungen

$$\lim\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}=+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n},$$

$$\lim\frac{f(a-h)-f(a)}{h^n}=+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n};$$

mithin ist bei positivem $f^{(n)}(a)$ und für hinreichend kleine h

$$f(a-h)>f(a)<f(a+h),$$

d. h. $f(a)$ ein Minimum; ferner erhält man bei negativem $f^{(n)}(a)$

$$f(a-h) < f(a) > f(a+h),$$

wodurch ein Maximum angezeigt wird. Alles zusammen gibt folgenden Satz:

Ein aus der Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmter Wert von x macht $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum, wenn in der Reihe der Differentialquotienten $f''(x)$, $f'''(x)$ usw. der erste für jenen Wert nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist, und zwar findet ein Minimum oder Maximum statt, je nachdem der genannte Differentialquotient für jenen Wert von x positiv oder negativ ausfällt.

In dieser ganzen Betrachtung sind die vorkommenden Ableitungen als stetig vorausgesetzt.

1. Handelt es sich um das Maximum oder Minimum der Funktion

$$f(x) = x^a e^{-x},$$

so entwickelt man erst die Differentialquotienten

$$f'(x) = (a-x)\, x^{a-1} e^{-x},$$
$$f''(x) = [a(a-1) - 2\,a\,x + x^2]\, x^{a-2} e^{-x}$$

usw.

Nun wird $f'(x) = 0$ für $x = a$; dieser Wert gibt $f''(a) = -a^{a-1} e^{-a}$, also ein negatives Resultat, mithin ist

$$f(a) = a^a e^{-a} = \left(\frac{a}{e}\right)^a$$

das Maximum der Funktion $x^a e^{-x}$.

2. Es mögen $k_1, k_2, \ldots k_n$ gegebene Zahlen sein und es soll x so bestimmt werden, daß die Quadratsumme

$$f(x) = (x-k_1)^2 + (x-k_2)^2 + \cdots + (x-k_n)^2$$

zu einem Maximum oder Minimum wird. Man hat in diesem Falle

$$f'(x) = 2\,[n\,x - (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)],$$
$$f''(x) = 2\,n;$$

$f'(x)$ verschwindet, wenn

$$x = \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n},$$

d. h. gleich dem arithmetischen Mittel aus den gegebenen Zahlen ist, $f''(x)$ bleibt immer positiv, mithin wird $f(x)$ bei dem angegebenen Werte zu einem Minimum.

3. Auf dem ersten Quadranten einer Ellipse soll man denjenigen Punkt bestimmen, dessen Normale am weitesten vom Zentrum entfernt ist (Fig. 34). Das Lot vom Koordinatenanfang C auf die Normale des Punktes $P(x, y)$ einer Kurve ist die Projektion des Radiusvektors CP auf eine Parallele zur Tangente durch C, seine Länge also

$$p = \left| x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} \right| = \left| \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right|;$$

für die Ellipse ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, mithin, da $x > 0$ ist,

$$p = \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2}}.$$

Fig. 34.

Dieser Ausdruck vereinfacht sich durch Einführung des Winkels $ACM = \omega$, welcher unter dem Namen der exzentrischen Anomalie bekannt ist; man hat nämlich $x = a\cos\omega$, mithin

$$p = \frac{(a^2 - b^2)\sin\omega}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2\omega + b^2}}$$

oder, wenn $\operatorname{tg}\omega$ kurz mit t bezeichnet wird,

$$p = \frac{(a^2 - b^2)t}{\sqrt{(1 + t^2)(a^2 t^2 + b^2)}}.$$

Wir betrachten nun t als Unabhängige und erhalten

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - a^2 t^4)}{\sqrt{[b^2 + (a^2 + b^2)t^2 + a^2 t^4]^3}},$$

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{(a^2 - b^2)t[3(a^2 + b^2)b^2 + 10a^2b^2t^2 + a^2(a^2 + b^2)t^4 - 2a^4t^6]}{\sqrt{[b^2 + (a^2 + b^2)t^2 + a^2 t^4]^5}};$$

der erste Differentialquotient verschwindet für

$$t = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\omega = \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a},$$

und der zweite Differentialquotient erhält dadurch den negativen Wert

$$-\frac{4a^2(a - b)}{(a + b)^2},$$

mithin entspricht der obige Wert von t dem Maximum von p. Übrigens konnte man sich die Entwicklung des zweiten Differentialquotienten ersparen; da nämlich für $\omega = 0$ und für $\omega = 90^0$ jedesmal p den Minimalwert $p = 0$ erreicht, so muß der gefundene Wert ein Maximum liefern.

Behufs der Konstruktion nimmt man $AK = BC = b$, sucht zwischen $AC = a$ und AK die mittlere Proportionale AL, zieht CL, welche den umschriebenen Kreis in M, den eingeschriebenen in N schneidet, legt durch M eine Parallele zu BC, durch N eine Parallele zu AC und erhält dann den gesuchten Ellipsenpunkt P als Durchschnitt der genannten Parallelen. Konstruiert man die Normale PU, so ist deren Abstand von C das Maximum von p, und zwar

Fig. 35.

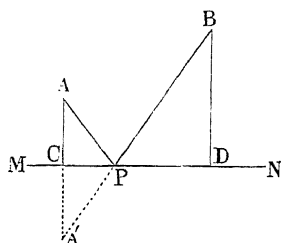
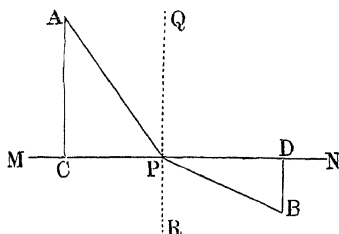



Fig. 36.

$CQ = a - b$; gleichzeitig ist Q der Krümmungsmittelpunkt für P, PQ der Krümmungshalbmesser, mithin die Fläche des Krümmungskreises gleich der Ellipsenfläche.

4. Über einer Geraden MN (Fig. 35) sind zwei Punkte A und B gegeben, welche mit einem Punkte P der Geraden zu der gebrochenen Linie APB verbunden werden sollen; man fragt nach dem Minimum des Weges $AP + BP$. Für $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$, $CP = x$, $AP + BP = s$ ist

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2},$$

$$s' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

$$s'' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{\sqrt{[b^2 + (c - x)^2]^3}}.$$

Aus $s' = 0$ ergibt sich zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}};$$

der aus ihr folgende Wert gehört zu einem Minimum, weil s'' immer positiv bleibt. Geometrisch bedeutet die vorige Gleichung

$$\cos MPA = \cos NPB, \quad \text{d. i.} \quad \angle MPA = \angle NPB,$$

und hiernach ist die Konstruktion leicht, indem man $CA' = CA$ nimmt und die Gerade $A'B$ zieht, welche MN in P schneidet (Spiegelungsgesetz).

5. Auf entgegengesetzten Seiten der Geraden MN (Fig. 36) befinden sich die gegebenen Punkte A und B, welche mit einem Punkte P der Geraden zu der gebrochenen Linie APB verbunden sind; ein Körper bewegt sich auf dieser von A nach B so, daß er längs der Geraden AP die konstante Geschwindigkeit g, längs PB die konstante Geschwindigkeit h besitzt. Es soll der Punkt P so bestimmt werden, daß der Körper in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt. Zum Durchlaufen von AP braucht der Körper die Zeit $\frac{AP}{g}$, zum Durchlaufen von PB die Zeit $\frac{PB}{h}$, mithin ist bei gleicher Bezeichnung wie in 4. der Ausdruck

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{g} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{h}$$

zu einem Minimum zu machen. Als Bedingungsgleichung für x findet man sehr leicht

$$\frac{x}{g\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{h\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

oder geometrisch

$$\frac{\cos MPA}{g} = \frac{\cos NPB}{h},$$

wofür man auch setzen kann

$$\frac{\sin APQ}{\sin BPR} = \frac{g}{h}.$$

Dieser Gleichung entspricht ein Minimum von s, weil s'' immer positiv bleibt. (Brechungsgesetz, wobei die Lage des gebrochenen Strahles durch die zwei Bedingungen bestimmt ist, daß er durch B gehen und normal zu einem gewissen Kegelschnitte sein muß. Vgl. § 28, III.)

6. Besondere Aufmerksamkeit verdient bei allen Untersuchungen über Maxima und Minima noch der Ausnahmefall, wenn $f'(x)$ sein Vorzeichen nicht stetig mittels Durchganges durch Null, sondern

sprungweise ändert; denn auch derartige Zeichenwechsel können Maxima oder Minima liefern, die man nach der vorigen Methode nicht finden würde. Ist z. B.

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{(1-x)^2},$$

mithin

$$y' = f'(x) = \tfrac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}},$$

so bleibt $f'(x)$ positiv für alle $x < 1$, und negativ für alle $x > 1$; der Zeichenwechsel geschieht hier aber sprungweise, denn man hat

$$f'(1-0) = +\infty, \quad f'(1+0) = -\infty,$$

und mithin erleidet $f'(x)$ eine Unterbrechung der Stetigkeit an der Stelle $x = 1$. Abgesehen davon geht aber aus den Vorzeichen von $f'(x)$ mit Sicherheit hervor, daß $f(x)$ wächst von $x = -\infty$ bis $x = 1$ und abnimmt von $x = 1$ bis $x = +\infty$, daß also $f(x)$ für $x = 1$ sein Maximum $f(1) = 1$ erhalten muß. Man wird dies geometrisch leicht bestätigt finden, indem man die Aufmerksamkeit auf den Berührungswinkel τ richtet, welcher durch die Gleichung $\operatorname{tg} \tau = f'(x)$ bestimmt wird. Derselbe ist spitz für $x < 1$, wächst mit x gleichzeitig, wird $= \frac{1}{2}\pi$ für $x = 1$ und nachher stumpf für $x > 1$; an der Stelle $x = 1$ besitzt daher die Kurve eine Spitze, von welcher beide Teile konvex gegen die Abszissenachse gekrümmt sind. — Ähnliche Betrachtungen gelten für alle derartigen Ausnahmefälle, und zwar entscheidet sich die Beschaffenheit einer Funktion an einer solchen besonderen Stelle immer sehr leicht dadurch, daß man den Lauf der Funktion in der Nachbarschaft jener Stellen vorzugsweise genauer berücksichtigt.

§ 33. Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Ist $F(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion der Unabhängigen $x, y, z, \ldots$, so kann es ein zusammengehörendes System besonderer Werte dieser Größen geben, etwa $x = a$, $y = b$, $z = c$ usw., wodurch $F(a, b, c, \ldots)$ größer oder kleiner wird als alle Nachbarwerte der Funktion, d. h. alle die Werte, welche entstehen, wenn man für x irgend einen Wert aus dem Intervalle $a - h$ bis $a + h$, für y einen Wert aus dem Intervalle $b - k$ bis $b + k$ usw. nimmt, wobei h, k usw. beliebig kleine Größen bezeichnen. Ein solcher besonderer Wert $F(a, b, c, \ldots)$ der Funktion $F(x, y, z, \ldots)$ heißt ein Maximum oder Minimum, je nachdem er größer oder kleiner als

seine Nachbarn ist. Die Aufgabe ist nun, das System der besonderen Werte $x = a$, $y = b$ usw. aufzufinden.

Wenn überhaupt beliebige Unabhängige $x, y, z, \ldots$ vorhanden sind, so darf man sich dieselben als ebenso viele willkürliche Funktionen einer neuen Unabhängigen t denken; denn man übersieht auf der Stelle, daß x, y, z usw. alle möglichen Werte erhalten können, wenn man

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \ldots$$

setzt und t sowie die Natur der Funktionen φ, ψ, χ usw. danach wählt; so würde z. B. schon die einfache Annahme $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $z = \gamma t, \ldots$, wo α, β, γ völlig willkürliche Faktoren sind, zu dem genannten Zwecke hinreichen. Durch diese Bemerkung reduziert sich die Aufgabe, $F(x, y, z, \ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, auf die einfachere, für eine Funktion von nur einer Unabhängigen die größten und kleinsten Werte aufzusuchen. Soll nun

$$F(x, y, z, \ldots) = F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t), \ldots]$$

oder kurz F seinen Maximal- oder Minimalwert erhalten, so muß

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

sein; diese Gleichung wird in unserem Falle, wo $x, y, z, \ldots$ als abhängig von t erscheinen,

$$(1) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \cdots = 0.$$

Bei der gänzlichen Willkürlichkeit der Funktionen $\varphi(t), \psi(t), \chi(t), \ldots$, also auch ihrer Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad \frac{dy}{dt} = \psi'(t), \quad \frac{dz}{dt} = \chi'(t) \ldots$$

(wie z. B. im obigen Sonderfalle der Faktoren $\alpha, \beta, \gamma \ldots$), kann aber die Gleichung (1) nur bestehen, wenn die Koeffizienten der unbestimmten Größen für sich Null sind, wenn also die Gleichungen stattfinden:

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

Diese Gleichungen bilden somit ein System von notwendigen Bedingungen des Maximums oder Minimums. Ihre Anzahl kommt mit der Anzahl der unabhängigen Veränderlichen überein, so daß es also im allgemeinen möglich ist, die obigen Gleichungen nach $x, y, z, \ldots$ aufzulösen und so die Wertsysteme $x = a$, $y = b$, $z = c$ usw.

zu bestimmen. Ist dies geschehen, so bedarf es noch einer Diskussion, ob das gefundene System ein Maximum oder Minimum von F bildet. Diese Entscheidung wird dadurch herbeigeführt, daß man den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 F}{d t^2}$ entwickelt und nachsieht, ob er durch Substitution der für x, y, z, ... gefundenen Werte positiv oder negativ ausfällt. Wir wollen diese Untersuchung unter der Voraussetzung, daß F eine Funktion von nur zwei Unabhängigen x und y ist, näher ausführen.

Man hat zunächst mit Rücksicht auf die Gleichungen (2)

$$\frac{d^2 F}{d t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{d x}{d t}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,\frac{d x}{d t}\,\frac{d y}{d t} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{d y}{d t}\right)^2,$$

oder wenn der Quotient $\frac{d x}{d t} : \frac{d y}{d t}$ mit q bezeichnet wird:

$$(3) \qquad \frac{d^2 F}{d t^2} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,q^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]\left(\frac{d y}{d t}\right)^2.$$

Soll dieser zweite Differentialquotient zu einer Entscheidung führen, so darf er nicht verschwinden, also darf nicht zugleich

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

sein; ist diese Vorbedingung erfüllt, so muß der in (3) verzeichnete Ausdruck, worin noch die unbestimmten Größen q und $\frac{d y}{d t}$ vorkommen, immer gleiches Vorzeichen behalten, von welchem nachher zu entscheiden ist, ob es das Plus- oder Minuszeichen ist. Das Vorzeichen von $\frac{d^2 F}{d t^2}$ hängt nun einzig allein von dem Ausdrucke

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,q^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

ab, welcher unter der Form $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma$ enthalten ist. Hätte ferner die quadratische Gleichung $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma = 0$ eine einfache reelle Wurzel q_1, so würde der Ausdruck $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma$ sein Vorzeichen wechseln, wenn man q das Intervall $q_1 - \delta$ bis $q_1 + \delta$ durchlaufen ließe, wo δ eine beliebig kleine Größe bezeichnet. Damit der fragliche Ausdruck sein Vorzeichen nicht wechsele, ist es hinreichend, daß jene quadratische Gleichung imaginäre Wurzeln besitze, folglich $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ sei. Eine hinreichende Bedingung für die Unver-

änderlichkeit des Vorzeichens der Größe (5) besteht also in der Ungleichung

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0.$$

Sie vertritt zugleich die in der Gleichung (4) angegebene Determination; denn wenn sie erfüllt ist, können die Gleichungen (4) nicht sämtlich stattfinden. Aus der Bedingung (6) ersieht man ferner, daß

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

(nach Substitution der für x und y gefundenen Werte) gleiche Vorzeichen besitzen müssen, weil außerdem die Ungleichung (6) die Summe zweier positiven Größen als negativ angeben würde. Da ferner nach den bisherigen Bestimmungen der Ausdruck in (5) sein Vorzeichen nicht wechselt, so darf man auch $q = 0$ setzen, ohne einen solchen Wechsel befürchten zu müssen, und man ersieht daraus, daß jener Ausdruck dasselbe Vorzeichen besitzt wie $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

Sei dies Zeichen etwa das positive, dann läßt sich strenge zeigen, daß aus der Ungleichung (6) das Minimum von $F(x, y)$ an der Stelle $x = a$, $y = b$ folgt. Gilt die Ungleichung zunächst nur an dieser Stelle, und sind die Größen F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} an dieser Stelle stetig, so gibt es ein jene Stelle umfassendes Gebiet $\mathfrak{G}$, das etwa durch die Ungleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqq \varrho^2$$

gekennzeichnet werde, in dem die Ungleichung (6) überall gilt. Sei nun (x_1, y_1) ein Punkt dieses Gebietes, und werde

$$(7) \qquad x - a = (x_1 - a)\,t, \quad y - b = (y_1 - b)\,t$$

gesetzt; dann geht $F(x, y)$ in eine auf der Strecke $0 \ldots 1$ mit ihren ersten beiden Ableitungen stetige Funktion $\Phi(t)$ über, für welche die Gleichung

$$\Phi''(t) = \frac{d^2 F}{d t^2} = F''_{xx}(x_1 - a)^2 + 2 F''_{xy}(x_1 - a)(y_1 - b) + F''_{yy}(y_1 - b)^2$$

gilt, in der die Größen F'' mit den Werten (7) gebildet sind. Da nun die Punkte (7) dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehören, gilt auf der ganzen Strecke $t = 0 \ldots 1$ die Ungleichung (6), die quadratische Form der Größen $x_1 - a$, $y_1 - b$, als welche $\Phi''(t)$ sich darstellt, verschwindet

nicht und hat das Vorzeichen der Größe F''_{xx}, also das positive. Hieraus folgt, da

$$\Phi'(t) = F'_x(x_1 - a) + F'_y(y_1 - b), \quad \Phi'(0) = F'_x(a, b)(x_1 - a) + F'_y(a, b)(y_1 - b) = 0,$$

die Ungleichung $\Phi'(t) > 0$ für die Strecke $0 \ldots 1$, also $\Phi(1) > \Phi(0)$ oder

$$F(x_1, y_1) > F(a, b),$$

womit das Minimum bewiesen ist. Ebenso folgt das Maximum, wenn $F''_{xx} < 0$.

Wenn die aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ abgeleiteten Werte von x und y der Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$$

genügen, so geben sie ein Maximum oder Minimum der Funktion $F(x, y)$, je nachdem sie die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

gleichzeitig negativ oder positiv machen.

Finden die Gleichungen (4) zusammen statt, verschwindet also $\frac{d^2 F}{d t^2}$ für die gefundenen Werte von x und y, so gibt der zweite Differentialquotient keine Entscheidung und man muß sich dann an die höheren Differentialquotienten wenden, was jedoch umständliche Rechnungen erfordert. Ebenso wird die Sache etwas verwickelt, wenn es sich um eine Funktion von drei oder mehr Unabhängigen handelt. Man wird in allen solchen Fällen besser tun, aus der Natur der gestellten speziellen Aufgabe zu entscheiden, ob überhaupt ein Maximum oder Minimum stattfindet.

1. Als erstes Beispiel diene die Aufgabe, das Minimum der Quadratsumme

$$F(x, y) = (a_1 x + b_1 y - k_1)^2 + (a_2 x + b_2 y - k_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n y - k_n)^2$$

zu bestimmen, wobei alle a, b und k als gegebene Konstanten vorausgesetzt werden. Führen wir zur Abkürzung die folgende Bezeichnung ein

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = S_{ab}, \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = S_{aa}, \quad b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = S_{bb}, \quad \text{usw.},$$

so erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(S_{aa}x + S_{ab}y - S_{ak}), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(S_{ba}x + S_{bb}y - S_{bk}),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2S_{aa}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2S_{bb}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2S_{ab},$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4S_{ab}^2 - 4S_{aa}S_{bb} = -4\sum(a_\mu b_\nu - a_\nu b_u)^2,$$

wobei μ, ν Zahlen der Reihe 1, 2, ... n sind und $\mu > \nu$ genommen wird.

Die letzten vier Ausdrücke genügen den Bedingungen des Minimums; letzteres tritt daher ein, sobald die Gleichungen

$$S_{aa}x + S_{ab}y = S_{ak},$$
$$S_{ba}x + S_{bb}y = S_{bk}$$

erfüllt sind, wozu die Werte gehören

$$x = \frac{S_{bb} \cdot S_{ak} - S_{ab} \cdot S_{bk}}{S_{aa} \cdot S_{bb} - (S_{ab})^2},$$

$$y = \frac{S_{aa} \cdot S_{bk} - S_{ab} \cdot S_{ak}}{S_{aa} \cdot S_{bb} - (S_{ab})^2},$$

deren Nenner nur verschwindet, wenn alle Verhältnisse $a_\nu : b_\nu$ gleich sind, was wir ausschließen.

Man kann diese Aufgabe dahin verallgemeinern, daß man eine beliebige Anzahl von Variablen x, y, z usw. voraussetzt und das Minimum von

$$F(x, y, z, \ldots) = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - k_1)^2$$
$$+ (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - k_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n y + c_n z + \cdots - k_n)^2$$

verlangt. Man findet leicht, daß die hierzu nötigen Werte aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$S_{aa}x + S_{ab}y + S_{ac}z + \cdots = S_{ak},$$
$$S_{ba}x + S_{bb}y + S_{bc}z + \cdots = S_{bk},$$
$$S_{ca}x + S_{cb}y + S_{cc}z + \cdots = S_{ck},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

deren Anzahl ebenso groß ist als die Anzahl der Größen x, y, z usw.

Die obige Aufgabe, welche die Verallgemeinerung des zweiten Beispiels in § 32 enthält, ist für die Praxis von besonderem Werte. Hat man nämlich eine Größe x durch direkte Messung und Beobachtung zu bestimmen (wie z. B. die Entfernung zweier Punkte durch

Messung mit Kette oder Maßstäben), so nimmt man der Sicherheit wegen diese Operation mehrmals vor, aber man findet dann, zufolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, bei jeder Messung einen etwas anderen Wert, und es mögen $k_1, k_2, \ldots k_n$ die verschiedenen Werte bezeichnen, welche bei n Beobachtungen für x erhalten wurden. Unter der Voraussetzung, daß alle Messungen mit gleicher Sorgfalt angestellt, mithin von gleichem Gewicht sind, betrachtet man das arithmetische Mittel aus $k_1, k_2, \ldots k_n$ als den wahrscheinlichsten Wert von x, ohne sich des Grundes dieser Annahme genauer bewußt zu sein. Dagegen beweist die Wahrscheinlichkeitsrechnung, daß der wahrscheinlichste Wert von x derjenige ist, bei welchem die Summe der Fehlerquadrate ihr Minimum erreicht. Nun sind $x - k_1$, $x - k_2, \ldots x - k_n$ die begangenen Fehler, und nach Beispiel 2. in § 32 wird die Summe der Quadrate dieser Fehler ein Minimum, wenn x dem arithmetischen Mittel aus $k_1, k_2, \ldots k_n$ gleichkommt; es rechtfertigt sich also jene Annahme. Das genannte Theorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestattet aber noch eine weitere Anwendung. Sind nämlich zwei nicht direkt beobachtbare Größen x und y mit beobachtbaren Größen a, b, k durch eine Gleichung von der Form $ax + by = k$ verbunden, so erhält man durch n Beobachtungen n Gleichungen folgender Art

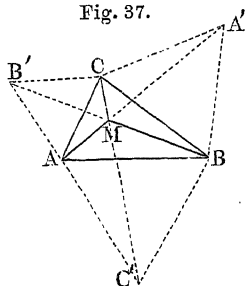



Fig. 37.

$$a_1 x + b_1 y = k_1, \quad a_2 x + b_2 y = k_2, \quad \ldots a_n x + b_n y = k_n.$$

Die Anzahl dieser Gleichungen beträgt mehr als 2 und daher würden sie, als vollkommen genau betrachtet, einander widersprechen. Dagegen ist zu berücksichtigen, daß jene Gleichungen infolge der Beobachtungsfehler nur angenähert richtig sind; die Größen

$$a_1 x + b_1 y - k_1, \quad a_2 x + b_2 y - k_2, \ldots a_n x + b_n y - k_n$$

sind daher von Null verschieden und bedeuten die Fehler. Die wahrscheinlichsten Werte von x und y ergeben sich nun wieder, indem man die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht, und vermöge dieser Bedingung erhält man, wie oben gezeigt wurde, immer so viel Gleichungen als Unbekannte zu bestimmen sind.

2. In der Ebene eines Dreiecks ABC (Fig. 37) soll der Punkt M so bestimmt werden, daß die Summe der Entfernungen $AM = u$, $BM = v$, $CM = w$ ein Minimum werde. Bezeichnen wir die

Seiten BC, CA, AB der Reihe nach mit a, b, c und die Gegenwinkel mit α, β, γ, so haben wir als Summe der genannten Entfernungen

$$s = u + v + w$$

oder, wenn $\angle BAM = \theta$ gesetzt wird,

$$s = u + \sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\theta} + \sqrt{b^2 + u^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)},$$

und hierbei sind u, θ die beiden unabhängigen Veränderlichen. Es ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{\partial s}{\partial u} = 1 + \frac{u - c\cos\theta}{\sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\theta}} + \frac{u - b\cos(\alpha - \theta)}{\sqrt{b^2 + u^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)}},$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{cu\sin\theta}{\sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\theta}} - \frac{bu\sin(\alpha - \theta)}{\sqrt{b^2 + u^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)}};$$

mithin sind die Bedingungen für den Eintritt des Maximums oder Minimums

$$\frac{c\cos\theta - u}{v} + \frac{b\cos(\alpha - \theta) - u}{w} = 1,$$

$$\frac{c\sin\theta}{v} - \frac{b\sin(\alpha - \theta)}{w} = 0.$$

Geometrisch bedeuten dieselben soviel wie

$$\cos BMA' + \cos CMA' = 1, \quad \sin BMA' - \sin CMA' = 0;$$

aus der zweiten Gleichung folgt $\angle BMA' = \angle CMA'$, nachher aus der ersten

$$\cos BMA' = \cos CMA' = \tfrac{1}{2}, \quad \angle BMA' = \angle CMA' = 60^0,$$
$$\angle BMC = 120.$$

Zu einer ähnlichen Rechnung würde man gelangen, wenn man $BM = v$ und $\angle CBM = \eta$ als Unabhängige wählte und demgemäß u und w durch v und η ausdrückte; das Ergebnis wäre dann $\angle CMA = 120^0$. Der gesuchte Punkt M liegt demnach so, daß die Winkel AMB, BMC, CMA gleich sind; er ist folglich der Durchschnitt von Kreisbögen, welche über den Dreiecksseiten als Sehnen mit dem gemeinschaftlichen Peripheriewinkel von 120^0 beschrieben werden können. Eine andere Konstruktion von M besteht darin, daß man über den Dreiecksseiten die gleichseitigen Dreiecke ABC', BCA', CAB' mit den Spitzen nach Außen beschreibt und nachher die Geraden AA', BB', CC' zieht; letztere schneiden sich im Punkte M.

Der Natur der Sache nach kann die Summe $u + v + w$ beliebig groß gemacht werden, wenn man den Punkt M weit genug von den Spitzen des Dreiecks ABC entfernt, während dagegen s nicht beliebig klein werden kann. Man erwartet hiernach, daß der gefundene Punkt M dem Minimum von s entspricht, was sich rechnerisch bestätigt.

Eine völlig gleiche Behandlung gestattet die allgemeinere Aufgabe, $u^n + v^n + w^n$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen. In dem speziellen Falle $n = 2$ findet man, daß M der Schwerpunkt des Dreiecks ABC und $u^2 + v^2 + w^2$ ein Minimum ist.

3. Es soll die kürzeste Entfernung zweier Geraden ermittelt werden, deren Gleichungen sind

$$\begin{aligned} y &= B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1, \\ y &= B_2 x + b_2, \quad z = C_2 x + c_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Nehmen wir auf der ersten Geraden einen Punkt $x_1\, y_1\, z_1$, auf der zweiten einen Punkt $x_2\, y_2\, z_2$ einstweilen beliebig an, so ist die Länge der verbindenden Geraden

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}; \tag{9}$$

diese wird ein Maximum oder Minimum je nachdem ihr Quadrat seinen kleinsten oder größten Wert erreicht, mithin haben wir uns nur mit dem Ausdrucke

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

zu beschäftigen, welcher vermöge der Gleichungen (8) die Form

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 &+ (B_1 x_1 - B_2 x_2 + b_1 - b_2)^2 \\ &+ (C_1 x_1 - C_2 x_2 + c_1 - c_2)^2 \end{aligned}$$

annimmt und eine Funktion der beiden Unabhängigen x_1 und x_2 darstellt. Man hat nun

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= (1 + B_1^2 + C_1^2)\, x_1 - (1 + B_1 B_2 + C_1 C_2)\, x_2 \\ &\qquad + (b_1 - b_2) B_1 + (c_1 - c_2) C_1, \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} &= -(1 + B_1 B_2 + C_1 C_2)\, x_1 + (1 + B_2^2 + C_2^2)\, x_2 \\ &\qquad - (b_1 - b_2) B_2 - (c_1 - c_2) C_2, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= 2(1 + B_1^2 + C_1^2), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} &= -2(1 + B_1 B_2 + C_1 C_2), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} &= 2(1 + B_2^2 + C_2^2). \end{aligned}$$

Setzt man die ersten Differentialquotienten der Null gleich, so erhält man zwei Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung von x_1 und x_2; die so bestimmten Werte entsprechen einem Minimum, weil

$$4(1 + B_1 B_2 + C_1 C_2)^2 - (1 + B_1^2 + C_1^2)(1 + B_2^2 + C_2^2) < 0$$

und $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$ sowie $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}$ positiv ist. Aus x_1 und x_2 erhält man mittels der Gleichungen der Geraden die Werte von y_1, z_1 und y_2, z_2; nach Substitution der Werte von x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 und z_2 gibt nun der unter (9) verzeichnete Ausdruck die kürzeste Entfernung der beiden Geraden. Übrigens liegt es hier in der Natur der Aufgabe, daß nur ein Minimum stattfindet.

§ 34. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Die Werte, durch welche eine gegebene Funktion mehrerer Veränderlicher zu einem Maximum oder Minimum werden soll, sind häufig noch an eine oder mehrere Bedingungen gebunden, welche in Gleichungen ausgedrückt werden. Sucht man z. B. die kürzeste Entfernung eines Punktes $\alpha\beta\gamma$ von einer Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sein möge, so ist der Ausdruck

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

welcher den Abstand der Punkte $\alpha\beta\gamma$ und xyz angibt, zu einem Minimum zu machen, jedoch mit der besonderen Rücksicht, daß die Werte von x, y und z der Gleichung der Ebene genügen müssen. Das natürlichste Verfahren wäre nun die Herausschaffung der abhängigen Veränderlichen; ist z. B. nur eine Bedingungsgleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ gegeben, so kann man sie nach z auflösen und den so gefundenen Wert von z in die Funktion $F(x, y, z)$, deren Maximum oder Minimum gesucht wird, substituieren; an die Stelle einer Funktion von drei Veränderlichen tritt nunmehr eine Funktion zweier Unabhängiger, und für diese gelten die Regeln des vorigen Paragraphen. Sind zwischen drei Größen zwei Bedingungsgleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ gegeben, so kann man mittels derselben y und z durch x ausdrücken, und wenn man diese Werte einsetzt, so enthält jetzt die Funktion $F(x, y, z)$ nur noch eine Unabhängige. Diese Eliminationen sind aber nicht selten sehr umständlich oder unmöglich, und man muß in solchen Fällen einen anderen Weg einschlagen, welcher darin besteht, daß man

nicht die abhängigen Veränderlichen selbst aus den Bedingungsgleichungen, sondern ihre Differentialquotienten aus den Differentialgleichungen der gegebenen Bedingungen eliminiert. Die Ausführung dieses Gedankens ist folgende.

Wenn $F(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht und dabei die Bedingung $\varphi(x, y) = 0$ erfüllt sein soll, so ist nur eine Unabhängige x vorhanden und es muß daher $dF/dx = 0$ sein; dies gibt in unserem Falle, wo F außer x noch die abhängige Veränderliche y enthält,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

Differenziert man auch die Bedingungsgleichung in Beziehung auf x als Unabhängige, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0; \tag{2}$$

die Elimination von dy/dx aus beiden Differentialgleichungen gibt

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

und wenn man diese Gleichung mit der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ verbindet, so hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y.

Dasselbe Ergebnis folgt, wenn man eine neue Unbekannte einführt und wieder eliminiert. Man multipliziere die Gleichung (2) mit λ und addiere sie zur Gleichung (1); man erhält

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0.$$

Nun bestimme man λ so, daß die Größe dy/dx wegfällt, setze also

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0;$$

dann ergibt sich als Folge

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Diese beiden gleichgebauten Gleichungen sind in verschiedener Weise erhalten; sie geben mit der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ zusammen drei Gleichungen für die Unbekannten x, y, λ, und der symmetrische Bau ist bisweilen vorteilhaft. Jedenfalls kann man folgende Rechenregel aufstellen. Man verfahre so, als ob das Maximum oder Minimum der Funktion $F + \lambda\varphi$ bei festem λ gesucht würde und ziehe die

Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ heran. Der Wert λ ergibt sich in Wahrheit nicht als Konstante, weil es sich nicht wirklich um das bezeichnete Extremum handelt; nur die abgeleiteten Gleichungen sind dieselben wie bei der Extremumsaufgabe.

Bei drei Veränderlichen x, y, z und zwei Bedingungsgleichungen, also wenn das Maximum oder Minimum von $F(x, y, z)$ gesucht wird, während zugleich

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$$

sein soll, ist nur eine Unabhängige x vorhanden, von welcher y und z abhängen. Die Gleichung $dF/dx = 0$ lautet dann

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$$

und die Differentialgleichungen der Bedingungen sind:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich dy/dx und dz/dx eliminieren; es bleibt dann eine Gleichung übrig, welche in Verbindung mit den beiden Bedingungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ zur Bestimmung von x, y, z hinreicht.

Sind drei Veränderliche vorhanden mit nur einer Bedingungsgleichung, so kann man x und y als Unabhängige, z als abhängige Veränderliche ansehen; es muß dann sein

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

oder wenn man beachtet, daß in F auch z als Funktion von x und y vorkommt, mit anderer Bedeutung der Teilableitungen von F,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Anderseits ist durch partielle Differentiation der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

durch Elimination von $\partial z / \partial x$ aus der ersten und dritten, sowie von $\partial z / \partial y$ aus der zweiten und vierten Gleichung folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

welche Gleichungen, verbunden mit $\varphi(x, y, z) = 0$, die Unbekannten x, y, z bestimmen. — Auch diese Gleichungen ergeben sich, indem man aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

die Größe λ eliminiert.

1. Aus den vier Seiten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soll das Viereck von größtmöglichem Inhalte konstruiert werden: Nennen wir x den von α und β, y den von γ und δ eingeschlossenen Winkel, so ist die Fläche des Vierecks

$$\tfrac{1}{2} \alpha \beta \sin x + \tfrac{1}{2} \gamma \delta \sin y,$$

und wenn diese, also auch das Doppelte von ihr, ein Maximum werden soll, so ist

$$F = \alpha \beta \sin x + \gamma \delta \sin y$$

zu setzen. Berechnet man ferner die Diagonale, welche den Winkeln x und y gegenüberliegt, so hat man

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2 \alpha \beta \cos x = \gamma^2 + \delta^2 - 2 \gamma \delta \cos y;$$

mithin als Bedingungsgleichung

$$\varphi = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - 2 \alpha \beta \cos x + 2 \gamma \delta \cos y = 0.$$

Die Differentialgleichungen werden nun

$$\frac{dF}{dx} = \alpha \beta \cos x + \gamma \delta \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2 \alpha \beta \sin x - 2 \gamma \delta \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0;$$

aus der letzteren folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha \beta \sin x}{\gamma \delta \sin y},$$

und durch Substitution hiervon geht die erste der vorigen Gleichungen über in

$$\frac{dF}{dx} = \alpha \beta \frac{\sin(x + y)}{\sin y} = 0.$$

Die Bedingung des Extremums ist also

$$\sin(x + y) = 0; \tag{1}$$

man erhält sie rascher aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

oder

$$\alpha \beta \cos x + 2 \lambda \alpha \beta \sin x = 0, \qquad \gamma \delta \cos y - 2 \lambda \gamma \delta \sin y = 0,$$

indem man λ eliminiert.

Die Gleichung (1) besteht nun nur, wenn $x + y$ einen der Werte 0^0, 180^0, 360^0 usw. erhält; da aber x und y Winkel eines Vierecks sind, so kann nur $x + y = 180^0$ oder $y = 180^0 - x$ sein, wonach aus $\varphi = 0$ wird:

$$\cos x = - \cos y = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2}{2(\alpha \beta + \gamma \delta)}.$$

Mittels des Wertes von $\frac{dy}{dx}$ findet man weiter

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = - \frac{\alpha \beta}{\gamma \delta} \left\{ \alpha \beta \frac{\sin^2 x}{\sin^3 y} - \gamma \delta \frac{\cos (x + y)}{\sin y} \right\};$$

für den Fall des Maximums oder Minimums, d. h. für $y = 180^0 - x$ geht dieser Ausdruck über in

$$- \frac{\alpha \beta}{\gamma \delta} \cdot \frac{\alpha \beta + \gamma \delta}{\sin x}$$

und ist negativ wegen $0 < x < 180^0$; die Bedingung $x + y = 180^0$ entspricht daher einem Maximum. Das gesuchte Viereck ist hiernach ein Sehnenviereck.

2. Um auch die im Eingange erwähnte Aufgabe zu lösen, nehmen wir

$$F = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2,$$
$$\varphi = Ax + By + Cz + D = 0,$$

und es sind dann zwei Unabhängige x und y vorhanden, während z eine Funktion von x und y ist. Setzt man die beiden Teilableitungen von F der Null gleich, so hat man zunächst

$$x - \alpha + (z - \gamma) \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$y - \beta + (z - \gamma) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Ferner ergibt sich durch partielle Differentiation der Gleichung $\varphi = 0$:

$$A + C \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad B + C \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

und durch Elimination der Ableitungen $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$:

$$A(z-\gamma)-C(x-\alpha)=0,$$
$$B(z-\gamma)-C(y-\beta)=0.$$

Verbindet man diese zwei Gleichungen mit der dritten $Ax+By+Cz+D=0$, so findet man der Reihe nach z, y und x, nämlich

$$x=\alpha-AK,\quad y=\beta-BK,\quad z=\gamma-CK,$$

wobei zur Abkürzung

$$K=\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma+D}{A^2+B^2+C^2}$$

gesetzt worden ist. Daß diese Werte nur einem Minimum von F entsprechen können, folgt aus der geometrischen Bedeutung unserer Aufgabe von selbst; auch sind die Werte für x, y, z identisch mit den aus der analytischen Geometrie bekannten Koordinaten des Fußpunktes der vom Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf die Ebene $Ax+By+Cz+D=0$ herabgelassenen Senkrechten.

3. Um kurz sein zu können, wollen wir im folgenden unter Stellung einer Ebene die drei Winkel verstehen, welche eine auf der Ebene errichtete Senkrechte mit drei rechtwinkligen Koordinatenachsen bildet. Ist nun s die Fläche eines ebenen Polygons, welches die Stellung $\alpha\beta\gamma$ besitzt, so sind die drei Projektionen von s auf die Koordinatenebenen xy, xz, yz der Reihe nach

$$c=s\,.\cos\gamma,\quad b=s\,.\cos\beta,\quad a=s\,.\cos\alpha.$$

Dabei werden die Projektionen a, b, c, ebenso wie die Projektionen einer begrenzten Geraden, als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem die Winkel α, β, γ spitz oder stumpf sind. Denken wir uns eine vierte Ebene, welche mit der Ebene von s den Winkel ϑ bildet, so ist die Projektion von s auf die neue Ebene

$$p=s\,.\cos\vartheta,$$

oder wenn uvw die Stellung der vierten Ebene bezeichnet nach § 23:

$$p=s(\cos\alpha\cos u+\cos\beta\cos v+\cos\gamma\cos w),$$

d. i.

$$p=a\cos u+b\cos v+c\cos w.$$

Diese Formel gibt also die Projektion p von s auf eine beliebige Ebene, wenn man erst die Projektionen von s auf die Koordinatenebenen und die Stellung der neuen Ebene kennt. Für mehrere beliebig liegende Figuren s_1, s_2 usw. hat man entsprechend

$$P=A\cos u+B\cos v+C\cos w,$$

wo P die Projektionssumme $p_1 + p_2 +$ usw. bedeutet, und ebenso A, B, C die Summen der auf den Koordinatenebenen konstruierten Projektionen sind. Wir suchen nun die Ebene, für welche P sein Maximum erreicht. Dann sind wegen der immer stattfindenden Bedingung

$$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w - 1 = 0$$

zwei unabhängige Größen u und v vorhanden, während w eine Funktion von u und v ist. Durch partielle Differentiation von P hat man, die Differentialquotienten gleich Null gesetzt,

$$A \sin u + C \sin w \frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

$$B \sin v + C \sin w \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Die partiellen Ableitungen der Bedingungsgleichung sind

$$\cos u \sin u + \cos w \sin w \frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

$$\cos v \sin v + \cos w \sin w \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Durch Elimination der partiellen Differentialquotienten von w ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$A \cos w = C \cos u, \quad B \cos w = C \cos v,$$

welche in Verbindung mit der Bedingungsgleichung zur Bestimmung von u, v, w führen; man erhält nämlich

$$\frac{\cos u}{A} = \frac{\cos v}{B} = \frac{\cos w}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

und hierdurch erfährt man die Stellung derjenigen Ebene, für welche die Summe der Projektionen von allen Polygonen ihren größten Wert erreicht.

Projiziert man s_1, s_2 usw. auf eine Ebene, welche senkrecht zur Ebene der größten Projektionssumme steht, so erhält man eine Projektionssumme gleich Null, wie aus den Formeln für u, v, w leicht zu ersehen ist.

Kapitel VI.

Die Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

§ 35. Grundbegriffe von unendlichen Reihen.

Schon in der Einleitung ist an Beispielen die Summe unendlicher Reihen erklärt und berechnet worden. Sei allgemein $\varphi(m)$ eine beliebige von der ganzen Zahl m abhängige Größe und werde das Summenzeichen durch die Gleichungen

$$\sum_{\nu}^{0,n} \varphi(\nu) = \varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(n),$$

$$\sum_{\nu}^{n,n+k} \varphi(\nu) = \varphi(n) + \varphi(n+1) + \cdots + \varphi(n+k)$$

erklärt. Wenn dann die Größe

$$S_n = \sum_{\nu}^{0,n-1} \varphi(\nu)$$

bei wachsenden Werten von n einem bestimmten endlichen Grenzwerte S zustrebt, so nennen wir diesen die Summe der unendlichen Reihe $\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots$ und sagen, die Reihe sei konvergent. Gibt es keinen bestimmten endlichen Grenzwert S, so heißt die Reihe divergent. Beiläufig werde noch bemerkt, daß jeder Übergang zur Grenze als Summierung einer unendlichen Reihe aufgefaßt werden kann; ist etwa

$$\lim_{n=\infty} A_n = A,$$

so setze man $A_0 = \varphi(0)$, $A_n - A_{n-1} = \varphi(n)$, dann wird

$$S_n = A_0 + (A_1 - A_0) + \cdots + (A_{n-1} - A_{n-2}) = A_{n-1},$$

also

$$A = \lim S_n = \lim S_{n+1},$$

womit das Behauptete ersichtlich wird.

Wir betrachten zunächst zwei an sich nützliche Beispiele.

a) Zufolge der bekannten Summenformel für die geometrische Progression gilt, wenn $\varphi(m) = \beta^m$ gesetzt wird, die Gleichung

$$S_n = \frac{1-\beta^n}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{n-1};$$

ist nun β ein positiver oder negativer echter Bruch, so wird $\lim \beta^n = 0$, mithin

$$\frac{1}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots, \quad -1 < \beta < +1.$$

Für $\beta = +1$ ist $S_n = n$, folglich $\lim S_n = \infty$; für $\beta > +1$ wird um so mehr $\lim S_n = \infty$; für $\beta = -1$ ist $S_n = 0$ oder $= +1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist; für $\beta < -1$ wachsen die Werte von S_n ins Unendliche und wechseln fortwährend ihre Zeichen. Demnach ist $\lim S_n$ nur unter der Bedingung $-1 < \beta < +1$ eine bestimmte endliche Größe, d. h. die Reihe $1 + \beta + \beta^2 + \cdots$ konvergiert für echt gebrochene β und divergiert in jedem anderen Falle.

b) Aus der leicht beweisbaren identischen Gleichung

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+m)}$$

folgt, indem man $m = 1, 2, 3, \ldots n-1$ setzt und alles addiert,

$$\text{(1)} \qquad \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left[\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \cdots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}\right],$$

wobei die eingeklammerte Reihe aus $n-1$ Gliedern besteht. Bei unendlich wachsenden n kommt es linker Hand auf den Grenzwert von

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$

an, und da man augenblicklich übersieht, daß für $\alpha = \beta$ der vorliegende Bruch konstant $= 1$ bleibt, so sind noch die Fälle $\alpha > \beta$ und $\alpha < \beta$ zu untersuchen.

Nach der Mittelwertformel des § 6,

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a+\vartheta h),$$

worin ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet, ist für $a = 1$, $\varphi(x) = x^{1+\mu}$

$$(1 + h)^{1+\mu} = 1 + h(1 + \mu)(1 + \vartheta h)^{\mu};$$

unter der Voraussetzung positiver h und μ hat man weiter

$$(1 + \vartheta h)^{\mu} < (1 + h)^{\mu},$$

daher

$$(1 + h)^{1+\mu} < 1 + (1 + \mu) h (1 + h)^{\mu}$$

oder

$$(1 - \mu h)(1 + h)^{\mu} < 1.$$

Im Falle $\mu h < 1$ folgt durch Division mit der positiven Größe $1 - \mu h$

$$(1 + h)^{\mu} < \frac{1}{1 - \mu h}, \quad 0 < \mu < \frac{1}{h}.$$

In dieser Ungleichung nehmen wir

$$h = \frac{1}{\alpha + m}, \quad \mu = \alpha - \beta,$$

wobei m eine ganze positive Zahl, $\alpha > \beta > 0$ sein möge und somit die angegebenen Bedingungen erfüllt sind; es ergibt sich dann

$$\left(\frac{\alpha + m + 1}{\alpha + m}\right)^{\alpha - \beta} < \frac{\alpha + m}{\beta + m}$$

oder

$$\frac{\beta + m}{\alpha + m} < \left(\frac{\alpha + m}{\alpha + m + 1}\right)^{\alpha - \beta}.$$

Setzt man der Reihe nach $m = 0, 1, 2, \ldots n - 1$ und multipliziert alle entstehenden Ungleichungen, so folgt

$$0 < \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\ldots(\alpha + n - 1)} < \left(\frac{\alpha}{\alpha + n}\right)^{\alpha - \beta}$$

und für unendlich wachsende n

$$\lim \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\ldots(\alpha + n - 1)} = 0,$$

wobei aber die Bedingung $\alpha > \beta$ festzuhalten ist. Aus der Formel (1) erhält man nun die Reihensummierung

$$\frac{\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\beta}{\alpha + 1} + \frac{\beta(\beta + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} + \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} + \cdots$$

oder auch, wenn man beiderseits die Einheit hinzufügt,

$$\frac{\alpha}{\alpha - \beta} = 1 + \frac{\beta}{\alpha + 1} + \frac{\beta(\beta + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} + \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} + \cdots,$$
$$\alpha > \beta > 0.$$

Der zweite Fall $\alpha < \beta$ kann sehr leicht auf den ersten zurückgeführt werden, indem man

$$\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)} = \frac{1}{\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}}$$

setzt; rechter Hand nähert sich der im Nenner stehende Bruch der Grenze Null, der Bruch linker Hand wächst also ins Unendliche und daher ergibt sich nach (1)

$$\infty = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \cdots,$$
$$\beta > \alpha > 0.$$

Im letzten Falle $\beta = \alpha$ wird die betrachtete Reihe zur folgenden

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+2} + \frac{\alpha}{\alpha+3} + \cdots,$$

und ihre Summe erscheint, aus (1) abgeleitet, unter der Form $0/0$; wir bestimmen sie daher auf einem anderen Wege. Die bekannten Ungleichungen (Einl. III, 2.)

$$\frac{1}{a+1} < \lg(a+1) - \lg a,$$
$$\frac{1}{a} > \lg(a+1) - \lg a$$

ziehen wir vorerst in die folgenden zusammen

$$\lg(z+1) - \lg z < \frac{1}{z} < \lg z - \lg(z-1),$$

setzen dann $z = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots \alpha + n$ und addieren alles; dies gibt

$$\text{(2)} \qquad \lg(\alpha+n+1) - \lg(\alpha+1)$$
$$< \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+3} + \cdots + \frac{1}{\alpha+n} < \lg(\alpha+n) - \lg\alpha.$$

Hieraus geht augenblicklich hervor, daß die Summe der zwischenliegenden Reihe gleichzeitig mit n ins Unendliche wächst.

Die Reihe

$$\text{(3)} \quad 1 + \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \cdots$$

konvergiert daher für $\alpha > \beta > 0$ und divergiert in jedem anderen Falle, wobei α und β immer als positiv vorausgesetzt werden.

Wie man sieht, ist die Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe leicht zu entscheiden, sobald man die Summe ihrer n ersten Glieder finden kann; dies gelingt aber nur selten, und man muß sich daher nach anderen Kennzeichen der Konvergenz oder Divergenz umsehen. Setzen wir zunächst alle Reihenglieder als positiv voraus und bezeichnen wir sie einfach mit u_0, u_1, u_2 usw., so leuchtet augenblicklich ein, daß dieselben fortwährend und ins Unendliche abnehmen müssen, d. h. daß $\lim u_n = 0$ werden muß (für $n = \infty$), wenn die Reihe konvergieren soll; denn betrügen unendlich viele Glieder mehr als irgend eine Zahl ε, so würde die Summe der unendlichen Reihe mehr als $\varepsilon + \varepsilon + \cdots$ in inf. ausmachen, d. h. unendlich groß sein. Dieses Kriterium reicht aber nicht aus, wie man schon an der Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ sehen kann, welche nach (2) divergiert, obschon ihre Glieder ins Unendliche abnehmen. Die Sache bedarf daher einer genaueren Untersuchung, welche im allgemeinen auf dem Prinzipe beruht, eine gegebene Reihe mit einer anderen zu vergleichen, deren Konvergenz oder Divergenz bereits festgestellt ist.

§ 36. Reihen mit positiven Gliedern.

I. Die gegebene Reihe sei

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

und zugleich werde vorausgesetzt, daß der Quotient u_{n+1}/u_n bei unendlich wachsenden n sich einer bestimmten Grenze λ nähere; diese ist jedenfalls positiv, kann aber < 1, $= 1$ oder > 1 sein.

Wenn λ weniger als die Einheit beträgt, so muß der Quotient u_{n+1}/u_n von einer gewissen Stelle $n = k$ an kleiner als ein zwischen λ und 1 eingeschalteter echter Bruch β bleiben, denn wenn dies nicht der Fall wäre, so könnte sich u_{n+1}/u_n nicht einer Grenze nähern, welche vorausgesetztermaßen unter β liegt. Man hat dann von $n = k$ an

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \beta, \qquad \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < \beta, \qquad \frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} < \beta, \ldots$$

und erhält daraus sehr leicht

$$u_{k+1} < u_k \beta, \qquad u_{k+2} < u_k \beta^2, \qquad u_{k+3} < u_k \beta^3, \ldots$$

und durch Addition

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots < u_k (1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots).$$

Die Summen, welche entstehen, wenn man immer mehr Glieder der Reihe u_k, u_{k+1}, u_{k+2} usw. vereinigt, wachsen fortwährend, sie bleiben aber, wie die vorige Ungleichung zeigt, kleiner als

$$u_k(1+\beta+\beta^2+\cdots) = u_k \frac{1}{1-\beta},$$

und da dieser Ausdruck einen endlichen Wert hat, so muß die Summe der Reihe $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} +$ usw., die bei wachsender Gliederzahl wächst, aber beschränkt bleibt, einem endlichen Grenzwert zustreben. Durch Hinzufügung der endlichen Summe $u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}$ erhält man wieder eine endliche Größe, d. h. die Reihe $u_0 + u_1 + \cdots$ in inf. konvergiert.

Wenn zweitens $\lambda > 1$ ist, so denke man sich zwischen 1 und λ den unechten Bruch γ eingeschaltet und nehme n so groß, daß $u_{n+1}/u_n > \gamma$ bleibt, was von einer gewissen Stelle $n = k$ an der Fall sein muß, weil sich außerdem u_{n+1}/u_n nicht einer über γ liegenden Grenze nähern könnte. Man erhält durch ähnliche Schlüsse wie vorhin

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots > u_k(1+\gamma+\gamma^2+\gamma^3+\cdots);$$

die rechter Hand stehende Reihe divergiert wegen $\gamma > 1$, mithin ist die Summe der Reihe links unendlich groß; dasselbe gilt dann von der Summe $u_0 + u_1 + u_2 +$ usw. Nach diesen Erörterungen haben wir den Satz:

Die unendliche Reihe mit positiven Gliedern $u_0 + u_1 + u_2 +$ usw. konvergiert, wenn der Grenzwert von u_{n+1}/u_n weniger, divergiert, wenn er mehr als die Einheit beträgt.

Als Beispiel diene die Reihe

$$(1) \qquad \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots;$$

hier ist $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{x}{1}$ usw.

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(2n-1)^2 x^2}{2n(2n+1)} = \lim \frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2 x^2}{1+\frac{1}{2n}} = x^2,$$

mithin konvergiert die Reihe für $x < 1$ und divergiert für $x > 1$.

Ebenso leicht ergibt sich, daß die Reihe

$$(2) \qquad \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \frac{x^4}{4^p} + \cdots$$

für $x < 1$ konvergiert und für $x > 1$ divergiert.

Wie man sieht, ist die Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe leicht zu entscheiden, sobald man die Summe ihrer n ersten Glieder finden kann; dies gelingt aber nur selten, und man muß sich daher nach anderen Kennzeichen der Konvergenz oder Divergenz umsehen. Setzen wir zunächst alle Reihenglieder als positiv voraus und bezeichnen wir sie einfach mit u_0, u_1, u_2 usw., so leuchtet augenblicklich ein, daß dieselben fortwährend und ins Unendliche abnehmen müssen, d. h. daß $\lim u_n = 0$ werden muß (für $n = \infty$), wenn die Reihe konvergieren soll; denn betrügen unendlich viele Glieder mehr als irgend eine Zahl ε, so würde die Summe der unendlichen Reihe mehr als $\varepsilon + \varepsilon + \cdots$ in inf. ausmachen, d. h. unendlich groß sein. Dieses Kriterium reicht aber nicht aus, wie man schon an der Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ sehen kann, welche nach (2) divergiert, obschon ihre Glieder ins Unendliche abnehmen. Die Sache bedarf daher einer genaueren Untersuchung, welche im allgemeinen auf dem Prinzipe beruht, eine gegebene Reihe mit einer anderen zu vergleichen, deren Konvergenz oder Divergenz bereits festgestellt ist.

§ 36. Reihen mit positiven Gliedern.

I. Die gegebene Reihe sei

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

und zugleich werde vorausgesetzt, daß der Quotient u_{n+1}/u_n bei unendlich wachsenden n sich einer bestimmten Grenze λ nähere; diese ist jedenfalls positiv, kann aber < 1, $= 1$ oder > 1 sein.

Wenn λ weniger als die Einheit beträgt, so muß der Quotient u_{n+1}/u_n von einer gewissen Stelle $n = k$ an kleiner als ein zwischen λ und 1 eingeschalteter echter Bruch β bleiben, denn wenn dies nicht der Fall wäre, so könnte sich u_{n+1}/u_n nicht einer Grenze nähern, welche vorausgesetztermaßen unter β liegt. Man hat dann von $n = k$ an

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \beta, \qquad \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < \beta, \qquad \frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} < \beta, \ \ldots$$

und erhält daraus sehr leicht

$$u_{k+1} < u_k\beta, \qquad u_{k+2} < u_k\beta^2, \qquad u_{k+3} < u_k\beta^3, \ \ldots$$

und durch Addition

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots < u_k(1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots).$$

Die Summen, welche entstehen, wenn man immer mehr Glieder der Reihe u_k, u_{k+1}, u_{k+2} usw. vereinigt, wachsen fortwährend, sie bleiben aber, wie die vorige Ungleichung zeigt, kleiner als

$$u_k(1+\beta+\beta^2+\cdots) = u_k \frac{1}{1-\beta},$$

und da dieser Ausdruck einen endlichen Wert hat, so muß die Summe der Reihe $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} +$ usw., die bei wachsender Gliederzahl wächst, aber beschränkt bleibt, einem endlichen Grenzwert zustreben. Durch Hinzufügung der endlichen Summe $u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}$ erhält man wieder eine endliche Größe, d. h. die Reihe $u_0 + u_1 + \cdots$ in inf. konvergiert.

Wenn zweitens $\lambda > 1$ ist, so denke man sich zwischen 1 und λ den unechten Bruch γ eingeschaltet und nehme n so groß, daß $u_{n+1}/u_n > \gamma$ bleibt, was von einer gewissen Stelle $n = k$ an der Fall sein muß, weil sich außerdem u_{n+1}/u_n nicht einer über γ liegenden Grenze nähern könnte. Man erhält durch ähnliche Schlüsse wie vorhin

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots > u_k(1+\gamma+\gamma^2+\gamma^3+\cdots);$$

die rechter Hand stehende Reihe divergiert wegen $\gamma > 1$, mithin ist die Summe der Reihe links unendlich groß; dasselbe gilt dann von der Summe $u_0 + u_1 + u_2 +$ usw. Nach diesen Erörterungen haben wir den Satz:

Die unendliche Reihe mit positiven Gliedern $u_0 + u_1 + u_2 +$ usw. konvergiert, wenn der Grenzwert von u_{n+1}/u_n weniger, divergiert, wenn er mehr als die Einheit beträgt.

Als Beispiel diene die Reihe

$$(1) \qquad \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots;$$

hier ist $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{x}{1}$ usw.

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(2n-1)^2 x^2}{2n(2n+1)} = \lim \frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2 x^2}{1+\frac{1}{2n}} = x^2,$$

mithin konvergiert die Reihe für $x < 1$ und divergiert für $x > 1$.

Ebenso leicht ergibt sich, daß die Reihe

$$(2) \qquad \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \frac{x^4}{4^p} + \cdots$$

für $x < 1$ konvergiert und für $x > 1$ divergiert.

Wendet man überhaupt das obige Theorem auf eine Potenzreihe an, nämlich

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

worin x und alle a als positiv vorausgesetzt werden, so findet man leicht, daß dieselbe konvergiert oder divergiert, je nachdem x weniger oder mehr als $\lim (a_n / a_{n+1})$ beträgt, vorausgesetzt, daß dieser Grenzwert existiert.

Das soeben bewiesene Kriterium verliert seine Anwendbarkeit in dem Falle $\lambda = 1$, weil die Herleitung desselben auf der Voraussetzung beruht, daß zwischen 1 und λ eine Zahl eingeschaltet werden könne; der genannte Ausnahmefall bedarf daher einer weiteren Untersuchung.

II. Wenn das Produkt

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

bei unendlich wachsenden n sich einer bestimmten endlichen Grenze μ nähert, so kann letztere (wegen $u_{n+1} < u_n$) nur eine positive Größe sein, rücksichtlich deren wir die drei Fälle $\mu > 1$, $\mu = 1$ und $\mu < 1$ unterscheiden.

Im Falle $\mu > 1$ denken wir uns zwischen μ und 1 den unechten Bruch γ eingeschaltet und n so groß genommen, daß das oben erwähnte Produkt größer als γ bleibt, was jedenfalls einmal geschehen wird. Von einer bestimmten Stelle $n = k$ an haben wir dann

$$k\left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) > \gamma, \quad (k+1)\left(1 - \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}\right) > \gamma,$$

$$(k+2)\left(1 - \frac{u_{k+3}}{u_{k+2}}\right) > \gamma \quad \text{usw.}$$

und erhalten hieraus

$$u_{k+1} < \frac{k-\gamma}{k} u_k, \quad u_{k+2} < \frac{k+1-\gamma}{k+1} u_{k+1} < \frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)}{k(k+1)} u_k,$$

$$u_{k+3} < \frac{k+2-\gamma}{k+2} u_{k+2} < \frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)(k-\gamma+2)}{k(k+1)(k+2)} u_k, \ldots,$$

mithin durch Addition

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots < u_k \left\{1 + \frac{k-\gamma}{k}\right.$$

$$\left. + \frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)}{k(k+1)} + \frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)(k-\gamma+2)}{k(k+1)(k+2)} + \cdots\right\}.$$

Die rechtsstehende Reihe ist ein Sonderfall der Reihe (3) in § 35, und zwar mit $\alpha = k - 1$, $\beta = k - \gamma$, wobei immer $k > \gamma > 1$

gewählt werden kann; auch konvergiert unsere Reihe, weil $\gamma > 1$, mithin $\alpha > \beta > 0$ ist. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe linker Hand, sowie die Konvergenz der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$.

Wenn $\mu < 1$ ist, so denke man sich zwischen μ und 1 den echten Bruch γ eingeschaltet und nehme n so groß, daß das Produkt $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ von einer bestimmten Stelle $n = k$ ab kleiner als γ bleibt. Durch ganz ähnliche Schlüsse wie vorhin gelangt man jetzt zu der Ungleichung

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots > u_k \left\{1 + \frac{k-\gamma}{k}\right.$$
$$\left. + \frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)}{k(k+1)} + \frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)(k-\gamma+2)}{k(k+1)(k+2)} + \cdots\right\}.$$

Wegen $\gamma < 1$ divergiert die eingeklammerte Reihe; um so mehr divergiert auch die Reihe linker Hand, sowie die Reihe $u_0 + u_1 + u_2$ usw. Alles zusammen gibt den Satz:

Die unendliche Reihe mit positiven Gliedern $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ konvergiert, wenn der Grenzwert des Produktes

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

mehr, divergiert, wenn er weniger als die Einheit beträgt.

Dieses Kennzeichen erledigt meistenteils die Fälle, wo das vorige keine Entscheidung gibt. So erhalten wir für die Reihe (1) mit $x = 1$

$$\lim\left[n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = \lim \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{4n}}{1 + \frac{1}{2n}} = \frac{3}{2} > 1;$$

mithin konvergiert die Reihe (1) auch für $x = 1$.

Für die Reihe (2) ist im Falle $x = 1$

$$\lim\left[n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = \lim\left[n\left\{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right\}\right]$$

oder, wenn $\frac{1}{n} = \delta$ gesetzt wird, nach Einl. V, 3. (3)

$$\lim\left[n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = \lim\left[\frac{(1+\delta)^p - 1}{\delta} \cdot \frac{1}{(1+\delta)^p}\right] = p;$$

mithin konvergiert oder divergiert die Reihe

$$(3)\qquad \frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots,$$

je nachdem $p > 1$ oder $p < 1$ ist.

Da sie für $p = 1$ divergiert, wie wir schon aus § 35 wissen, so sind jetzt alle möglichen Fälle erledigt.

Ein etwas zusammengesetzteres Beispiel bietet die Reihe

$$(4)\qquad -\lg\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)-\lg\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)-\lg\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)-\cdots$$

$$=\lg\left(1+\frac{x^2}{1^2-x^2}\right)+\lg\left(1+\frac{x^2}{2^2-x^2}\right)+\lg\left(1+\frac{x^2}{3^2-x^2}\right)+\cdots,$$

worin x einen echten Bruch bezeichnen möge. Hier ließe sich zwar das gegebene Kriterium direkt anwenden, würde aber zu einer etwas komplizierten Rechnung führen. Kürzer gelangt man durch die Bemerkung zum Ziele, daß nach Einl. III, 2., wenn $h > 0$, jederzeit $\lg(1+h) < h$ ist, und daß folglich die Summe der obigen Reihe weniger beträgt als

$$(5)\qquad \frac{x^2}{1^2-x^2}+\frac{x^2}{2^2-x^2}+\frac{x^2}{3^2-x^2}+\cdots$$

Bezeichnet man die vorstehenden Summanden mit u_1, u_2, u_3 usw., so erhält man

$$\lim\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right]=\lim\frac{2n^2+n}{(n+1)^2-x^2}$$

$$=\lim\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^2}=2>1;$$

demnach konvergiert die Reihe (5) und um so mehr die Reihe (4).

Es kann sich treffen, daß der mit μ bezeichnete Grenzwert gerade $= 1$ wird; dann verliert das vorige Kennzeichen seine Anwendbarkeit und macht wieder eine neue Untersuchung notwendig.

§ 37. Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Aus einer Reihe, welche Glieder mit verschiedenen Vorzeichen enthält, kann man eine neue Reihe dadurch bilden, daß man allen Gliedern das nämliche Vorzeichen gibt; wenn nun die letztere Reihe konvergiert, so ist zu erwarten, daß auch die erste konvergieren werde.

In der Tat kann man sich hiervon durch sehr einfache Schlüsse überzeugen, die wir nur an dem Falle zu erörtern brauchen, wo die Vorzeichen abwechseln. Die ursprüngliche Reihe ist dann

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots \tag{1}$$

und die abgeleitete

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots \tag{2}$$

Wenn nun die letztere konvergiert, so nähert sich jede der beiden Summen

$$\varphi(n) = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n-2}$$
$$\psi(n) = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$$

einer endlichen Grenze; im entgegengesetzten Falle wäre der Grenzwert von $\varphi(n) + \psi(n)$ unendlich, was der Konvergenz der Reihe (2) widerspräche; mithin ist auch der Grenzwert von

$$\varphi(n) - \psi(n) = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + u_{2n-2} - u_{2n-1}$$

eine endliche Größe; die Reihe (1) konvergiert daher und hat eine kleinere Summe als die Reihe (2). Ähnliche Schlüsse gelten in jedem anderen Falle.

Bei den häufig vorkommenden Reihen mit abwechselnden Vorzeichen kann man die Konvergenz noch auf einem anderen und viel einfacheren Wege erkennen, sobald von einer bestimmten Stelle $n = k$ an jedes Glied größer als das nächstfolgende ist, also

$$u_k > u_{k+1} > u_{k+2} > u_{k+3} \cdots$$

und außerdem wie früher $\lim u_n = 0$. Setzen wir nämlich

$$R_1 = u_k,$$
$$R_3 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}),$$
$$R_5 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}) - (u_{k+3} - u_{k+4}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und beachten, daß alle eingeklammerten Differenzen positiv sind, so haben wir

$$R_1 > R_3 > R_5 > R_7 \ldots \tag{3}$$

Anderseits gilt für die Größen

$$R_2 = (u_k - u_{k+1}),$$
$$R_4 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}),$$
$$R_6 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) + (u_{k+4} - u_{k+5}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Beziehung

$$R_2 < R_4 < R_6 < R_8 \ldots \tag{4}$$

Ferner ersieht man ohne weiteres die Ungleichungen

$$R_1 > R_2, \quad R_3 > R_4, \ldots,$$

da allgemein $R_{2n-1} - R_{2n} = u_{k+2n-1}$ positiv ist. Man erhält also nach (3)

$$R_1 > R_4, \quad R_1 > R_6, \ldots$$

Die ansteigende Reihe (4) ist also nach oben beschränkt und strebt nach dem Kernsatz einer Grenze zu, etwa

$$\lim R_{2n} = R.$$

Da ferner

$$\lim (R_{2n-1} - R_{2n}) = \lim u_{k+2n-1} = 0,$$

so folgt auch nach dem Exhaustionssatz

$$\lim R_{2n-1} = R;$$

die beiden Formeln für R bedeuten nichts anderes, als daß man summieren kann

$$R = u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - \cdots;$$

mithin konvergiert die Reihe $u_0 - u_1 + u_2 - \cdots$ Dies gibt den Satz:

Eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen konvergiert immer, sobald die absoluten Beträge ihrer Glieder von einer bestimmten Stelle an beständig abnehmend der Grenze Null zustreben.

Hieraus folgt z. B., daß die Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

konvergiert und daß ihre Summe zwischen

$$\frac{1}{1} \text{ und } \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ und } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

usw.

enthalten ist; dagegen würde eine divergente Reihe entstehen, wenn man alle Glieder durch ihre absoluten Werte ersetzen wollte. Der obige Satz entscheidet daher auch in solchen Fällen, wo das vorige Kennzeichen zu keinem Ergebnisse führen würde.

Wir wollen hier eine Eigentümlichkeit erwähnen, die bei den divergenten Reihen mit abwechselnden Vorzeichen stattfinden kann. Wenn nämlich $\lim u_n$ eine endliche, von Null verschiedene Größe ϱ ist, so nähert sich $u_n - u_{n+1}$ der Grenze Null, und es kann sich treffen, daß die Reihen

$$S_{2m} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2m-2} - u_{2m-1})$$
$$S_{2m+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots - (u_{2m-1} - u_{2m})$$

konvergieren, indem man jede eingeklammerte Differenz als ein Reihenglied betrachtet. Unter diesen Umständen sind $\lim S_{2m}$ und $\lim S_{2m+1}$ endliche Größen, und als Grenzwert ihrer Differenz erhält man

$$\lim (S_{2m+1} - S_{2m}) = \lim u_{2m} = \varrho,$$

d. h. die Summen der Reihenglieder

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots$$

nähern sich zwei endlichen, um ϱ voneinander verschiedenen Grenzen, je nachdem man eine gerade oder eine ungerade Zahl von Gliedern zusammenrechnet. Divergente Reihen dieser besonderen Gattung hat man oszillierende Reihen genannt.

Das einfachste Beispiel hierzu bietet die Reihe

$$a - a + a - a + \cdots,$$

deren Summe bei gerader Gliederzahl $= 0$, bei ungerader Gliederzahl $= a$ ist.

Als zweites Beispiel kann die Reihe

$$\tfrac{2}{1} - \tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{4} + \tfrac{6}{5} - \cdots$$

dienen. Hier ist

$$S_{2m} = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2m},$$

$$S_{2m+1} = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2m} + \frac{2m+2}{2m+1};$$

bezeichnen wir mit σ die Summe der unendlichen konvergierenden Reihe

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots,$$

so erhalten wir

$$\lim S_{2m} = \sigma, \quad \lim S_{2m+1} = \sigma + 1,$$

mithin oszilliert die obige Reihe zwischen σ und $\sigma + 1$.

§ 38. Bedingte und unbedingte Konvergenz.

Die in § 35 gezeigte Entstehungsweise der unendlichen Reihen beweist unmittelbar, daß durch die gegebene Funktion $\varphi(m)$ nicht nur die Größe der einzelnen Reihenglieder $u_0 = \varphi(0)$, $u_1 = \varphi(1)$, $u_2 = \varphi(2)$ usw., sondern auch die Stelle eines jeden derselben bestimmt wird; die Anordnung der Glieder ändern, heißt demnach, die Funktion φ durch eine andere ersetzen, wobei sich nicht im voraus absehen läßt, ob die Summe der Reihe ungestört bleiben wird

oder nicht. In der Tat wird das folgende Beispiel zeigen, daß eine andere Anordnung der Reihenglieder zu einer anderen Reihensumme führen kann.

Wir betrachten die folgenden zwei konvergierenden Reihen

$$\sigma = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \cdots,$$
$$s = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots,$$

deren zweite so aus der ersten gebildet ist, daß auf zwei positive Glieder ein negatives folgt; es darf dann σ als der Grenzwert von

$$\sigma_n = (\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right)$$

angesehen werden, ebenso s als Grenzwert von

$$s_n = (\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Die Differenz beider Gleichungen gibt

$$s_n - \sigma_n = \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{6}) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right]$$

und hieraus folgt für $n = \infty$

$$s - \sigma = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots] = \tfrac{1}{2}\sigma,$$

d. h.

$$s = \tfrac{3}{2}\sigma,$$

womit die Verschiedenheit von σ und s dargetan ist.

Man erkennt demnach die Notwendigkeit, zu unterscheiden, ob die Summe einer unendlichen Reihe bei beliebiger Anordnung einen festen Sinn hat oder nicht. Sei etwa

$$U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} \tag{1}$$

und habe $\lim U_n$ einen bestimmten endlichen Wert U, so daß

$$U = u_0 + u_1 + \cdots \tag{2}$$

eine konvergente Reihe ist. Aus dieser entstehe die Reihe $v_0 + v_1 + \cdots$ durch andere Anordnung der Glieder; doch ist zu beachten, daß die Umordnung einer unendlichen Reihe nicht ohne begriffliche Schwierigkeiten ist, z. B. wenn man so umordnet, daß zunächst die Teilreihe

$u_0 + u_2 + u_4 + \cdots$ ins Unendliche summiert, und dann erst mit Gliedern von ungeradem Zeiger beginnt. Wir lassen solche Fälle beiseite und nehmen an, daß bei der Annahme

$$V_p = v_0 + v_1 + \cdots + v_{p-1}$$

und gegebenem n die Zahl p so groß genommen werden kann, daß alle Glieder (1) der Summe U_n in V_p vorkommen, und außerdem noch $p - n$ anderweitige Glieder, deren Zeiger größer als $n - 1$ sind, und die wir in der Form

$$u_q + u_r + u_s + \cdots$$

zusammenfassen. Demnach ist

$$V_p - U_n = u_q + u_r + u_s + \cdots,$$

mithin bei unendlich wachsenden p und n

$$\lim V_p - U = \lim (u_q + u_r + u_s + \cdots);$$

soll nun die Reihe (3) gleichfalls U zur Summe haben, so muß $\lim V_p = U$ oder

$$\lim (u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0 \tag{3}$$

sein. Um aber den Gegenstand weiter zu verfolgen, wollen wir voraussetzen, daß die Reihe (2) von einer bestimmten Stelle an nur positive Glieder enthalte. Bei hinreichend großen n sind dann alle in der Gleichung

$$U - U_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

vorkommenden Glieder positiv, und die Summe $u_n + u_{n+1} +$ usw., der sogenannte Rest der Reihe, hat die Null zur Grenze, weil bei unendlich wachsenden n die linke Seite in $U - \lim U_n = 0$ übergeht. Nun besteht die Summe $u_q + u_r + u_s +$ usw. aus $p - n$ Gliedern, deren Zeiger $> n - 1$ sind; diese Glieder sind positiv und man hat deshalb

$$0 < u_q + u_r + u_s + \cdots < u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

mithin

$$\lim (u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0.$$

Unter der gemachten Voraussetzung konvergiert also die Reihe bei den betrachteten Anordnungen gegen denselben Grenzwert, hat dieselbe Summe.

Diese Schlußweise ist nicht mehr anwendbar, wenn die ursprüngliche Reihe der u_n positive und negative Glieder enthält. Aber in dem Falle, daß die Reihe konvergent bleibt, wenn man

allgemein u_n durch den absoluten Wert $|u_n|$ ersetzt, läßt sich Bestimmtes aussagen. Ist nämlich die Reihe

$$|u_1| + |u_2| + \cdots$$

konvergent, so ist nach dem Obigen

$$\lim_{n=\infty} [|u_q| + |u_r| + \cdots] = 0,$$

also auch

$$\lim_{n=\infty} |u_q + u_r + \cdots| = 0, \quad \lim_{n=\infty} (u_q + u_r + \cdots) = 0,$$

und daraus folgt, daß die Reihe bei den betrachteten Umordnungen gegen denselben Grenzwert konvergiert.

Wegen der für den Beweis notwendigen besonderen Natur der Umordnungen stellen wir keinen allgemeinen Satz über die Unabhängigkeit der Summe von der Anordnung auf und definieren: eine Reihe heiße unbedingt konvergent, wenn sie konvergent bleibt, nachdem man jedes Glied durch einen absoluten Betrag ersetzt hat. Die durchgeführte Betrachtung zeigt, daß eine unbedingt konvergente Reihe bei den betrachteten besonderen Umordnungen ihren Wert beibehält.

Die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots$$

ist nicht unbedingt konvergent; sie liefert, wie oben gezeigt, bei verschiedener Anordnung verschiedene Summen.

§ 39. Konvergenzbedingungen für periodische Reihen.

Wegen späterer Anwendungen betrachten wir noch Reihen von den Formen

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots,$$
$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots,$$

worin die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 usw., b_1, b_2 usw. als positiv vorausgesetzt werden mögen. Wir unterscheiden dabei drei Hauptfälle; die Koeffizienten können nämlich gleich sein, sie können zweitens eine steigende, oder drittens eine fallende Reihe bilden.

Für $a_0 = a_1 = a_2 \ldots$ ist nach einer bekannten Formel, die wir gleich noch beweisen werden, die Summe der n ersten Glieder

$$(1) \qquad a_0 [\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos (n-1) x]$$
$$= a_0 \frac{\sin (n - \frac{1}{2}) x}{2 \sin \frac{1}{2} x}.$$

Bei unendlich wachsenden n oszilliert $\sin(n - \frac{1}{2})x$ zwischen -1 und $+1$ hin und her, ohne sich einer bestimmten Grenze zu nähern; die Reihe hat also, ins Unendliche fortgesetzt, keine angebbare Summe, d. h. sie divergiert. Zufolge der Gleichung

$$(2) \qquad b_1 [\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin(n-1)x] = b_1 \left[\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x - \frac{\cos(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right],$$

die wir ebenfalls noch beweisen werden, gelten ganz ähnliche Schlüsse für die zweite Reihe; letztere divergiert daher gleichfalls für $b_1 = b_2 = b_3$ usw.

Bilden a_0, a_1, a_2 usw. und ebenso b_1, b_2 usw. eine steigende Reihe, so findet offenbar die Divergenz um so mehr statt; demnach bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, wo jene Koeffizienten eine abnehmende Reihe ausmachen.

Die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder der ersten Reihe heiße S_{n+1}; multiplizieren wir die Gleichung

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx$$

mit $2\sin\frac{1}{2}x$ und zerlegen rechter Hand jedes doppelte Produkt in die Differenz zweier Sinus, so erhalten wir

$$2S_{n+1}\sin\frac{1}{2}x = a_0\sin\frac{1}{2}x + a_1(\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x)$$
$$+ a_2(\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x) + \cdots + a_{n-1}\left(\sin\frac{2n-1}{2}x - \sin\frac{2n-3}{2}x\right)$$
$$+ a_n\left(\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{2n-1}{2}x\right),$$

und bei anderer Anordnung

$$2\sin\frac{1}{2}x \, . \, S_{n+1} - a_n\sin\frac{2n+1}{2}x$$
$$= (a_0 - a_1)\sin\frac{1}{2}x + (a_1 - a_2)\sin\frac{3}{2}x + (a_2 - a_3)\sin\frac{5}{2}x + \cdots$$
$$\cdots + (a_{n-1} - a_n)\sin\frac{2n-1}{2}x,$$

woraus beiläufig, wenn man alle Größen a gleich setzt, die Gleichung (1) folgt.

Unter der Voraussetzung, daß

$$(3) \qquad a_0 > a_1 > a_2 > a_3 \cdots \quad \text{und} \quad \lim a_n = 0$$

ist, lassen wir n ins Unendliche wachsen und haben

$$(4) \qquad \lim S_{n+1} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left\{(a_0 - a_1)\sin\frac{1}{2}x + (a_1 - a_2)\sin\frac{3}{2}x + (a_2 - a_3)\sin\frac{5}{2}x + \cdots\right\}.$$

Hinsichtlich der Reihe

$$(5) \qquad (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots,$$

als deren Glieder die eingeklammerten Differenzen gelten mögen, ist nun klar, daß sie nach (3) aus lauter positiven Gliedern besteht und daß die Summe ihrer n ersten Glieder $= a_0 - a_n$, mithin ihre volle Summe $= a_0 - \lim a_n = a_0$ ist; die Reihe (5) konvergiert also. Um so mehr muß auch die Reihe

$$(6) \quad (a_0 - a_1) \sin \tfrac{1}{2} x + (a_1 - a_2) \sin \tfrac{3}{2} x + (a_2 - a_3) \sin \tfrac{5}{2} x + \cdots$$

konvergieren, denn ihre Glieder sind, den absoluten Werten nach, kleiner als die gleichstelligen Glieder der Reihe (5), und außerdem besitzt die Reihe (6) teils positive, teils negative Glieder. Bezeichnen wir die nach § 37 endliche Summe der Reihe (6) mit $\varphi(x)$, so folgt nach (4)

$$\lim S_{n+1} = \frac{\varphi(x)}{2 \sin \frac{1}{2} x},$$

und hier ist die rechte Seite eine endliche Größe, solange x nicht einen der speziellen Werte $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ usw. erhält; d. h.:

> Wenn die positiven Koeffizienten a_0, a_1, a_2 usw. eine unendlich abnehmende Reihe bilden, so konvergiert die periodische Reihe
>
> $$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$
>
> für alle x, die nicht ganze Vielfache von 2π sind.

Indem man $\pi + x$ an die Stelle von x treten läßt, gelangt man zu dem zweiten Satze:

> Unter den obigen Bedingungen konvergiert auch die Reihe
>
> $$\tfrac{1}{2} a_0 - a_1 \cos x + a_2 \cos 2x - a_3 \cos 3x + \cdots$$
>
> für alle x, die nicht ungerade Vielfache von π sind.

Um die entsprechenden Theoreme für die periodische Reihe der Sinus zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichung

$$S_n = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx$$

mit $2 \sin \frac{1}{2} x$ und zerlegen jedes Produkt zweier Sinus in eine Kosinusdifferenz; bei etwas anderer Anordnung ergibt sich

$$2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, S_n + b_n \cos \frac{2n+1}{2} x = b_1 \cos \tfrac{1}{2} x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x$$
$$- (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x - \cdots - (b_{n-1} - b_n) \cos \frac{2n-1}{2} x;$$

setzt man alle Größen b gleich, so folgt die Gleichung (2).

Vorausgesetzt, daß

$$b_1 > b_2 > b_3 \cdots \quad \text{und} \quad \lim b_n = 0$$

ist, wird aus der vorigen Gleichung die folgende

$$\lim S_n = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x} \{ b_1 \cos \tfrac{1}{2} x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x \cdots \}.$$

Die Reihe

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots$$

enthält lauter positive Glieder, jede eingeklammerte Differenz als ein Glied gerechnet, und ihre Summe ist $= b_1$; daher konvergiert um so stärker die Reihe

$$(b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x + (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x + (b_3 - b_4) \cos \tfrac{7}{2} x + \cdots$$

und folglich hat auch die Reihe

$$b_1 \cos \tfrac{1}{2} x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x - \cdots$$

eine endliche Summe, die $\psi(x)$ heißen möge. Aus der nunmehrigen Gleichung

$$\lim S_n = \frac{\psi(x)}{2 \sin \frac{1}{2} x}$$

geht hervor, daß die betrachtete Reihe konvergiert, wenn x keinen der Werte $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ usw. erhält. Im letzteren Falle würde aber die Summe der Reihe verschwinden, und man kann daher sagen:

Wenn die Koeffizienten b_1, b_2, b_3 usw. eine unendlich abnehmende Reihe bilden, so ist die periodische Reihe

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

konvergent für jedes beliebige x.

Indem man $\pi + x$ an die Stelle von x treten läßt, gelangt man noch zu dem Satze:

Unter der obigen Voraussetzung ist auch

$$b_1 \sin x - b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x - \cdots$$

eine stets konvergierende Reihe.

§ 40. Addition und Multiplikation unendlicher Reihen.

I. Es sei

$$P_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \tag{1}$$

$$Q_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n, \tag{2}$$

so ist auch, wenn a und b irgendwelche von n unabhängige Faktoren bedeuten,

$$(3)\quad au_0 + bv_0 + au_1 + bv_1 + \cdots + au_n + bv_n = aP_n + bQ_n.$$

Unter der Voraussetzung, daß $\lim P_n = P$ und $\lim Q_n = Q$ endliche Größen sind, konvergieren die Reihen (1) und (2), und zwar hat die erste, ins Unendliche fortgesetzt, P zur Summe, die zweite Q; ferner gibt die Gleichung

$$au_0 + bv_0 + au_1 + bv_1 + au_2 + bv_2 + \cdots$$
$$= \lim (aP_n + bQ_n) = aP + bQ.$$

Man kann dieses Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

> Die Summe zweier konvergenter Reihen ist wieder eine konvergierende Reihe und die Summe der letzteren gleich der Summe der Summen der ursprünglichen Reihen.

Dieser Satz gilt auch allgemeiner für jede endliche Anzahl gegebener konvergierender Reihen.

II. Um den entsprechenden Satz für das Produkt zweier Reihen zu erhalten, lassen wir letztere nach Potenzen einer Variablen x fortschreiten, wodurch die Übersicht über die entsprechenden Teilprodukte erleichtert wird. Es sei nämlich

$$P_{2n} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_{2n} x^{2n},$$
$$Q_{2n} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \cdots + b_{2n} x^{2n},$$

mithin

$$\begin{aligned} P_{2n} Q_{2n} = a_0 b_0 &+ (a_0 b_1 + a_1 b_0) x \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$
$$+ (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} b_1 + a_{2n} b_0) x^{2n}$$
$$+ (a_1 b_{2n} + a_2 b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} b_2 + a_{2n} b_1) x^{2n+1}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (a_{2n-1} b_{2n} + a_{2n} b_{2n-1}) x^{4n-1} + a_{2n} b_{2n} x^{4n};$$

vergleicht man diesen Ausdruck mit dem folgenden,

$$(4)\quad \begin{aligned} S_{2n} = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots \\ \cdots + (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} b_1 + a_{2n} b_0) x^{2n}, \end{aligned}$$

indem man x sowie alle a und b als positiv voraussetzt, so erhellt unmittelbar die Richtigkeit der Ungleichung

$$S_{2n} < P_{2n} Q_{2n}.$$

Es sei ferner

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$
$$Q_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$

mithin

$$P_n Q_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots + (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}) x^{2n-1} + a_n b_n x^{2n},$$

so hat man durch Vergleichung mit S_{2n}

$$S_{2n} > P_n Q_n$$

und mit dem Vorigen zusammen

$$(5) \qquad P_{2n} Q_{2n} > S_{2n} > P_n Q_n.$$

Bei unendlich wachsenden n werden die für P_{2n}, Q_{2n}, P_n, Q_n angegebenen Reihen gleichzeitig unendlich und im Falle der Konvergenz sind

$$\lim P_{2n} = \lim P_n = P, \quad \lim Q_{2n} = \lim Q_n = Q$$

endliche Größen; unter dieser Voraussetzung ergibt sich nach (5) die Gleichung

$$(6) \qquad \lim S_{2n} = P Q,$$

welche sagt, daß die Reihe (4), ins Unendliche fortgesetzt, konvergiert und PQ zur Summe hat.

Wenn die ursprünglichen zwei Reihen mit Gliedern von ungerader Stelle aufhören, d. h. von folgenden Formen sind

$$P_{2n+1} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1},$$
$$Q_{2n+1} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{2n} x^{2n} + b_{2n+1} x^{2n+1},$$

so erleidet die vorige Betrachtung nur die kleine Modifikation, daß in der Gleichung (5)

$$P_{2n} = P_{2n+1} - a_{2n+1} x^{2n+1}, \qquad Q_{2n} = Q_{2n+1} - b_{2n+1} x^{2n+1}$$

zu setzen ist. Zufolge der angenommenen Konvergenz der Reihen wird dann

$$\lim (a_{2n+1} x^{2n+1}) = 0, \qquad \lim (b_{2n+1} x^{2n+1}) = 0,$$
$$\lim P_{2n+1} = P, \qquad \lim Q_{2n+1} = Q,$$

und damit kommt man wieder auf die Gleichung (6); d. h.:

Wenn die unendlichen und konvergierenden Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

nur positive Glieder enthalten, so ist ihr Produkt eine gleichfalls konvergente Reihe, nämlich

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots,$$

und die Summe der letzteren ist das Produkt aus den Summen der beiden ersten Reihen.

Die Schlüsse, mittels deren die Ungleichung (5) hergeleitet wurde, verlieren ihre Anwendbarkeit in dem Falle, wo die ursprünglichen Reihen negative Glieder enthalten; denn es könnten z. B. die Glieder, um welche $P_{2n} Q_{2n}$ reicher als S_{2n} ist, zusammen so viel Negatives geben, daß $P_{2n} Q_{2n}$ weniger als S_{2n} betrüge. Unter diesen Umständen wäre es also möglich, daß die Reihe

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

divergierte, und dann würde ihre Summe nicht angebbar, mithin auch nicht $= P Q$ sein. Das wirkliche Vorkommen dieses Ausnahmefalles mag folgendes Beispiel zeigen.

Nimmt man

$$x = 1, \quad a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n+1}}$$

und multipliziert die konvergente Reihe

$$P = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \cdots \tag{7}$$

mit sich selbst, indem man die Glieder auf die obige Weise ordnet, so ergibt sich eine neue Reihe

$$S = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \cdots,$$

deren n^{tes} Glied ist:

$$t_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-1)2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-2)3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}.$$

Nun ist, wenn a und b beliebige positive Größen sind,

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0, \quad a + b - 2\sqrt{ab} > 0,$$

das geometrische Mittel zweier Zahlen also kleiner als deren arithmetisches Mittel; danach hat man

$$\sqrt{(n-k)(k+1)} < \frac{n+1}{2},$$

mithin

$$\sqrt[4]{(n-k)(k+1)} < \sqrt{\tfrac{1}{2}(n+1)}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{(n-k)(k+1)}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}};$$

nimmt man in der letzten Ungleichung $k = 0, 1, 2, \dots n-1$ und addiert alle entstehenden Ungleichungen, so erhält man

$$t_n > n\sqrt{\frac{2}{n+1}} \quad \text{oder} \quad t_n > \sqrt{\frac{2n^2}{n+1}} > \sqrt{2(n-1)}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß t_n gleichzeitig mit n ins Unendliche wächst, daß also die Reihe S divergiert, mithin S nicht $= P^2$ sein kann.

Hiernach bedarf der Fall, wo die zu multiplizierenden Reihen negative Glieder enthalten, einer besonderen Untersuchung.

Mögen die Reihen

$$P^0 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots, \quad Q^0 = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots$$

jedenfalls für $x = 1$ unbedingt konvergieren, und sei

$$P_n^0 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n, \quad Q_n^0 = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n;$$

setzt man

$$(8) \qquad a_m = |\alpha_m|, \quad b_m = |\beta_m|,$$

so konvergieren die Reihen P und Q und die obigen Betrachtungen sind anwendbar. Die Größen S_{2n} mögen, wenn man a_m und b_m durch α_m und β_m ersetzt, in S_{2n}^0 übergehen; dann bestehen die Differenzen

$$(9) \qquad P_{2n}^0 Q_{2n}^0 - S_{2n}^0, \quad S_{2n}^0 - P_n^0 Q_n^0$$

aus gleichvielen Gliedern von derselben Form wie die oben betrachteten

$$P_{2n} Q_{2n} - S_{2n}, \quad S_{2n} - P_n Q_n,$$

nur ist überall der lateinische durch den griechischen Buchstaben ersetzt. Die Ausdrücke enthalten ausgerechnet kein negatives Vorzeichen, da immer alle Glieder des Subtrahenden im Minuenden enthalten sind; der Übergang von den griechischen zu den lateinischen Buchstaben, die mit jenen durch die Beziehungen (8) verknüpft sind, kann also nicht den absoluten Wert einer der Differenzen (9) verkleinern; also

$$|P_{2n}^0 Q_{2n}^0 - S_{2n}^0| \leqq P_{2n} Q_{2n} - S_{2n},$$
$$|S_{2n}^0 - P_n^0 Q_n^0| \leqq S_{2n} - P_n Q_n.$$

Da nun die rechts stehenden positiven Größen, wenn $n = +\infty$ wird, dem Grenzwert Null zustreben, gilt dasselbe von den links stehenden; also folgt

$$(10) \qquad \lim_{n=\infty} (P_n^0 Q_n^0 - S_{2n}^0) = 0.$$

Nun konvergieren die Reihen P^0 und Q^0, also ist nach Einl. II, 6.

$$\lim P_n^0 = P^0, \quad \lim Q_n^0 = Q^0, \quad \lim P_n^0 Q_n^0 = P^0 Q^0,$$

und wenn man die letzte dieser Gleichungen mit (10) kombiniert, erhält man die Gleichung

$$P^0 Q^0 = \lim S_{2n}^0;$$

ebenso ergibt sich

$$\lim (P_{2n}^0 Q_{2n}^0) = \lim S_n^0 = \lim P_{2n}^0 . \lim Q_{2n}^0 = P^0 Q^0.$$

Ersetzt man nun x durch 1, so ist hiermit folgendes bewiesen:

Zwei unbedingt konvergente Reihen $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots$ und $\beta_0 + \beta_1 + \cdots$ können wie endliche Summen multipliziert werden; setzt man

$$\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0, \quad \gamma_n = \alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n \beta_0,$$

so konvergiert die Reihe $\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots$ unbedingt und gilt die Gleichung

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots = (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots)(\beta_0 + \beta_1 + \cdots).$$

§ 41. Differentiation unendlicher Reihen.

I. Sei eine unendliche Reihe aus Gliedern $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... gebildet, deren jedes auf der Strecke $a \ldots b$ eine stetige Funktion von x ist. Wir nennen die Reihe auf dieser Strecke gleichmäßig konvergent, wenn zu jedem beliebig klein gegebenen positiven Wert ε eine ganze Zahl n_ε derart gefunden werden kann, daß bei der Annahme $n > n_\varepsilon$ und beliebigen Werten der ganzen Zahl k die Ungleichung

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

auf der ganzen Strecke $a \ldots b$ gilt. Das trifft z. B. zu, wenn auf dieser Strecke $|f_\nu(x)| < c_\nu$ gesetzt werden kann und c_ν von x unabhängige Größen sind, deren Summe $c_1 + c_2 + \cdots$ konvergiert. So ist bei der geometrischen Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$, wenn x der Strecke $-\frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{2}$ angehört, allgemein $|x^\nu| < (\frac{3}{4})^\nu$, die Reihe $1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots$ konvergiert aber; die geometrische Reihe konvergiert also auf der Strecke $-\frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{2}$ gleichmäßig; die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ können bei dieser Betrachtung durch irgend zwei positive echte Brüche ersetzt werden, deren erster der kleinere ist.

Jetzt läßt sich zunächst allgemein zeigen, daß die Summe der unendlichen Reihe

$$\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

auf der Strecke $a \ldots b$ stetig ist. Denn sei ε gegeben und n oberhalb der Schranke n_ε fest gewählt; seien ferner x und $x + h$ zwei

Stellen der Strecke $a \ldots b$. Dann gibt die gleichmäßige Konvergenz bei jedem k

$$(1)\qquad \left|\sum_{\nu}^{n,\,n+k} f_\nu(x)\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{\nu}^{n,\,n+k} f_\nu(x+h)\right| < \varepsilon,$$

und da die Grenzwerte

$$\sum_{\nu}^{n,\,\infty} f_\nu(x), \quad \sum_{\nu}^{n,\,\infty} f_\nu(x+h)$$

endlich und bestimmt sind, folgt aus den Ungleichungen (1) nach dem Schrankensatze Einl. II, 6.

$$\left|\sum_{\nu}^{n,\,\infty} f_\nu(x)\right| \leqq \varepsilon, \quad \left|\sum_{\nu}^{n,\,\infty} f_\nu(x+h)\right| \leqq \varepsilon$$

und hieraus

$$(2)\qquad \left|\sum_{\nu}^{n,\,\infty} [f_\nu(x+h) - f_\nu(x)]\right| \leqq 2\varepsilon.$$

Nun ist die endliche Summe

$$S(x) = \sum_{\nu}^{1,\,n-1} f_\nu(x)$$

auf der Strecke $a \ldots b$ stetig; wählt man also die positive Größe δ hinreichend klein, so besteht bei der Annahme $|h| < \delta$ immer die Ungleichung

$$|S(x+h) - S(x)| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{\nu}^{1,\,n-1} [f_\nu(x+h) - f_\nu(x)]\right| < \varepsilon,$$

die mit der Ungleichung (2) zusammen ergibt

$$\left|\sum_{\nu}^{1,\,\infty} [f_\nu(x+h) - f_\nu(x)]\right| < 3\varepsilon,$$

oder auch

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < 3\varepsilon.$$

Dabei kann 3ε ebensogut wie ε als beliebig klein gegeben gelten, und die Voraussetzung der letzten Ungleichung ist $|h| < \delta$; die Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$ ist also in vollem Umfang bewiesen. Die Summe einer auf irgend einer Strecke gleichmäßig konvergenten Reihe ist auf eben dieser Strecke stetig.

An dem Beispiel der geometrischen Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

bestätigt sich dieser Satz sofort.

II. Jetzt wollen wir annehmen, daß jede Funktion $f_\nu(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ eine stetige Ableitung besitze und daß die Reihe

$$\psi(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} f'_\nu(x)$$

auf der Strecke $a \ldots b$ gleichmäßig konvergiere. Dann wollen wir die Gleichung $\varphi'(x) = \psi(x)$ beweisen, d. h. daß die Reihe $\varphi(x)$ gliedweise differenziert werden darf. Setzen wir zu diesem Zweck

$$\varphi(x) = S(x) + R(x), \tag{3}$$

so ist $S'(x)$ die Summe der ersten $n-1$ Glieder der Reihe $\psi(x)$, und zu der beliebig klein gegebenen Größe ε gehört eine solche ganze Zahl n'_ε, daß die Ungleichung

$$|\psi(x) - S'(x)| < \varepsilon$$

gilt, sobald $n > n'_\varepsilon$; das entspricht der ersten Ungleichung (2) bei der Reihe $\varphi(x)$; man kann daher setzen

$$\psi(x) = S'(x) + \varrho, \tag{4}$$

wobei $|\varrho| < \varepsilon$ und x auf der Strecke $a \ldots b$ beliebig bleibt.

Nun ist offenbar nach (3)

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{S(x+h) - S(x)}{h} + \frac{R(x+h) - R(x)}{h};$$

wenn n auch oberhalb der Schranke n_ε liegt, ist

$$|R(x+h) - R(x)| < 2\varepsilon,$$

ferner gibt der Mittelwertsatz mit der Gleichung (4)

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x+\theta h) = \psi(x+\theta h) + \varrho_1,$$

wobei θ ein positiver echter Bruch und $|\varrho_1| < \varepsilon$; also folgt

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \psi(x+\theta h) + \varrho_1 + \frac{\varrho_2}{h}, \tag{5}$$

wobei $|\varrho_2| < 2\varepsilon$.

Bisher sind x und $x+h$ beliebige Stellen der Strecke $a \ldots b$; jetzt setzen wir $h^2 = \varepsilon$, $h = +\sqrt{\varepsilon}$; dann folgt

$$\left|\frac{\varrho_2}{h}\right| < 2\sqrt{\varepsilon},$$

und die Gleichung (5) ergibt, wenn man für ε eine Reihe unendlich abnehmender Werte, für h die entsprechenden Werte $\sqrt{\varepsilon}$ nimmt, die Folgerung

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \psi(x), \quad \varphi'(x) = \psi(x).$$

Eine gleichmäßig konvergierende Reihe darf gliedweise differenziert werden, wenn die aus den Ableitungen gebildete Reihe ebenfalls gleichmäßig konvergiert.

III. a) Als Beispiel diene eine beliebige Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

die an der Stelle $x = x_0$ konvergiere; $|x_0| = g$ sei positiv und g_1 irgend eine positive Größe zwischen 0 und g. Dann werden die Größen $a_n x_0^n$ bei wachsenden Werten von n beliebig klein, also ist jedenfalls

$$|a_n x_0^n| = |a_n| g^n < 1, \quad |a_n| < \frac{1}{g^n}, \tag{6}$$

sobald n eine Schranke n_0 überschritten hat. Dann gilt allgemein bei der Annahme $|x| \leqq g_1$ die Ungleichung

$$|a_n x^n| < \left(\frac{g_1}{g}\right)^n;$$

die Glieder der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ sind also von einer gewissen Stelle ab kleiner als die entsprechenden der konvergenten, von x unabhängigen Reihe

$$G = 1 + \frac{g_1}{g} + \left(\frac{g_1}{g}\right)^2 + \cdots;$$

$g_1 : g$ ist ja ein echter Bruch. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ auf der Strecke $-g_1 \ldots g_1$ bewiesen.

Man sieht ferner aus der Beziehung (6), daß die Glieder der Reihe

$$\mathfrak{P}_0(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots,$$

wenn $n > n_0$, absolut kleiner sind als die entsprechenden der Reihe

$$\frac{1}{g} + \frac{2 g_1}{g^2} + \frac{3 g_1^2}{g^3} + \cdots,$$

und diese konvergiert nach § 36, da das Verhältnis eines Gliedes zum vorhergehenden durch die Formel

$$\frac{n+1}{n} \frac{g_1}{g}$$

ausgedrückt wird, die, wenn n hinreichend groß ist, unter dem echten Bruche α verbleibt, wenn

$$\frac{g_1}{g} < \alpha < 1.$$

Auch die Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ konvergiert daher auf der Strecke $-g_1 \ldots g_1$ gleichmäßig und stellt nach dem bewiesenen allgemeinen Satze die

Ableitung $\mathfrak{P}'(x)$ dar; sie entsteht ja, indem man $\mathfrak{P}(x)$ gliedweise differenziert. Potenzreihen dürfen also gliedweise differenziert werden:

$$D_x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = \mathfrak{P}'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots$$

b) Ein weiteres Beispiel biete die Reihe

$$F(x) = \sum_n^{1,\infty} \lg\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

in der $0 < x < 1$ sei. Dann findet man nach Einl. III, 2., wenn $h > 0$ und

$$h_1 = \frac{h}{1+h}, \quad h = \frac{h_1}{1-h_1}, \quad 1 - h_1 = \frac{1}{1+h}, \quad h_1 < 1$$

gesetzt wird,

$$0 < \lg(1+h) < h, \quad 0 < -\lg(1-h_1) < \frac{h_1}{1-h_1},$$

also, wenn $h_1 = x^2/n^2$,

$$0 < -\lg\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) < \frac{x^2}{n^2 - x^2} < \frac{1}{n^2 - 1} < \frac{1}{(n-1)^2};$$

die Glieder der Reihe $F(x)$ sind also absolut kleiner als die entsprechenden der konvergenten, von x unabhängigen Reihe $\Sigma 1/n^2$; die Reihe $F(x)$ konvergiert also gleichmäßig auf jeder Strecke $0 \ldots x_0$, wobei x_0 ein echter Bruch ist. Die Reihe der Ableitungen ist

$$\Phi(x) = \sum_n \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

und offenbar gilt, sobald $n > 1$, die Ungleichung

$$\left|\frac{2x}{n^2 - x^2}\right| < \frac{2}{(n-1)^2};$$

auch die Reihe $\Phi(x)$ konvergiert also auf der Strecke $0 \ldots x_0$ gleichmäßig und ist daher die Ableitung der Reihe $F(x)$:

$$F'(x) = \Phi(x).$$

c) Daß auch unter Umständen nicht gliedweise differenziert werden kann, zeigt die Reihe

$$S = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots$$

Hier konvergiert die Reihe nach § 39 für alle zwischen 0 und π enthaltenen x und daher ist S eine bestimmte Funktion von x; dagegen divergiert die Reihe der Differentialquotienten

$$-\sin x - \sin 2x - \sin 3x - \cdots$$

und folglich kann ihre Summe nicht $= dS : dx$ sein. Das Befremdliche, was für den ersten Anblick hierin liegen mag, verliert sich übrigens durch die Bemerkung, daß es bei der Differentiation unendlicher Reihen eigentlich auf die Umkehrung der Aufeinanderfolge zweier ganz verschiedenen Operationen ankommt. Bezeichnen wir nämlich den Differentialquotienten einer Funktion durch das Vorsetzen von D und die Summe von $u_0 + u_1 + u_2 +$ usw. kurz mit Σu_n, so ist in unserem Beispiele

$$S = \Sigma \frac{\cos nx}{n} \quad (\text{für } n = 1, 2, 3 \ldots)$$

und daher auch

$$DS = D\Sigma \frac{\cos nx}{n};$$

dagegen ist nicht

$$DS = \Sigma D \frac{\cos nx}{n} = \Sigma(-\sin nx),$$

d. h. man darf die mit Σ und D bezeichneten Operationen nicht in umgekehrter Ordnung vornehmen.

Wie man aus dem Vorigen sieht, hört die Untersuchung darüber, ob überhaupt $D\Sigma u_n = \Sigma D u_n$ ist, sogleich auf, wenn die Reihe der Differentialquotienten divergiert.

§ 42. Der Doppelreihensatz.

Sei $S = u_1 + u_2 + \cdots$ eine unendliche Reihe, deren einzelne Glieder ihrerseits unendliche Reihen sind, etwa nach der Formel

$$u_n = u_{n1} + u_{n2} + \cdots;$$

dann nennen wir S eine unendliche Doppelreihe. Eine solche kann in bemerkenswerter Weise umgestaltet werden, wenn jede einzelne der Reihen u_n und S unbedingt konvergiert.

Seien zunächst alle Größen u_{nr} positiv; wir schreiben sie in einem rechteckigen Schema, in welchem durch die ersten Zeiger die Zeilen, durch die zweiten Zeiger die Spalten gekennzeichnet werden:

$$\begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots \\ u_{31} & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}$$

Man erhält dann die Summe S ihrer Definition gemäß, indem man erst die Glieder jeder Zeile summiert und dann die Zeilensummen

$u_1, u_2, \ldots$ addiert. Dasselbe Ergebnis erhält man aber auch, wenn man in folgender Weise addiert:

$$u_{11} + (u_{12} + u_{21}) + (u_{13} + u_{22} + u_{31}) + \cdots,$$

d. h. indem man erst in jeder von rechts oben nach links unten gehenden Diagonale des obigen Schemas und dann die Summen dieser Diagonalen addiert. Eine Diagonale enthält die Glieder u_{nr}, in denen $n + r$ ein fester Wert ist; ihre Summe heiße v_{n+r-1}, also

$$v_1 = u_{11}, \quad v_2 = u_{12} + u_{21}, \quad v_3 = u_{13} + u_{22} + u_{31}, \quad \text{usf.}$$

Die Glieder der Summe v_2 sind in den ersten beiden, die Glieder der Summe v_n in den ersten n Zeilen enthalten; die Summe $v_1 + v_2 + \cdots + v_m$ ist also nicht größer als die Summe der ersten m Zeilen,

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m \leqq u_1 + u_2 + \cdots + u_m,$$

und da die unendliche Reihe $u_1 + u_2 + \cdots$ konvergiert und die Summe S gibt, ist jede Summe $v_1 + v_2 + \cdots + v_m < S$; die unendliche Reihe $v_1 + v_2 + \cdots$ konvergiert also ebenfalls, und gebe die Summe T; dann ist offenbar nach dem Schrankensatze

$$T \leqq S. \tag{1}$$

Jetzt werde

$$S_m = u_1 + u_2 + \cdots + u_m, \quad T_m = v_1 + v_2 + \cdots + v_m$$

gesetzt; dann ist T_m die Summe der ersten m Diagonalen, die in den ersten m Zeilen enthalten sind; somit folgt

$$S_m - T_m \geqq 0,$$

und die Differenz $S_m - T_m$ ist die Summe aller Größen u_{nr}, in denen $n \leqq m$ und $n + r > m$ ist; offenbar ist

$$T = \lim_{m=\infty} T_m. \tag{2}$$

Wegen der Konvergenz der Reihe S kann man nun setzen

$$S = S_m + \sigma,$$

und man kann, wenn ε beliebig klein und positiv gegeben ist, m so wählen, daß

$$0 < \sigma < \varepsilon. \tag{3}$$

Nach dieser Wahl werde m festgehalten und in jeder der Reihen u_1, $u_2, \ldots u_m$, also in jeder der ersten m Reihen

$$u_n = u_{n1} + u_{n2} + \cdots$$

ein solcher Zeiger k bestimmt, daß bei der Bezeichnung

$$u_n = u_{n1} + u_{n2} + \cdots + u_{nk} + \varrho_n$$

die Ungleichung $\varrho_n < \varepsilon / m$ gilt. Die Zahl k kann, ohne ihre Bedeutung zu verlieren, vergrößert werden; man kann ihr also in allen m Reihen $u_1, u_2, \ldots u_m$ denselben, nämlich den größten der Werte geben, die sich zunächst dargeboten haben. So erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned} S_m = & u_{11} + u_{12} + \cdots + u_{1k} + \varrho_1 \\ & + u_{21} + u_{22} + \cdots + u_{2k} + \varrho_2 \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_{m1} + u_{m2} + \cdots + u_{mk} + \varrho_m, \end{aligned}$$

und wenn man $\sigma_1 = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m$ setzt, gilt die Ungleichung

$$\sigma_1 < \varepsilon, \tag{4}$$

und, da $S_m = S - \sigma$, die Gleichung

$$\begin{aligned} S = & u_{11} + \cdots + u_{1k} \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + u_{m1} + \cdots + u_{mk} + \sigma_1 + \sigma. \end{aligned}$$

Die hier ausgeschriebenen Größen u_{nr} haben alle keine höhere Zeigersumme als $m + k$, sind also in der Gesamtheit der ersten $m + k$ Diagonalen enthalten; ihre Summe ist $\leqq T_{m+k}$, und es folgt

$$S - (\sigma + \sigma_1) \leqq T_{m+k} \leqq T$$

wegen der Beziehung (2). Anderseits geben die Ungleichungen (3) und (4)

$$\sigma + \sigma_1 < 2\varepsilon,$$

also ist die Beziehung $S > T$ unmöglich, und nach (1) folgt $S = T$; die Summe der Zeilensummen ist gleich der Summe der Diagonalensummen.

Sodann folgt aus der Konvergenz der Diagonalsummenreihe, daß jede Spaltensumme

$$w_n = u_{1n} + u_{2n} + \cdots$$

konvergiert. Denn jede beliebige Anzahl von Gliedern einer solchen Summe sind in einer Diagonalsumme enthalten, z. B. in T_p, wenn man nicht mehr als die k ersten Glieder der Reihe w_n und $p > n + k$ nimmt. Da nun $T_p < T$, so bleibt auch jede Teilsumme der Reihe w_n unter T, die Reihe konvergiert also in der Tat.

Jetzt betrachten wir eine Diagonalsumme T_p mit beliebig großem Zeiger und fragen, welche Glieder der m Spaltensummen $w_1, w_2, \ldots w_m$ in T_p vorkommen; m werde festgehalten, p beliebig vergrößert. Dann kommen aus w_1 alle Glieder u_{k1} in T_p vor, in denen $1 + k < p$, also $k < p - 1$; ebenso aus w_2 die ersten $p - 2$ Glieder usf.; aus w_m die ersten $p - m$ Glieder. Diese Zahlen $p - 1, \ldots p - m$ können sämtlich

durch Vergrößerung von p beliebig groß gemacht werden, so daß die nach ihrem Abzug verbleibenden Reste in den m Reihen w_n einzeln und daher auch zusammengenommen so klein gemacht werden können wie man will. Die Summe $w_1 + w_2 + \cdots + w_m$ unterscheidet sich also beliebig wenig von einer Größe, die nicht größer als T ist; die Ungleichung

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_m > T$$

ist unmöglich, also folgt

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_m \leqq T,$$

und damit die Konvergenz der unendlichen Reihe $w_1 + w_2 + \cdots$, d. h. der Reihe der Spaltensummen. Aus dieser aber ist T, die Summe der Diagonalsummen, genau so gebildet wie aus der Summe der Zeilensummen; das obige Schlußverfahren ist von neuem anwendbar und führt zu der Gleichung

$$T = w_1 + w_2 + \cdots = v_1 + v_2 + \cdots$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

> Konvergiert in einer Doppelreihe, deren Glieder positiv sind und nach Zeilen und Spalten geordnet werden, die Summe der Zeilensummen, so konvergiert auch die Summe der Spaltensummen, und zwar gegen denselben Grenzwert wie jene. Der gemeinsame Wert kann auch als Summe der Diagonalsummen dargestellt werden.

Dieser Satz bleibt im wesentlichen erhalten, wenn man die Größen u_{nr} durch andere u_{nr}^0 ersetzt, die nicht mehr notwendig positiv, aber so beschaffen sind, daß die Zeilensummen unbedingt konvergieren und ebenso die Summe der Zeilensummen. Sei allgemein $|u_{nr}^0| = u_{nr}$; dann erfüllen die Größen u die Voraussetzungen des soeben bewiesenen Satzes; jede Zeilensumme

$$u_n^0 = u_{n1}^0 + u_{n2}^0 + \cdots$$

erfüllt die Ungleichung

$$|u_n^0| \leqq u_n$$

und die Diagonalsummen

$$v_n^0 = u_{1n}^0 + u_{2,n-1}^0 + \cdots + u_{n1}^0$$

die Ungleichung

$$|v_n^0| \leqq v_n.$$

Daraus folgt die unbedingte Konvergenz der Reihe

$$T^0 = v_1^0 + v_2^0 + \cdots$$

und die Ungleichung

$$|T^0| \leqq T.$$

Ferner ist unmittelbar ersichtlich, daß auch die Spaltensummen der Größen u^0 unbedingt konvergieren; sie sind ja

$$w_n^0 = u_{1n}^0 + u_{2n}^0 + \cdots,$$

und offenbar ist

$$|w_n^0| \leqq w_n.$$

Hiermit sind die Konvergenzfragen erledigt; es bleibt noch zu beweisen

$$T^0 = u_1^0 + u_2^0 + \cdots = S^0.$$

Verstehen wir unter T_m^0 und S_m^0 die Größen, die aus T_m und S_m entstehen, indem man immer u_{nr} durch u_{nr}^0 ersetzt, so ist klar, nach dem, was oben über die Differenz $S_m - T_m$ gesagt wurde, daß die Differenz $S_m^0 - T_m^0$ die Summe gewisser Werte u_{nr}^0 ist, sich also nicht dem absoluten Betrage nach verkleinern kann, wenn man u_{nr} an Stelle von u_{nr}^0 setzt; somit folgt

$$|S_m^0 - T_m^0| \leqq S_m - T_m.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung nähert sich, wie wir wissen, mit wachsenden m der Grenze Null an; somit folgt

$$\lim_{m=\infty} (S_m^0 - T_m^0) = 0$$

und da $\lim T_m^0 = T^0$, folgt nach den Limesregeln

$$\lim_{m=\infty} S_m^0 = T^0 = S^0,$$

was bewiesen werden sollte.

Konvergiert eine nach Zeilen und Spalten geordnete Doppelreihe in dem Sinne unbedingt, daß jede Zeilensumme unbedingt konvergiert und ebenso die Summe dieser Zeilensummen, so konvergieren auch die Spaltensummen unbedingt und geben eine unbedingt konvergente Summe, die der Summe der Zeilensummen gleich ist, wie auch der Summe der Diagonalsummen, die ebenfalls unbedingt konvergiert.

Daß dieser Satz unanwendbar wird, wenn die absoluten Werte der Reihenglieder nicht mehr konvergente Reihen liefern, mag folgendes lehrreiche Beispiel zeigen. Die unendliche Doppelreihe sei

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4}) - \cdots \\
&+ \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2 - \cdots \\
&+ \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3 - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^3 + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{4}{4})^3 - \cdots \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

worin je zwei in derselben Zeile stehende Glieder sich aufheben; die Reihe der Zeilensummen ist hier

$$s + s^{\mathrm{I}} + s^{\mathrm{II}} + s^{\mathrm{III}} + \cdots = \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^3 + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = +\tfrac{1}{2}.$$

Für die Reihe der Spaltensummen findet man

$$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{5} - \cdots;$$

hier ist bei Addition einer ungeraden Anzahl von $2k-1$ Gliedern

$$S_{2k-1} = +\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim S_{2k-1} = +\tfrac{1}{2},$$

dagegen bei Zusammenfassung von $2k-2$ Gliedern

$$S_{2k-2} = \tfrac{1}{2} - \frac{k}{k+1}, \quad \lim S_{2k-2} = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2},$$

woraus erhellt, daß die Reihe der Spaltensummen nicht konvergiert, sondern zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ hin und her oszilliert.

Das für den ersten Augenblick befremdliche Resultat, daß die betrachtete Doppelreihe bei der einen Anordnung eine bestimmte Summe liefert und bei der anderen unbestimmt wird, erklärt sich sehr einfach, wenn man erst die Summe $S_n^{(m)}$ aufsucht, die die ersten n Glieder jeder der ersten m Zeilen enthält. Man findet

$$S^{(m)} = \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^{m+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1},$$

und um hieraus die Summe der unendlichen Doppelreihe abzuleiten, muß man m und n gleichzeitig ins Unendliche wachsen lassen; dies gibt

$$S = \tfrac{1}{2} - 1 + \lim\lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1}\right].$$

Denkt man sich in dem letzten Ausdrucke erst m als konstant und vergrößert n ins Unendliche, so hat man

$$\lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 1, \quad \text{mithin} \quad \lim\lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 1$$
$$\text{und} \quad S = +\tfrac{1}{2}.$$

Läßt man dagegen zuerst n konstant und m ins Unendliche wachsen, so ergibt sich

$$\lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 0, \quad \text{mithin} \quad \lim\lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 0$$
$$\text{und} \quad S = -\tfrac{1}{2}.$$

Man könnte aber auch m und n gleichzeitig, in irgend einem Verhältnisse zueinander, unendlich vermehren; setzt man z. B. $m+1 = hn$, wo h eine konstante positive Zahl bedeutet, so wird

$$\lim \lim \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = \lim \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{hn}\right] = e^{-h},$$
$$S = -\tfrac{1}{2} + e^{-h}.$$

Man sieht aus diesen Erörterungen, daß $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}$ bei gleichzeitig unendlich wachsenden m und n sich keiner bestimmten Grenze nähert; dasselbe gilt von $S_n^{(m)}$, und daher ist die betrachtete Doppelreihe divergent, obschon sowohl die Zeilen als auch die Reihe der Zeilensummen konvergieren. Dagegen würden die absoluten Werte der Reihenglieder keine konvergierenden Reihen liefern (es wäre schon $s = \infty$), und eben deshalb ist das vorhin ausgesprochene Theorem nicht mehr anwendbar.

III. Es seien P und Q die Summen der beiden konvergierenden Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots,$$

von denen wir voraussetzen, daß sie ihre Konvergenz beibehalten, wenn die Reihenglieder durch ihre absoluten Werte ersetzt werden; in der Doppelreihe

$$\begin{aligned} & u_0 v_0 + u_1 v_0 + u_2 v_0 + u_3 v_0 + \cdots \\ & + u_0 v_1 + u_1 v_1 + u_2 v_1 + \cdots \\ & + u_0 v_2 + u_1 v_2 + \cdots \\ & + u_0 v_3 + \cdots \\ & + \cdots \end{aligned}$$

konvergieren nun die Zeilen und haben die Summen

$$Pv_0, \quad Pv_1, \quad Pv_2, \quad Pv_3, \ldots;$$

auch konvergiert die Reihe der Zeilensummen

$$Pv_0 + Pv_1 + Pv_2 + Pv_3 + \cdots = P(v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots) = PQ.$$

Zufolge des in II. ausgesprochenen Theorems konvergiert jetzt die vorige Doppelreihe und darf nach Diagonalreihen geordnet werden, d. h. die neue Reihe

$$\begin{aligned} u_0 v_0 & + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) \\ & + (u_0 v_3 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0) + \cdots \end{aligned}$$

ist konvergent und hat PQ zur Summe. Die Betrachtung der Doppelreihen führt demnach auf den in § 40, II. entwickelten Satz zurück.

Kapitel VII.

Die Potenzreihen.

§ 43. Die Theoreme von Taylor und Mac Laurin.

Um vorerst zu einer Verallgemeinerung des in § 16 unter (14) verzeichneten Theorems zu gelangen, setzen wir ähnlich wie dort

$$(1)\qquad \varphi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1.2} f''(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$

und verstehen unter $\varphi(x)$ die unbekannte Summe der rechts stehenden Reihe; gleichzeitig nehmen wir an, daß die gegebene Funktion $f(x)$ nebst ihren n ersten Differentialquotienten endlich und stetig bleibe innerhalb einer gewissen Strecke von $x = a$ bis $x = b$. Durch Differentiation ergibt sich

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x),$$

und da unter den gemachten Voraussetzungen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ endlich und stetig bleiben, so kann die Formel (5) in § 6 oder die mit ihr identische

$$\varphi(a) = \varphi(b) - \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\psi'[a + \vartheta(b-a)]} \varphi'[a + \vartheta(b-a)], \quad 0 < \vartheta < 1$$

angewendet werden, in welcher $\psi(x)$ eine willkürliche, von $x = a$ bis $x = b$ endlich und stetig bleibende Funktion bedeutet, deren Differentialquotient $\psi'(x)$ gleichfalls endlich und stetig bleiben muß und überdies zwischen a und b nicht verschwinden darf. Nach (1) ist $\varphi(b) = f(b)$, ferner läßt sich aus der Formel für $\varphi'(x)$ der Wert von $\varphi'[a + \vartheta(b-a)]$ ableiten, und so erhält man aus der letzten Gleichung den Wert von $\varphi(a)$. Setzt man auch in der

Gleichung (1) $x = a$ und vergleicht die beiden Ausdrücke von $\varphi(a)$, so hat man die Gleichung

$$f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a)$$

$$= f(b) - \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\psi'[a + \vartheta(b-a)]} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-1}(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}[a + \vartheta(b-a)].$$

Für $b - a = h$ oder $b = a + h$ folgt hieraus der sogenannte Taylorsche Satz

$$(2) \qquad f(a+h) - R_n = f(a) + \frac{f'(a)}{1} h + \frac{f''(a)}{1.2} h + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-1)} h^{n-1},$$

wobei zur Abkürzung

$$(3) \qquad R_n = \frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{\psi'(a + \vartheta h)} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(a + \vartheta h)}{1.2\ldots(n-1)} h^{n-1}$$

gesetzt worden ist. Zur Gültigkeit dieses Satzes gehört, daß $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$, ... $f^{(n)}(z)$, $\psi(z)$ und $\psi'(z)$ von $z = a$ bis $z = a + h$ stetig und endlich bleiben und daß $\psi'(z)$ zwischen diesen Werten nicht verschwindet.

Für $a = 0$ und $h = x$ ergibt sich das Theorem von Mac Laurin, nämlich

$$(4) \qquad f(x) - R_n = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)} x^{n-1},$$

$$R_n = \frac{\psi(x) - \psi(0)}{\psi'(\vartheta x)} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(\vartheta x)}{1.2\ldots(n-1)} x^{n-1},$$

welches aber nur gilt, wenn $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z) \ldots f^{(n)}(z)$, $\psi(z)$ und $\psi'(z)$ von $z = 0$ bis $z = x$ stetig und endlich bleiben und wenn $\psi'(z)$ im Innern dieser Strecke nicht verschwindet.

Da der genaue Wert des positiven echten Bruches ϑ unbekannt ist, so läßt sich auch der genaue Wert des sogenannten Restes R_n nicht genau angeben, sondern nur ein Maximum und Minimum. Sehr häufig aber ist bei unendlich wachsenden n

$$\lim R_n = 0$$

und dann hat man nach (2)

$$(5) \qquad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \cdots,$$

d. h. die Funktion $f(x)$ läßt sich unter allen genannten Bedingungen in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln. Daß letztere konvergiert, versteht sich von selbst. Ob und unter welchen Umständen $\lim R_n = 0$ ist, bedarf in jedem Falle einer besonderen Untersuchung. Diese kann man sich einerseits durch passende Wahl der beliebigen Funktion $\psi(z)$ erleichtern, anderseits kann man hierzu folgenden Satz benutzen: wenn u_n einen von n abhängigen Ausdruck bedeutet, und wenn ferner bei unendlich wachsenden n

$$-1 < \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < +1$$

ist, so ist $\lim u_n = 0$. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt augenblicklich aus der Bemerkung, daß unter der gemachten Voraussetzung die unendliche Reihe $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ nach § 36, I. konvergieren, mithin auch $\lim u_n = 0$ sein muß.

Hat man irgend eine Darstellung der Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \tag{6}$$

die etwa auf der Strecke $-\lambda \cdots + \lambda$ konvergiert, so ist diese Reihe nach § 41, III. gliedweise differenzierbar; somit ergibt sich

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots, \quad f''(x) = 1.2\,a_2 + 2.3\,a_3 x + \cdots,$$

und hieraus, indem man $x = 0$ setzt,

$$a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1.2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3}, \cdots;$$

da nun offenbar $a_0 = f(0)$, so ist die Entwicklung (6) mit der Mac Laurinschen (5) identisch. Diese Betrachtung zeigt auch, daß zwei konvergierende Potenzreihen auf einer Strecke $-\lambda \ldots \lambda$ nur dann gleich sein können, wenn sie in den einzelnen Koeffizienten übereinstimmen; ist

$$a_0 + a_1 x + \cdots = b_0 + b_1 x + \cdots,$$

so stellt die Reihe $a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \cdots$ die Null dar, deren sämtliche Ableitungen verschwinden, und das gibt alle Gleichungen $a_0 = b_0$, $a_n = b_n$.

§ 44. Der binomische Satz.

Da wir die Entwicklung von $(1 + x)^\mu$ für den Fall eines ganzen positiven μ bereits Einl. IV erledigt haben, so setzen wir im folgenden

immer voraus, daß μ keine ganze positive Zahl sei. Behufs der Anwendung des Theorems von Mac Laurin nehmen wir ferner

$$f(x) = (1 + x)^{\mu} = e^{\mu \lg (1 + x)},$$

womit die positiven Potenzen des Binoms definiert sind, und haben

$$f^{(k)}(x) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots [\mu - (k - 1)]\,(1 + x)^{\mu - k}$$
$$= \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots [\mu - (k - 1)]}{(1 + x)^{k - \mu}},$$

wobei die zweite Form für $k > \mu$ dient, welcher Fall früher oder später eintritt. Sollen nun $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ usw. endlich und stetig bleiben, so darf der Nenner $(1 + x)^{k - \mu}$ nicht verschwinden, mithin ist, wenn man von $x = 0$ ausgeht, x auf das Intervall -1 bis $+\infty$ zu beschränken, so daß

$$-1 < x < +\infty$$

die erste Bedingung der Entwicklung ist. Nach § 43 (2) und für $\psi(z) = x^p - (x - z)^p$ wird, $p \geqq 1$ vorausgesetzt,

$$(1) \qquad (1 + x)^{\mu} - R_n$$
$$= 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 . 2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 . 2 . 3} x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots [\mu - (n - 2)]}{1 . 2 . 3 \ldots (n - 1)} x^{n - 1},$$

$$(2) \quad R_n = \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots [\mu - (n - 1)]}{1 . 2 \ldots (n - 1) . p} \cdot \frac{(1 - \vartheta)^{n - p} x^n}{(1 + \vartheta x)^{n - \mu}}.$$

Um zu erfahren, unter welchen Umständen der Rest bei unendlich wachsenden n gegen die Null konvergiert, nehmen wir zuerst die beliebige positive Zahl $p = 1$ und erteilen dem R_n die Form

$$R_n = (-1)^{n - 1} \mu x (1 + \vartheta x)^{\mu - 1} \left(1 - \frac{\mu}{1}\right)\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \cdots$$
$$\cdots \left(1 - \frac{\mu}{n - 1}\right) \left(\frac{x - \vartheta x}{1 + \vartheta x}\right)^{n - 1}.$$

Da x zwischen -1 und $+\infty$ liegt, so ist $1 + \vartheta x$ jedenfalls positiv, mithin $\mu x (1 + \vartheta x)^{\mu - 1}$ eine endliche Größe; daher fragt sich nur noch, ob alle übrigen Faktoren zusammen ein Produkt geben, welches bei unendlich wachsenden n der Grenze Null zustrebt. Nennen wir ξ den absoluten Wert von x, so ist für positive x, d. h. für $x = \xi$,

$$\frac{x - \vartheta x}{1 + \vartheta x} = \frac{\xi - \vartheta \xi}{1 + \vartheta \xi} < \xi,$$

und bei negativen x, d. h. für $x = -\xi$, wobei ξ ein echter Bruch sein muß,

$$\frac{x - \vartheta x}{1 + \vartheta x} = \frac{-\xi + \vartheta \xi}{1 - \vartheta \xi} = -\frac{\xi - \vartheta \xi}{1 + \vartheta \xi};$$

der absolute Wert des letzten Bruches beträgt weniger als ξ, mithin ist in jedem Falle

$$\left| \frac{x - \vartheta x}{1 + \vartheta x} \right| < \xi,$$

wofern nur x zwischen -1 und $+\infty$ liegt. Aus den bisherigen Schlüssen geht hervor, daß $\lim R_n = 0$ wird, sobald der Ausdruck

$$u_n = \left(1 - \frac{\mu}{1}\right)\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\mu}{n-1}\right) \xi^{n-1}$$

bei unendlich wachsenden n die Null zur Grenze hat. Da nun

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \left[\left(1 - \frac{\mu}{n}\right) \xi\right] = \xi$$

ist, so findet die letztere Bedingung in dem Falle $\xi < 1$ sicher statt, während dagegen für $\xi > 1$ sowohl $\lim u_n$ als $\lim R_n$ unendlich werden würden. Aus der Gleichung (1) folgt jetzt durch Übergang zur Grenze für $n = \infty$

$$(3) \quad (1 + x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1.2.3} x^3 + \cdots,$$

$$= 1 + \binom{\mu}{1} x + \binom{\mu}{2} x^2 + \cdots,$$

$$-1 < x < +1.$$

Die beiden äußersten Fälle $x = +1$ und $x = -1$ bedürfen noch einer besonderen Untersuchung. Für $x = +1$ haben wir nach (2), indem wir die beliebige Zahl p durch n ersetzen,

$$(4) \qquad R_n = (1 + \vartheta)^\mu \binom{\mu}{n} \left(\frac{1}{1 + \vartheta}\right)^n.$$

Der erste Faktor ist immer von endlicher Größe; der letzte Faktor liegt zwischen 0 und 1; doch darf man hieraus nicht schließen, daß

$$\lim \left[\left(\frac{1}{1 + \vartheta}\right)^n\right] = 0$$

sein müsse, weil ϑ auf unbekannte Weise von n abhängt; so würde z. B. für $\vartheta = 1/n$ der obige Grenzwert nicht $= 0$, sondern $= 1/e$

werden. Das Verschwinden von R_n findet daher nur in dem Falle sicher statt, wo der zweite Faktor gegen die Null konvergiert. Um hierüber urteilen zu können, unterscheiden wir die Fälle eines positiven und eines negativen μ. Bei positiven μ gibt es immer zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen $k-1$ und $k>0$, zwischen denen μ enthalten ist; dementsprechend kann folgende Zerlegung vorgenommen werden:

$$\binom{\mu}{n} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots[\mu-(n-1)]}{n!}$$
$$= (-1)^{n-k}\frac{\mu(\mu-1)\ldots[\mu-(k-1)]}{1.2\ldots k}$$
$$\cdot\frac{(k-\mu)(k-\mu+1)\ldots(k-\mu+n-k-1)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-k)}.$$

Der erste Bruch rechter Hand besitzt einen von n unabhängigen Wert; der zweite Bruch ist von der Form

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)},$$
$$\alpha = k+1, \quad \beta = k-\mu, \quad m = n-k$$

und hat nach § 35 die Null zur Grenze, weil hier $\alpha > \beta > 0$ ist. Für jedes endliche positive μ gilt daher die Gleichung

$$\lim \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots[\mu-(n-1)]}{1.2.3\ldots n} = 0. \tag{5}$$

Wenn zweitens μ negativ, etwa $\mu = -\lambda$ und λ positiv ist, so wird

$$\binom{\mu}{n} = (-1)^n\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1)}{1.2.3\ldots n},$$

und nach dem vorhin erwähnten Satze konvergiert der Bruch rechter Hand gegen die Null, wenn $1 > \lambda > 0$, d. h. $-1 < -\lambda$ oder $-1 < \mu$ ist. Die Formel (5) gilt daher unter der Bedingung $-1 < \mu < +\infty$, und dann hat man auch $\lim R_n = 0$.

Im zweiten Hauptfalle $x = -1$ gäbe die Formel (2)

$$R_n = (-1)^n\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots[\mu-(n-1)]}{1.2\ldots(n-1).p}(1-\vartheta)^{\mu-p}. \tag{6}$$

Wir betrachten hier zuerst den Fall, wo μ negativ $= -\lambda$ ist und nehmen dann $p = 1$; die rechte Seite der Gleichung

$$R_n = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{\lambda}{(1-\vartheta)^{\lambda+1}}$$

besteht jetzt aus zwei Faktoren, von denen der erste nach § 35 mit n ins Unendliche wächst, während der zweite jedenfalls mehr als λ beträgt; demnach wird $\lim R_n = \infty$. Ist dagegen $\mu > 1$, so kann man $p = \mu$ nehmen und erhält nach (6)

$$(7) \qquad R_n = (-1)^n \frac{(\mu-1)(\mu-2)\dots[\mu-(n-1)]}{1.2\dots(n-1)},$$

mithin nach (1)

$$(-1)^{n-1} \frac{(\mu-1)(\mu-2)\dots[\mu-(n-1)]}{1.2\dots(n-1)}$$
$$= 1 - \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1} \frac{\mu(\mu-1)\dots[\mu-(n-2)]}{1.2\dots(n-1)}.$$

Dieses Ergebnis bestätigt sich, auch wenn $1 > \mu > 0$, durch die identische Gleichung (§ 35)

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m-1)}$$
$$= 1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha} + \frac{(\beta-\alpha)\beta}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(\beta-\alpha)\beta(\beta+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(\beta-\alpha)\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m-1)},$$

welche für $\alpha = 1$, $\beta = 1-\mu$, $m = n-1$ dasselbe gibt. Durch die Schlüsse, womit die Gleichung (5) erreicht wurde, überzeugt man sich ohne Mühe, daß auch hier

$$\lim \frac{(\mu-1)(\mu-2)\dots[\mu-(n-1)]}{1.2\dots(n-1)} = 0,$$

mithin $\lim R_n = 0$ ist. Alles Bisherige führt zusammengenommen zu folgendem Theorem:

Die binomische Entwicklung

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

gilt für jedes endliche μ, wenn der absolute Wert von x ein echter Bruch ist; im Falle $x = +1$ gilt sie, wenn μ zwischen -1 und $+\infty$ liegt; und im Falle $x = -1$ gilt sie, wenn μ positiv ist.

Häufig vorkommende Sonderfälle dieses allgemeinen Binomialtheorems sind:

$$(8)\qquad \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots,\quad -1 < x < +1;$$

$$(9)\qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \cdots,\quad -1 < x \leqq +1;$$

$$(10)\qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6} - \cdots,\quad -1 \leqq x \leqq +1;$$

aus der letzten Gleichung erhält man noch durch Anwendung einer bekannten Formel

$$(11)\qquad \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^5}{10} + \cdots,\quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Handelt es sich um die Entwicklung der μ^{ten} Potenz einer zweiteiligen Größe, so nenne man a denjenigen Teil, dessen absoluter Wert der größere ist, und b den übrigen Teil; es ist dann

$$(12)\qquad (a+b)^\mu = a^\mu\left(1+\frac{b}{a}\right)^\mu$$
$$= a^\mu\left[1 + \frac{\mu}{1}\frac{b}{a} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots\right],\quad -1 < \frac{b}{a} < +1.$$

Diese Formel läßt sich u. a. zur Ausziehung der Wurzeln beliebig hoher Grade anwenden; so ist z. B.

$$\sqrt[3]{132} = \sqrt[3]{125+7} = \sqrt[3]{125\left(1+\frac{7}{125}\right)}$$
$$= 5\left\{1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{125} - \frac{1.2}{3.6}\left(\frac{7}{125}\right)^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}\left(\frac{7}{125}\right)^3 - \cdots\right\},$$

$$\sqrt[4]{76} = \sqrt[4]{81-5} = \sqrt[4]{81\left(1-\frac{5}{81}\right)}$$
$$= 3\left\{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{81} - \frac{1.3}{4.8}\left(\frac{5}{81}\right)^2 - \frac{1.3.7}{4.8.12}\left(\frac{5}{81}\right)^3 - \cdots\right\}.$$

Das hierbei befolgte Prinzip wird man leicht erkennen.

§ 45. Die logarithmischen Reihen und die Exponentialreihen.

I. Die Annahme

$$f(x) = \lg(1 + x)$$

gibt zunächst

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

woraus ersichtlich ist, daß $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ usw. endlich und stetig bleiben, solange x zwischen -1 und $+\infty$ liegt. Unter dieser Voraussetzung und für $\psi(z) = x^p - (x-z)^p$ führt das Theorem von Mac Laurin nach § 43 zu folgender Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \lg(1+x) - R_n = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1},$$

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{(1-\vartheta)^{n-p}x^n}{p(1+\vartheta x)^n}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Für $p = 1$ erhält der Rest die einfachere Form

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{x}{1+\vartheta x}\left(\frac{x - \vartheta x}{1 + \vartheta x}\right)^{n-1};$$

wegen $-1 < x < +\infty$ ist $1 + \vartheta x$ positiv, mithin der erste Bruch jederzeit von endlicher Größe; ferner gilt wie im vorigen Paragraphen die Bemerkung, daß der absolute Wert von $(x - \vartheta x):(1 + \vartheta x)$ weniger beträgt als der absolute Wert von x. Der Rest konvergiert daher gegen die Null, wenn der absolute Wert von x ein echter Bruch ist; bei dieser Voraussetzung folgt nach (1)

$$\text{(2)} \qquad \lg(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots, \quad -1 < x < +1.$$

Die äußersten Fälle $x = +1$ und $x = -1$ verlangen eine besondere Untersuchung. Für $x = +1$ ergibt sich, wenn $p = n$ genommen wird,

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\vartheta)^n},$$

mithin bei unendlich wachsenden n

$$\lim R_n = 0.$$

Für $x = -1$ und $p = n$ wird

$$R_n = \frac{-1}{n(1-\vartheta)^n};$$

hier wächst zwar der erste Faktor des Nenners ins Unendliche, dagegen könnte ϑ die Einheit zur Grenze haben und folglich der

Nenner die unbestimmte Form $\infty \cdot 0$ erhalten; man darf daher nicht behaupten, daß $\lim R_n = 0$ sei. Nach diesen Bemerkungen haben wir

$$(3) \qquad \lg(1+x) = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots, \quad -1 < x \leqq +1.$$

Läßt man $-x$ an die Stelle von x treten, so folgt

$$(4) \qquad \lg(1-x) = -\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \cdots, \quad -1 \leqq x < +1;$$

die Differenz der Gleichungen (3) und (4) ist

$$(5) \qquad \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \cdots\right), \quad -1 < x < +1.$$

Für $x = \dfrac{z-1}{z+1}$, wo z jede positive Zahl sein darf, folgt weiter

$$(6) \qquad \lg z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right],$$

und damit ist, wenigstens theoretisch, die Aufgabe gelöst, zu jeder positiven Zahl den natürlichen Logarithmus zu finden. Bei kleinen Werten von z, wie z. B. für $z = 2$ und $z = 3$, ist die Formel (6) zur numerischen Berechnung vollkommen brauchbar; bei größeren z, z. B. schon für $z = 10$, konvergiert dagegen die Reihe so langsam, daß sie praktisch nicht mehr benutzt werden kann.

Aus der Bemerkung, daß $\lg(a+b) = \lg a + \lg\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)$ ist, erhält man leicht unter Anwendung der Gleichung (3)

$$(7) \qquad \lg(a+b) = \lg a + \frac{b}{a} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \cdots, \quad -1 < \frac{b}{a} \leqq +1;$$

diese Formel, welche auch mittels des Taylorschen Satzes entwickelt werden kann, dient zur Berechnung von $\lg(a+b)$, wenn $\lg a$ bekannt ist. Eine zu demselben Zwecke noch bequemere Formel ergibt sich aus der identischen Gleichung

$$\lg(a+b) = \lg a + \lg\left(\frac{1 + \dfrac{b}{2a+b}}{1 - \dfrac{b}{2a+b}}\right),$$

wenn der zweite Logarithmus rechter Hand nach (5) entwickelt wird, nämlich

$$\lg(a+b) = \lg a + 2\left[\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \cdots\right]. \tag{8}$$

Diese Formel gilt für alle positiven a und b, weil dann $\frac{b}{2a+b}$ immer ein echter Bruch ist. Hat man nach (6) den Betrag von $\lg 2$ gefunden, so kann man jetzt $\lg 3$, $\lg 4$, $\lg 5$ usw. berechnen, indem man $b = 1$ und $a = 2, 3, 4$ usw. setzt; selbstverständlich braucht man nur die Logarithmen der Primzahlen mittels unendlicher Reihen zu berechnen.

Die künstlichen Logarithmen der Zahlen zur Basis b lassen sich aus deren natürlichen Logarithmen auf folgende Weise herleiten. Es ist gleichzeitig

$$z = e^{\lg z} \quad \text{und} \quad z = b^{{}^b\log z},$$

mithin, wenn man von beiden rechten Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt und vergleicht,

$$\lg z = {}^b\log z \,.\, \lg b,$$

und umgekehrt

$${}^b\log z = \frac{1}{\lg b}\lg z = M_b \lg z,$$

wo M_b den sogenannten Modulus des aus der Basis b konstruierten Logarithmensystems bezeichnet. Für das gewöhnliche System ist $b = 10$ und nach den vorigen Formeln

$$\lg 10 = 2{,}30258509, \quad M_{10} = 0{,}43429448.$$

II. Nehmen wir $f(x) = e^x$, so ist $f^{(k)}(x) = e^x$ und es bleiben daher $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ usw. durchaus endlich und stetig; der Mac Laurinsche Satz gibt dann

$$e^x - R_n = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1},$$

und zwar ist, wenn $\psi(z) = x^n - (x-z)^n$ gesetzt wird,

$$R_n = \frac{x^n}{n!}e^{\vartheta x}.$$

Man übersieht augenblicklich, daß $\lim R_n = 0$ wird, sobald x eine endliche Größe ist, und wenn der Ausdruck

$$u_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

gegen die Null konvergiert; wegen

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{x}{n+1} = 0$$

findet die letztere Eigenschaft bei jedem endlichen x statt, mithin ist $\lim R_n = 0$ und

$$(9) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Damit erhält man ein Ergebnis, welches im wesentlichen mit dem übereinstimmt, was in Einl. V gefunden wurde.

Läßt man $-x$ an die Stelle von x treten, so ergibt sich nach (9) die Gleichung

$$(10) \qquad e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots,$$

welche mit der vorigen durch Addition oder Subtraktion verbunden werden kann; man erhält

$$(11) \qquad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots = \mathfrak{Cos}\, x.$$

$$(12) \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots 5} + \cdots = \mathfrak{Sin}\, x.$$

Die Formel (9) führt auch zur Entwicklung einer beliebigen Exponentialgröße a^x, wenn nur deren Basis a positiv ist; man hat nämlich

$$(13) \qquad a^x = (e^{\lg a})^x = e^{x \lg a}$$
$$= 1 + \frac{x \lg a}{1} + \frac{(x \lg a)^2}{1.2} + \frac{(x \lg a)^3}{1.2.3} + \cdots$$

Setzt man in der Gleichung (9) $e^x = z$ und nimmt beiderseits die Logarithmen irgend eines Systems, so folgt $x = \frac{\log z}{\log e}$, mithin

$$(14) \qquad z = 1 + \frac{1}{1} \frac{\log z}{\log e} + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\log z}{\log e}\right)^2 + \cdots$$

Hierin liegt die Lösung der Aufgabe, aus dem Logarithmus einer Zahl die letztere herzuleiten. Am einfachsten wird die Formel bei natürlichen Logarithmen.

§ 46. Goniometrische und zyklometrische Reihen.

I. Da die Differentialquotienten des Kosinus abwechselnd Sinus und Kosinus, mithin jederzeit endlich und stetig sind, so läßt sich der Mac Laurinsche Satz nach § 43 auf den Fall $f(x) = \cos x$

anwenden und gibt, wenn im Reste $\psi(z) = x^n - (x - z)^n$ genommen wird und $0 < \vartheta < 1$ ist,

$$(1) \qquad \cos x - \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \vartheta x\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}.$$

Aus Abschnitt II des vorigen Paragraphen weiß man ferner, daß man bei unendlich wachsenden n

$$\lim\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

ist; verbindet man hiermit die Bemerkung, daß $\cos(\frac{1}{2}n\pi + \vartheta x)$ nicht über die Strecke $-1 \cdots +1$ hinausgeht, so gelangt man zu der Formel

$$(2) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

welche für jedes endliche x gilt.

II. Auf ganz ähnlichem Wege findet man

$$(3) \qquad \sin x - \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \vartheta x\right)$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}$$

und bei unendlich werdenden n

$$(4) \qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \cdots$$

Da sich aus $\sin x$ und $\cos x$ die übrigen goniometrischen Funktionen des Bogens x herleitem lassen, so ist hiermit das Problem der Berechnung aller goniometrischen Funktionen gelöst. Übrigens werden wir später noch besondere Reihen für $\operatorname{tg} x$, $\cot x$, $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$ entwickeln.

III. Um das Theorem von Mac Laurin auf den Fall $f(x) = \arcsin x$ anzuwenden, lassen wir zunächst $n+1$ an die Stelle von n treten und schreiben demgemäß

$$f(x) - R_{n+1} = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n.$$

Aus der in § 13 (7) entwickelten Formel

$$f^{(k+1)}(x) = D^{k+1} \arcsin x = \frac{1.3.5\dots(2k-1)}{2^k(1-x)^k\sqrt{1-x^2}}$$
$$\left\{1 - \frac{1}{2k-1}\binom{k}{1}\frac{1-x}{1+x} + \frac{1.3}{(2k-1)(2k-3)}\binom{k}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \dots\right\}$$

geht nun zunächst hervor, daß $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ usw. endlich und stetig bleiben, solange x^2 die Einheit nicht erreicht; wir müssen daher $-1 < x < +1$ voraussetzen. Die genannte Formel liefert auch die Werte von $f'(0)$, $f''(0)$ usw., doch kann man dieselben kürzer aus der Relation

$$f^{(k+2)}(x) = \frac{(2k+1)\,x f^{(k+1)}(x) + k^2 f^{(k)}(x)}{1-x^2}$$

herleiten [§ 13 (6)]; es folgt nämlich

$$f^{(k+2)}(0) = k^2 f^{(k)}(0),$$

mithin, weil $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist,

$$\begin{array}{lll} f''(0) = 0, & f^{\mathrm{IV}}(0) = 0, & f^{\mathrm{VI}}(0) = 0, \dots, \\ f'''(0) = 1^2, & f^{\mathrm{V}}(0) = 1^2.3^2, & f^{\mathrm{VII}}(0) = 1^2.3^2.5^2, \dots \end{array}$$

Denken wir uns n als ungerade Zahl, so haben wir bis jetzt folgendes Resultat

$$(5) \qquad \arcsin x - R_{n+1} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3\dots(n-2)}{2.4\dots(n-1)}\frac{x^n}{n},$$

welches noch durch eine Diskussion des Restes zu vervollständigen ist. Wollte man letztere auf die bisherige Weise ausführen, so würde man eine etwas komplizierte Untersuchung anstellen müssen; wir benutzen daher ein anderes Verfahren. Dieses beruht auf der Bemerkung, daß der Differentialquotient von $\arcsin x$ eine algebraische Funktion, nämlich gleich der Potenz $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist und daß folglich der Differentialquotient der Gleichung (5) mit einer nach dem binomischen Satze vorgenommenen Entwicklung übereinstimmen muß. Um diesen Gedanken auszuführen, bezeichnen wir den Rest R_{n+1}, der jedenfalls von x abhängt, mit $\varphi(x)$, und setzen $n = 2m-1$; es ist dann

$$(6) \qquad \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \dots$$
$$\dots + \frac{1.3.5\dots(2m-3)}{2.4.6\dots(2m-2)}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + \varphi(x),$$

und durch Differentiation

$$(7)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)}x^{2m-2} + \varphi'(x).$$

Anderseits ist, wenn man in Formel (9) des § 44 $-x^2$ für x setzt,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)}x^{2m-2}$$
$$+ \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots(2m)}x^{2m}\left\{1 + \frac{2m+1}{2m+2}x^2 + \frac{(2m+1)(2m+3)}{(2m+2)(2m+4)}x^4 + \cdots\right\},$$

und nun gibt die Vergleichung beider Ergebnisse

$$\varphi'(x) = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots(2m)}x^{2m}\left\{1 + \frac{2m+1}{2m+2}x^2 + \frac{(2m+1)(2m+3)}{(2m+2)(2m+4)}x^4 + \cdots\right\}.$$

Aus den Gleichungen (6) und (7) geht ferner hervor, daß $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ endlich und stetig bleiben; zur Ermittlung von $\varphi(x)$ läßt sich daher das Theorem

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\varphi'(\vartheta x), \quad 0 < \vartheta < 1$$

benutzen, und zwar gibt dies, weil $\varphi(0) = 0$ ist,

$$\varphi(x) = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots(2m)}\vartheta^{2m}x^{2m+1}\left\{1 + \frac{2m+1}{2m+2}\vartheta^2x^2 + \frac{(2m+1)(2m+3)}{(2m+2)(2m+4)}\vartheta^4x^4 + \cdots\right\}.$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe liegt zwischen Null und

$$1 + \vartheta^2x^2 + \vartheta^4x^4 + \cdots = \frac{1}{1-\vartheta^2x^2},$$

sie kann daher mit
$$\frac{\varepsilon}{1-\vartheta^2x^2}$$
bezeichnet werden, wo ε einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch vorstellt. Zufolge des hiermit gefundenen Wertes von $\varphi(x)$ ist nun nach (6)

$$(8)\qquad \arcsin x - \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m)}\frac{\varepsilon\,\vartheta^{2m}x^{2m+1}}{1-\vartheta^2x^2}$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2m-3)}{2.4\ldots(2m-2)}\frac{x^{2m-1}}{2m-1}.$$

Die hier vorkommende Reihe zählt m Glieder und wird unendlich für $m = \infty$; wegen $x^2 < 1$ ist in diesem Falle $\lim x^{2m} = 0$, während $1 - \vartheta^2 x^2$ immer von Null verschieden bleibt. Hieraus folgt sehr leicht, daß sich der Rest der Grenze Null nähert und daß mithin die Gleichung besteht:

$$(9) \qquad \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$-1 < x < +1.$$

Für $x = \pm 1$ verliert diese Schlußweise ihre Gültigkeit; der Rest erhält nämlich die Form

$$\pm \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m)} \cdot \frac{\varepsilon\,\vartheta^{2m}}{1-\vartheta^2}$$

und besteht aus zwei Faktoren, deren erster zwar gegen die Null konvergiert, von denen aber der zweite unendlich wird, falls ϑ die Einheit zur Grenze hat, worüber man nicht sicher urteilen kann. Wir stellen daher noch folgende Betrachtung an.

Bezeichnet u einen Bogen des ersten Quadranten, so gelten die Gleichungen

$$\sin \tfrac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}, \quad \tfrac{1}{2} u = \arcsin \sqrt{\frac{1-\cos u}{2}};$$

für $\sin u = x$ wird $\cos u = \sqrt{1-x^2}$, $u = \arcsin x$, mithin

$$(10) \qquad \tfrac{1}{2} \arcsin x = \arcsin \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = \arcsin y,$$

wobei y eine von selbst verständliche Abkürzung vorstellt. Wäre nun die Gleichung (9) auch nur für alle Werte von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ bewiesen, so könnte man doch die rechte Seite der Gleichung (10) entwickeln, da hier y das Intervall 0 bis $\sqrt{\frac{1}{2}}$ durchläuft, wenn x von 0 bis 1 geht; demgemäß ist

$$\tfrac{1}{2} \arcsin x = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} + \tfrac{1}{6}\left[\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}\right]^3 + \cdots$$

Das erste Glied läßt sich für alle, die Einheit nicht übersteigenden Werte von x^2 in eine Potenzenreihe verwandeln, wie Formel (11) in § 44 zeigt; dasselbe gilt von den übrigen Gliedern,

wenn man beide Seiten der erwähnten Formel der Reihe nach auf die 3te, 5te usw. Potenz erhebt; man hat daher

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\arcsin x = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16}x^3 + \tfrac{7}{256}x^5 + \cdots \\ + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{3}{64}x^5 + \cdots\right) \\ + \tfrac{3}{40}\left(\tfrac{1}{32}x^5 + \cdots\right) \\ + \cdots\end{aligned}$$

Diese Doppelreihe erfüllt alle Bedingungen, welche nach § 42 nötig sind, um die Reihenglieder in Spalten summieren zu dürfen; vereinigt man daher die untereinanderstehenden Glieder und multipliziert nachher mit 2, so gelangt man zu der Gleichung

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \cdots, \tag{11}$$

und zwar gilt dieselbe von $x = 0$ bis $x = 1$ oder auch von $x = -1$ bis $x = +1$, da beide Seiten immer gleiche Vorzeichen besitzen. Zufolge des am Ende des § 43 bewiesenen Satzes muß die jetzige Entwicklung (11) mit der früheren (9) identisch sein; formell gelangt man also zu keinem neuen Resultate, wohl aber erfährt man, daß die Gleichung (9) auf das Intervall $x = -1$ bis $x = +1$ mit Einschluß der Grenzen ausgedehnt werden darf, wenn sie früher auch nur von $x = 0$ bis $x = 1/\sqrt{2}$ einschließlich gegolten hätte.

Gibt man dem x einen solchen Zahlwert, daß $\arcsin x$ einen bekannten Bruchteil der Kreisperipherie ausmacht, so erhält man in jedem Falle eine Reihe zur Berechnung der Ludolphschen Zahl; so ist z. B. für $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5\,.\,2^5} + \cdots$$

Die Sonderansätze $x = 1/\sqrt{2}$ und $x = 1$ liefern ähnliche Reihen, jedoch konvergieren letztere zu langsam für die numerische Berechnung.

Aus Formel (9) läßt sich endlich noch eine Reihe für $\arccos x$ ableiten, wenn man von der Beziehung

$$\arccos x = \tfrac{1}{2}\pi - \arcsin x$$

Gebrauch macht.

IV. Die in § 13, IV. entwickelten Formeln zeigen, daß die Differentialquotienten von

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

für jedes endliche x stetig und endlich bleiben; ferner ist

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\, 1\,.\,2\,.\,3\ldots(2k),$$

mithin nach Mac Laurin für $\psi(z) = x^n - (x - z)^n$

$$\operatorname{arctg} x - \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n \sqrt{(1+\vartheta^2 x^2)^n}} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{\vartheta x}\right)$$
$$= \tfrac{1}{1} x - \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{2}(n-1)\pi}{n-1} x^{n-1}.$$

Der absolute Wert von $x / \sqrt{1+\vartheta^2 x^2}$ beträgt weniger als der absolute Wert von x; der Ausdruck

$$\frac{x^n}{n \sqrt{(1+\vartheta^2 x^2)^n}} = \frac{1}{n} \left(\frac{x}{\sqrt{1+\vartheta^2 x^2}}\right)^n$$

konvergiert also bei unendlich wachsenden n gegen die Null, wenn $\lim (x^n/n) = 0$ ist, und letzteres findet so lange statt, als der absolute Wert von x die Einheit nicht übersteigt. Da ferner $\sin[n \operatorname{arctg}(1/\vartheta x)]$ die Strecke $-1 \cdots +1$ keinenfalls überschreitet, so hat der Rest unter den vorigen Bedingungen die Null zur Grenze, und mithin ist

$$(12) \quad \operatorname{arctg} x = \tfrac{1}{1} x - \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^5 - \cdots, \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Im Fall der absolute Wert von x mehr als die Einheit beträgt, kann man die Gleichung

$$(13) \qquad \operatorname{arctg} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arccot} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

benutzen und $\operatorname{arctg}(1/x)$ nach der obigen Formel entwickeln; dies gibt, x als positiv vorausgesetzt,

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x > 1.$$

Bei negativen x sind beiderseits die Vorzeichen umzukehren. Durch die Formel (13) erledigt sich auch die Entwicklung von $\operatorname{arccot} x$.

In dem Sonderfalle $x = 1$ geht die Gleichung (12) über in

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots;$$

diese Formel eignet sich wegen der außerordentlich langsamen Konvergenz der Reihe nicht zur numerischen Berechnung von π. Bequemere Formeln erhält man dadurch, daß man $\frac{1}{4}\pi$ in zwei oder mehrere kleinere Bögen zerlegt und diese einzeln berechnet. Setzt man nämlich $x = \operatorname{tg} \xi$, $y = \operatorname{tg} \eta$, und benutzt die aus den Additionsformeln (Einl. V, 5.) der Funktionen sin und cos folgenden Gleichungen

$$\operatorname{tg}(\xi + \eta) = \frac{\operatorname{tg} \xi + \operatorname{tg} \eta}{1 - \operatorname{tg} \xi \,.\, \operatorname{tg} \eta}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy},$$

sowie die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$, so findet man

$$\frac{1}{4}\pi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{4}\pi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8},$$

und hier kann man die einzelnen Bögen leicht nach Formel (12) in rasch konvergierende Reihen verwandeln.

§ 47. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Bei Funktionen, die irgendwie aus einfachen Funktionen zusammengesetzt sind, gelingt es nicht selten, die Strecke zu bestimmen, innerhalb deren eine Reihenentwicklung für die zusammengesetzte Funktion existieren muß; in solchen Fällen wird die Restuntersuchung unnötig und sind nur noch die Koeffizienten der Reihe zu ermitteln. Hierzu benutzt man oft mit Vorteil ein vom Mac Laurinschen Satze unabhängiges Verfahren, das im wesentlichen darauf hinauskommt, die Koeffizienten vorläufig unbestimmt zu lassen und sie durch irgend eine Eigenschaft der gegebenen Funktionen erst später zu bestimmen, wie dies schon in § 5 geschehen ist; gewöhnlich leisten hierbei Differentiationen gute Dienste. Das einzelne des Verfahrens wird man aus den folgenden Beispielen ersehen.

I. Multipliziert man die Gleichung (11) des vorigen Paragraphen mit sich selbst, was nach § 40 ohne weiteres erlaubt ist, so gelangt man zu dem Resultate

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + \cdots,$$

welches für alle, das Intervall -1 bis $+1$ nicht überschreitende x gilt. Das Bildungsgesetz der Koeffizienten tritt aber bei jener Multiplikation nicht klar zutage und würde auch nach dem Mac Laurinschen Satze schwer zu finden sein, weil hier $f^{(n)}(x)$ ein äußerst komplizierter Ausdruck ist; wir setzen daher vorläufig

$$(1)\quad (\arcsin x)^2 = a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots, \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Ähnlich verhält sich die Sache, wenn man die Reihe für $\arcsin x$ mit der Reihe für $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ multipliziert, wobei nicht zu übersehen ist, daß die letztere nur unter der Bedingung $-1 < x < +1$ konvergiert; man erhält dann eine Gleichung von der Form

$$(2)\quad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \cdots, \quad -1 < x < +1,$$

und auch hier ist das Bildungsgesetz der Koeffizienten nicht näher bekannt.

Um nun alle a und b zu bestimmen, differenzieren wir die Gleichung (1) und erhalten

$$(3)\qquad \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\,a_2 x + 4\,a_4 x^3 + 6\,a_6 x^5 + \cdots;$$

diese Differentiation ist erlaubt, weil sowohl die ursprüngliche als die abgeleitete Reihe, welche letztere mit der Reihe (2) übereinstimmen muß, auf jeder Strecke, die zwischen -1 und $+1$ liegt, als Potenzreihe gleichmäßig konvergiert. Multipliziert man die Gleichung (3) mit $\sqrt{1-x^2}$ und differenziert noch einmal, so wird

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = (1\,.\,2\,a_2 + 3\,.\,4\,a_4 x^2 + 5\,.\,6\,a_6 x^4 + \cdots)\sqrt{1-x^2}$$
$$- (2\,a_2 x + 4\,a_4 x^3 + 6\,a_6 x^5 + \cdots)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

nach Multiplikation mit $\sqrt{1-x^2}$ verschwinden die Wurzeln und es lassen sich dann alle negativen Größen auf die linke Seite schaffen, wodurch bei gehöriger Zusammenziehung folgende Gleichung entsteht:

$$1\,.\,2\,a_2 + 3\,.\,4\,a_4 x^2 + 5\,.\,6\,a_6 x^4 + \cdots = 2 + 2^2 a_2 x^2 + 4^2 a_4 x^4 + \cdots$$

Die Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x gibt nun nach § 43

$$a_2 = 1,\quad a_4 = a_2\frac{2^2}{3\,.\,4} = \frac{2^2}{3\,.\,4},$$
$$a_6 = a_4\frac{4^2}{5\,.\,6} = \frac{2^2\,.\,4^2}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\quad \text{usw.}$$

überhaupt für jedes ganze positive k

$$a_{2k} = \frac{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2\ldots(2k-2)^2}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\ldots(2k)} = \frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2k-2)}{3\,.\,5\,.\,7\ldots(2k-1)}\cdot\frac{1}{k},$$

und demgemäß haben wir nach (1)

$$(4)\qquad (\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\frac{x^6}{3} + \cdots,\quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Man übersieht augenblicklich, daß sich auf ähnlichem Wege auch die höheren Potenzen von $\arcsin x$ entwickeln lassen; die Koeffizienten werden aber weniger einfach.

Substituiert man die Werte von a_2, a_4, a_6 usw. auch in die Gleichung (3), so erhält man noch

$$(5)\qquad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}x^5 + \cdots,\quad -1 < x < +1.$$

Dieses Ergebnis gewinnt eine bemerkenswerte Form, wenn man

$$x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \text{mithin} \quad \arcsin x = \operatorname{arctg} z$$

setzt; es wird nämlich

$$(6) \qquad \operatorname{arctg} z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \cdots\right].$$

Mit Hilfe der schon in § 46 benutzten Gleichung

$$\tfrac{1}{4}\pi = \operatorname{arctg}\tfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}$$

findet man z. B. aus der Gleichung (6)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{2}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$+ \frac{3}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots\right],$$

wonach die Berechnung von π sehr leicht ist.

II. Zufolge der in § 46 für den Kosinus eines beliebigen Bogens gefundenen Reihe hat man

$$\cos(\mu \arcsin x) = 1 - \frac{\mu^2 (\arcsin x)^2}{1.2} + \frac{\mu^4 (\arcsin x)^4}{1.2.3.4} - \cdots,$$

oder auch, wenn man die Potenzen von $\arcsin x$ entwickelt,

$$\begin{aligned}\cos(\mu \arcsin x) = 1 &- \frac{\mu^2}{2}\left(x^2 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{8}{45}x^6 + \cdots\right)\\ &+ \frac{\mu^4}{24}\left(x^4 + \tfrac{2}{3}x^6 + \cdots\right)\\ &- \frac{\mu^6}{720}\left(x^6 + \cdots\right)\\ &+ \cdots\end{aligned}$$

Alle hier vorkommenden Zeilen konvergieren von $x = -1$ bis $x = +1$, ferner konvergiert die Reihe der Zeilensummen (die vorige Reihe) und sie behält ihre Konvergenz auch in dem Falle, wo man den Gliedern gleiche Vorzeichen gibt; es sind also die Bedingungen erfüllt, unter denen die Doppelreihe nach Spalten geordnet werden darf, und folglich ist

$$\begin{aligned}\cos(\mu \arcsin x) = 1 &- \frac{\mu^2}{2}x^2 + \frac{\mu^4 - 4\mu^2}{24}x^4\\ &- \frac{\mu^6 - 20\mu^4 + 64\mu^2}{720}x^6 + \cdots\end{aligned}$$

oder, mit anderen Worten, es existiert eine Reihenentwicklung von der Form

$$(7)\qquad \cos(\mu \arcsin x) = 1 - A_2 x^2 + A_4 x^4 - A_6 x^6 + \cdots,\quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Durch Multiplikation mit der Entwicklung von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ erhält man noch

$$(8)\qquad \frac{\cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - B_2 x^2 + B_4 x^4 - B_6 x^6 + \cdots,\quad -1 < x < +1.$$

Ganz ähnliche Betrachtungen knüpfen sich an die Funktion $\sin(\mu \arcsin x)$; diese kann zunächst in die einfache Reihe

$$\frac{\mu \arcsin x}{1} - \frac{\mu^3 (\arcsin x)^3}{1.2.3} + \frac{\mu^5 (\arcsin x)^5}{1.2.3.4.5} - \cdots$$

verwandelt werden, welche nach Entwicklung der Potenzen von $\arcsin x$ in eine Doppelreihe übergeht. Letztere genügt den Bedingungen, unter denen die Anordnung nach Spalten erlaubt ist, und so folgt ein Ergebnis von der Form

$$(9)\qquad \sin(\mu \arcsin x) = \mu x - A_3 x^3 + A_5 x^5 - \cdots,\quad -1 \leqq x \leqq +1;$$

durch Multiplikation mit der Entwicklung von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ folgt noch

$$(10)\qquad \frac{\sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \mu x - B_3 x^3 + B_5 x^5 - \cdots,\quad -1 < x < +1.$$

Um nun die Koeffizienten zu bestimmen, differenzieren wir die Gleichung (7) und erhalten

$$(11)\qquad \frac{\mu \sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = 2 A_2 x - 4 A_4 x^3 + 6 A_6 x^5 - \cdots;$$

die Befugnis zu dieser Differentiation liegt darin, daß sowohl die ursprüngliche als die abgeleitete Reihe (11), welche letztere mit der Reihe (10) übereinstimmen muß, zwischen -1 und $+1$ konvergierende Potenzreihen sind. Wir multiplizieren ferner die Gleichung (11) mit $\sqrt{1-x^2}$ und differenzieren noch einmal; das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}\frac{\mu^2 \cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} &= (1.2 A_2 - 3.4 A_4 x^2 + 5.6 A_6 x^4 - \cdots)\sqrt{1-x^2}\\ &- (2 A_2 x - 4 A_4 x^3 + 6 A_6 x^5 - \cdots)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\end{aligned}$$

oder nach beiderseitiger Multiplikation mit $\sqrt{1-x^2}$ und gehöriger Zusammenziehung

(12)
$$\begin{aligned}&\mu^2 \cos(\mu \arcsin x)\\ &= 1.2A_2 - 3.4A_4x^2 + 5.6A_6x^4 - 7.8A_8x^6 + \cdots\\ &\quad - 2^2A_2x^2 + 4^2A_4x^4 - 6^2A_6x^6 + \cdots\end{aligned}$$

Diese Entwicklung kann nach § 43 nicht verschieden von der Reihe (7) sein; substituiert man in (12) für $\cos(\mu \arcsin x)$ die ursprüngliche Reihe und schafft die zweite Reihe rechter Hand auf die linke Seite, so hat man

$$\begin{aligned}&\mu^2 - (\mu^2 - 2^2)A_2x^2 + (\mu^2 - 4^2)A_4x^4 - (\mu^2 - 6^2)A_6x^6 + \cdots\\ &= 1.2A_2 - 3.4A_4x^2 + 5.6A_6x^4 - 7.8A_8x^6 + \cdots,\end{aligned}$$

mithin durch Vergleichung der Koeffizienten

$$A_2 = \frac{\mu^2}{1.2}, \quad A_4 = A_2\frac{\mu^2 - 2^2}{3.4} = \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4},$$
$$A_6 = A_4\frac{\mu^2 - 4^2}{5.6} = \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} \text{ usw.}$$

Zufolge dieser Werte ist nach (7)

(13)
$$\begin{aligned}&\cos(\mu \arcsin x)\\ &= 1 - \frac{\mu^2}{1.2}x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}x^4 - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2\ldots6}x^6 + \cdots,\\ &\qquad -1 \leqq x \leqq +1,\end{aligned}$$

und nach (11)

(14)
$$\begin{aligned}&\frac{\sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{\mu}{1}x - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2\ldots5}x^5 - \cdots,\\ &\qquad -1 < x < +1.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der beiden übrigen Reihen (8) und (9) bestimmen sich durch eine sehr ähnliche Rechnung. Man differenziert zunächst die Gleichung (9) und erhält

(15)
$$\frac{\mu\cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \mu - 3A_3x^2 + 5A_5x^4 - \cdots,$$

was mit der Entwicklung (8) übereinstimmen muß; man multipliziert ferner mit $\sqrt{1-x^2}$, differenziert und multipliziert wieder mit $\sqrt{1-x^2}$; dies gibt

$$\begin{aligned}&\mu^2 \sin(\mu \arcsin x)\\ &= 2.3A_3x - 4.5A_5x^3 + 6.7A_7x^5 - \cdots\\ &\quad + \mu x - 3^2A_3x^3 + 5^2A_5x^5 - \cdots\end{aligned}$$

Substituiert man für $\sin(\mu \arcsin x)$ die ursprüngliche Reihe (9) und vergleicht dann die beiderseitigen Koeffizienten, so gelangt man zur Kenntnis von A_3, A_5 usw. und überhaupt zu folgendem Ergebnis:

(16)
$$\sin(\mu \arcsin x)$$
$$= \frac{\mu}{1} x - \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)}{1.2.3} x^3 + \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5} x^5 - \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1;$$

endlich gibt die Gleichung (15)

(17)
$$\frac{\cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$= 1 - \frac{\mu^2 - 1^2}{1.2} x^2 + \frac{(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)}{1.2.3.4} x^4 - \cdots$$
$$-1 < x < +1.$$

Nicht selten erteilt man den Gleichungen (13) und (14), (16) und (17) eine goniometrische Form, indem man $\arcsin x = u$, mithin $x = \sin u$ setzt; der Strecke von $x = -1$ bis $x = +1$ entspricht dann die Strecke von $u = -\frac{1}{2}\pi$ bis $u = +\frac{1}{2}\pi$, und unter der gemeinschaftlichen Bedingung

$$-\tfrac{1}{2}\pi < u < +\tfrac{1}{2}\pi$$

gelten bei jedem μ folgende vier Gleichungen:

(18) $$\cos \mu u = 1 - \frac{\mu^2}{1.2} \sin^2 u + \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1.2.3.4} \sin^4 u - \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)}{1.2 \ldots 6} \sin^6 u + \cdots,$$

(19) $$\frac{\sin \mu u}{\cos u} = \frac{\mu}{1} \sin u - \frac{\mu(\mu^2 - 2^2)}{1.2.3} \sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)}{1.2 \ldots 5} \sin^5 u - \cdots,$$

(20) $$\sin \mu u = \frac{\mu}{1} \sin u - \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)}{1.2.3} \sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 u - \cdots$$

(21) $$\frac{\cos \mu u}{\cos u} = 1 - \frac{\mu^2 - 1^2}{1.2} \sin^2 u + \frac{(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)}{1.2.3.4} \sin^4 u - \cdots$$

Dabei ist nur zu bemerken, daß die Formeln (18) und (20) auch für $u = \pm \frac{1}{2}\pi$ richtig bleiben, während dann die beiden übrigen ihre Gültigkeit verlieren.

Nimmt man für μ eine gerade Zahl, so brechen die in (18) und (19) vorkommenden Reihen ab, d. h. sie werden zu endlichen Reihen, deren erste aus $\frac{1}{2}\mu + 1$, und deren zweite aus $\frac{1}{2}\mu$ Gliedern besteht. Man kann sich in diesem Falle leicht überzeugen, daß jene Gleichungen für alle u bestehen. Ist nämlich k irgend eine ganze Zahl, v ein Bogen des ersten Quadranten, und bezeichnet $\varphi(u)$ die Summe der Reihe, so hat man, weil $\sin(k\pi - v) = \pm \sin v$,

$$\varphi(k\pi - v) = \varphi(v) = \cos\mu v = \cos\mu(k\pi - v)$$

oder $\varphi(w) = \cos\mu w$, wo $w = k\pi - v$ jeden beliebigen Bogen vorstellen kann. Eine ähnliche Schlußweise gilt für die Formel (19). Nicht minder leicht ist einzusehen, daß bei ungeraden μ die Gleichungen (20) und (21) allgemein richtig bleiben. Damit kommt man auf die Ergebnisse, welche bereits am Ende von § 5 angedeutet wurden.

§ 48. Die unendlichen Produkte für Sinus und Kosinus.

Nach der bekannten elementaren Formel

$$(1) \qquad \sin u = 2 \sin\frac{u}{2} \sin\frac{u+\pi}{2}$$

hat man zunächst

$$\sin z = 2 \sin\frac{z}{2} \sin\frac{z+\pi}{2},$$

ferner, wenn rechter Hand jeder Sinus wieder nach (1) zerlegt wird,

$$\sin z = 2^3 \sin\frac{z}{4} \sin\frac{z+\pi}{4} \sin\frac{z+2\pi}{4} \sin\frac{z+3\pi}{4};$$

die Wiederholung desselben Verfahrens liefert

$$\sin z = 2^7 \sin\frac{z}{8} \sin\frac{z+\pi}{8} \sin\frac{z+2\pi}{8} \cdots \sin\frac{z+7\pi}{8}.$$

Wendet man überhaupt diese Zerlegung n-mal an und setzt zur Abkürzung $2^n = p$, so erhält man

$$\sin z = 2^{p-1} \sin\frac{z}{p} \sin\frac{z+\pi}{p} \sin\frac{z+2\pi}{p} \cdots \sin\frac{z+(p-1)\pi}{p}$$

oder in kurzer selbstverständlicher Bezeichnung

$$(2) \qquad \sin z = 2^{p-1} s_0 s_1 s_2 \ldots s_{p-1}.$$

Die Reihe der Faktoren $s_0, s_1, \dots s_{p-1}$ werde nun in zwei Gruppen $s_0, s_1 \dots s_{\frac{1}{2}p-1}$ und $s_{\frac{1}{2}p}, s_{\frac{1}{2}p+1}, \dots s_{p-1}$ geteilt und die zweite Gruppe in umgekehrter Ordnung folgendermaßen unter die erste gesetzt

$$\begin{array}{llll} s_0, & s_1, & s_2, & \dots s_{\frac{1}{2}p-1}, \\ s_{p-1}, & s_{p-2}, & \dots s_{\frac{1}{2}p+1}, & s_{\frac{1}{2}p}; \end{array}$$

irgend zwei untereinanderstehende Faktoren sind dann

$$s_h = \sin\frac{h\pi + z}{p},$$

$$s_{p-h} = \sin\frac{(p-h)\pi + z}{p} = \sin\frac{h\pi - z}{p}.$$

Das Produkt derselben ist

$$s_h s_{p-h} = \sin^2\frac{h\pi}{p} - \sin^2\frac{z}{p};$$

macht man hiervon Gebrauch für $h = 1, 2, \cdots \frac{1}{2}p - 1$ und beachtet noch die Gleichung

$$s_{\frac{1}{2}p} = \cos\frac{z}{p},$$

so erhält man statt der Gleichung (2) die folgende:

$$(3) \quad \sin z = 2^{p-1}\sin\frac{z}{p}\left(\sin^2\frac{\pi}{p} - \sin^2\frac{z}{p}\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{p} - \sin^2\frac{z}{p}\right)\cdots \cdots\left(\sin^2\frac{(\frac{1}{2}p-1)\pi}{p} - \sin^2\frac{z}{p}\right)\cos\frac{z}{p}.$$

Hieraus folgt noch eine besondere Formel, wenn man beiderseits mit z dividiert und nachher zur Grenze für unendlich abnehmende z übergeht; sie lautet:

$$(4) \qquad 1 = \frac{2^{p-1}}{p}\sin^2\frac{\pi}{p}\sin^2\frac{2\pi}{p}\sin^2\frac{3\pi}{p}\cdots\sin^2\frac{(\frac{1}{2}p-1)\pi}{p}.$$

Dividiert man die Gleichung (3) durch (4) und bezeichnet zur Abkürzung $\frac{1}{2}p - 1$ mit q, so kann man den Quotienten in folgender Formel darstellen

$$(5) \qquad \frac{\sin z}{p\sin\frac{z}{p}\cos\frac{z}{p}}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{\sin\frac{z}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{z}{p}}{\sin\frac{2\pi}{p}}\right)^2\right]\cdots\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{z}{p}}{\sin\frac{q\pi}{p}}\right)^2\right].$$

Läßt man p ins Unendliche wachsen, so konvergiert die linke Seite dieser Gleichung gegen die Grenze $\frac{\sin z}{z}$, während das rechts verzeichnete aus $q = \frac{1}{2}p - 1$ Faktoren bestehende Produkt zu einem unendlichen Produkte wird. Man ersieht hieraus die Möglichkeit, $\sin z$ in Form eines unendlichen Produktes darzustellen; die Ausführung dieses Gedankens verlangt aber eine genauere Diskussion des Produktes in der Gleichung (5).

Zur Abkürzung geben wir der Gleichung die folgende Gestalt

$$\frac{\sin z}{p \sin \frac{z}{p} \cos \frac{z}{p}} = (1 - T_1)(1 - T_2)(1 - T_3) \ldots (1 - T_q),$$

worin irgend eine der Größen T, z. B. T_h durch die Formel

$$T_h = \left(\frac{\sin \frac{z}{p}}{\sin \frac{h z}{p}} \right)^2 \tag{6}$$

bestimmt ist. Unter k eine beliebige positive ganze Zahl $< q$ verstehend, zerlegen wir die obigen q Faktoren in zwei Gruppen, deren erste k Faktoren, und deren zweite die übrigen $q - k$ Faktoren enthält; dementsprechend schreiben wir

$$\frac{\sin z}{p \sin \frac{z}{p} \cos \frac{z}{p}} = (1 - T_1)(1 - T_2)(1 - T_3) \ldots (1 - T_k) . R, \tag{7}$$

$$R = (1 - T_{k+1})(1 - T_{k+2}) \ldots (1 - T_q), \tag{8}$$

und untersuchen zunächst das Ergänzungsprodukt R. In den Nennern der mit $T_{k+1}, T_{k+2}, \ldots T_q$ bezeichneten Brüche erscheinen die Bögen

$$\frac{(k+1)\pi}{p}, \frac{(k+2)\pi}{p}, \ldots \frac{q\pi}{p} = \frac{q\pi}{2q+2},$$

die sämtlich $< \frac{1}{2}\pi$ sind; in den Zählern steht immer der Bogen z/p, welcher kleiner als alle jene Bögen ist, wenn $z < k\pi$ oder $k > z/\pi$ gewählt wird, was im folgenden immer vorausgesetzt werden möge. Da im ersten Quadranten dem größeren Bogen der größere Sinus entspricht, so sind die Nenner von $T_{k+1}, T_{k+2}, \ldots T_q$ immer größer

als die zugehörigen Zähler, mithin $T_{k+1}, T_{k+2}, \ldots T_q$ positive echte Brüche; daraus folgt

$$(1 - T_{k+1})(1 - T_{k+2}) \ldots (1 - T_q) < 1,$$

d. h.

$$R < 1. \tag{9}$$

Um zweitens eine unterhalb R liegende Größe zu erhalten, benutzen wir den leicht erweisbaren Satz, daß jedes Produkt von der Form $(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \ldots$ mehr als die Differenz $1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots)$ beträgt, falls $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ positive echte Brüche sind. Es ist nämlich unter dieser Voraussetzung

$$(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 > 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2);$$

daraus folgt durch Multiplikation mit dem positiven Faktor $1 - \varepsilon_3$

$$(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_3)$$
$$> 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_3 > 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \text{ usw.}$$

Hiernach gilt die Ungleichung

$$R > 1 - (T_{k+1} + T_{k+2} + \cdots + T_q), \tag{10}$$

die sich vereinfachen läßt, wenn man die Bemerkung hinzubringt, daß die Funktion $\sin x/x$ innerhalb des ersten Quadranten fortwährend abnimmt, wie man aus dem negativen Vorzeichen des Differentialquotienten ersieht. Für einen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen ξ ist daher

$$\frac{\sin \xi}{\xi} > \frac{\sin \frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sin \xi} < \frac{\pi}{2\xi},$$

mithin, wenn $\xi = h\pi/p$ gesetzt und quadriert wird,

$$\frac{1}{\left(\sin \frac{h\pi}{p}\right)^2} < \frac{p^2}{4h^2} < \frac{p^2}{4}\left(\frac{1}{h-1} - \frac{1}{h}\right).$$

Diese Ungleichung multiplizieren wir mit der folgenden:

$$\left(\sin \frac{z}{p}\right)^2 < \frac{z^2}{p^2};$$

wir erhalten vermöge der Bedeutung von T_h nach (6)

$$T_h < \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{h-1} - \frac{1}{h}\right). \tag{11}$$

Durch Addition aller für $h = k + 1, k + 2, \ldots q$ hieraus entstehenden Ungleichungen ergibt sich ferner

$$T_{k+1} + T_{k+2} + \cdots + T_q < \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{q}\right) < \frac{z^2}{4k},$$

ferner

$$1 - (T_{k+1} + T_{k+2} + \cdots + T_q) > 1 - \frac{z^2}{4k}$$

und um so mehr nach (10)

$$R > 1 - \frac{z^2}{4k}. \tag{12}$$

Die Zusammenstellung der Ungleichungen (9) und (12) zeigt, daß

$$R = 1 - \frac{\varrho z^2}{4k}$$

gesetzt werden darf, wo ϱ einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch bedeutet. Unter den Bedingungen

$$\left(\frac{z}{\pi}\right)^2 < k^2 < q^2 \quad \text{und} \quad 0 < \varrho < 1$$

gilt nun die Gleichung

$$\frac{\sin z}{p \sin \frac{z}{p} \cos \frac{z}{p}} = \tag{13}$$

$$\left[1 - \left(\frac{\sin \frac{z}{p}}{\sin \frac{\pi}{p}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\sin \frac{z}{p}}{\sin \frac{2\pi}{p}}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{\sin \frac{z}{p}}{\sin \frac{k\pi}{p}}\right)^2\right]\left(1 - \frac{\varrho z^2}{4k}\right).$$

Der Übergang zur Grenze für unendlich wachsende p bietet jetzt keine Schwierigkeit mehr, wenn man sich dabei k als konstante Zahl denkt; mittels der Werte

$$\lim \left(p \sin \frac{z}{p}\right) = z, \quad \lim \frac{\sin \frac{z}{p}}{\sin \frac{h\pi}{p}} = \frac{z}{h\pi}$$

erhält man nämlich aus der Gleichung (13) die Formel

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varrho z^2}{4k}\right), \tag{14}$$

welche nur an die Bedingung

$$-k\pi < z < +k\pi$$

gebunden ist. Statt der Gleichung (14) kann man schreiben

$$\frac{\sin z}{1-\frac{\varrho z^2}{4k}} = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right), \tag{15}$$

und wenn nun auch die beliebige ganze positive Zahl k als unendlich wachsend gedacht wird, so konvergiert linker Hand der Nenner gegen die Einheit, wofern z irgend einen endlichen Wert behält; das endliche Produkt wird zu einem unendlichen, und so ergibt sich die für jedes endliche z gültige Formel

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \tag{16}$$

In dem besonderen Falle $z = \frac{1}{2}\pi$ erhält man hieraus

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdot\frac{5.7}{6^2}\cdots$$

oder umgekehrt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

Ganz ähnliche Umwandlungen können mit der Gleichung (18) in § 47 vorgenommen werden, doch gelangt man zum Endresultate kürzer auf folgendem Wege. In der Gleichung (15) ersetzen wir einmal k durch die gerade Zahl $2k$, das andere Mal z durch $\frac{1}{2}z$ und haben dann die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin z}{1-\frac{\varrho_1 z^2}{8k}} = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2\pi^2}\right),$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}z}{1-\frac{\varrho_2 z^2}{16k}} = \frac{1}{2}z\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{6^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k^2\pi^2)}\right),$$

worin ϱ_1 und ϱ_2 positive echte Brüche sind. Die erste Gleichung dividieren wir durch das Doppelte der zweiten und erhalten die Formel

$$\left(\frac{1-\frac{\varrho_2 z^2}{16k}}{1-\frac{\varrho_1 z^2}{8k}}\right)\cos\tfrac{1}{2}z \tag{17}$$

$$= \left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right).$$

Für unendlich werdende k geht diese Gleichung über in folgende:

$$(18)\qquad \cos\tfrac{1}{2}z = \left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots;$$

auch ist noch, wenn z durch $2z$ ersetzt wird,

$$(19)\qquad \cos z = \left(1-\frac{4z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots,$$

wobei z jeden beliebigen Bogen von endlicher Größe bedeuten darf.

Aus den Gleichungen (16) und (19) geht unmittelbar hervor, daß überhaupt alle sechs goniometrischen Funktionen in Form von unendlichen Produkten dargestellt werden können.

§ 49. Die Reihen für Tangente, Kotangente usw.

Es liegt sehr nahe, von den unendlichen Produkten des vorigen Paragraphen die Logarithmen zu nehmen, um wieder auf unendliche Reihen zu kommen; die etwa vorhandenen negativen Faktoren lassen sich hierbei vermeiden, wenn man die Gleichungen erst quadriert, bevor man zu den Logarithmen übergeht. Dies gibt folgende Resultate

$$(1)\ \lg(\sin^2 z) = \lg(z^2) + \lg\left[\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)^2\right] + \lg\left[\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)^2\right] + \cdots,$$

$$(2)\ \lg(\cos^2 z) = \lg\left[\left(1-\frac{4z^2}{1^2\pi^2}\right)^2\right] + \lg\left[\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)^2\right] + \cdots;$$

daraus erhält man ferner durch Differentiation, welche nach § 41 erlaubt ist,

$$(3)\qquad \cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{(1\pi)^2-z^2} - \frac{2z}{(2\pi)^2-z^2} - \frac{2z}{(3\pi)^2-z^2} - \cdots,$$

$$(4)\qquad \operatorname{tg} z = \frac{2z}{(\frac{1}{2}\pi)^2-z^2} + \frac{2z}{(\frac{3}{2}\pi)^2-z^2} + \frac{2z}{(\frac{5}{2}\pi)^2-z^2} + \cdots,$$

oder auch, wenn $\frac{1}{2}z$ für z gesetzt wird,

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}z = \frac{4z}{(1\pi)^2-z^2} + \frac{4z}{(3\pi)^2-z^2} + \frac{4z}{(5\pi)^2-z^2} + \cdots$$

Addiert man die Gleichungen (3) und (5), indem man linker Hand die Formel $\cot z + \operatorname{tg}\frac{1}{2}z = \operatorname{cosec} z$ benutzt, so findet sich

$$(6)\qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{(1\pi)^2-z^2} - \frac{2z}{(2\pi)^2-z^2} + \frac{2z}{(3\pi)^2-z^2} - \cdots$$

Um noch eine Reihe für $\sec z$ zu erhalten, bringen wir die Gleichung (6) auf die Form

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \left\{\frac{1}{\pi - z} - \frac{1}{\pi + z}\right\} - \left\{\frac{1}{2\pi - z} - \frac{1}{2\pi + z}\right\} + \left\{\frac{1}{3\pi - z} - \frac{1}{3\pi + z}\right\} - \cdots$$

und lassen $\frac{1}{2}\pi - z$ an die Stelle von z treten; durch Vereinigung der einander entsprechenden Brüche folgt dann

$$(7) \qquad \sec z = \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - z^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{5\pi}{(\frac{5}{2}\pi)^2 - z^2} - \cdots$$

Die unendlichen Reihen, welche in den bisherigen Gleichungen vorkommen, gestatten weitere Umwandlungen, wodurch sie wieder zu Potenzreihen werden. Nimmt man nämlich in Formel (1) die Größe z zwischen $-\pi$ und $+\pi$, so sind z/π, $z/2\pi$, $z/3\pi$ usf. echte Brüche; dann ist ferner

$$\lg\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \lg\left(1 - \frac{z^2}{1^2\pi^2}\right) + \lg\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) + \lg\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) + \cdots$$

und hier lassen sich rechter Hand alle Logarithmen mittels der Formel

$$\lg(1 - x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots, \qquad -1 < x < +1$$

entwickeln; dies gibt

$$\begin{aligned}\lg\left(\frac{\sin z}{z}\right) = & -\frac{z^2}{1^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{z^4}{1^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{z^6}{1^6\pi^6} - \cdots \\ & -\frac{z^2}{2^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{z^4}{2^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{z^6}{2^6\pi^6} - \cdots \\ & -\frac{z^2}{3^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{z^4}{3^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{z^6}{3^6\pi^6} - \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Die vorstehende Doppelreihe genügt nach § 42 den Bedingungen, unter welchen die Anordnung nach Spalten erlaubt ist, folglich hat man auch

$$\begin{aligned}\lg\left(\frac{\sin z}{z}\right) \quad & -\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)\frac{z^2}{\pi^2} \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)\frac{z^4}{\pi^4} \\ & -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots\right)\frac{z^6}{\pi^6} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Bezeichnet man die Summen der eingeklammerten Horizontalreihen mit S_2, S_4, S_6 usw., so daß überhaupt

$$S_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots \tag{8}$$

ist, so geht die vorige Gleichung über in

$$\lg\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\tfrac{1}{1}\frac{S_2 z^2}{\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{S_4 z^4}{\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{S_6 z^6}{\pi^6} - \cdots, \tag{9}$$
$$-\pi < z < +\pi.$$

Eine ganz ähnliche Transformation kann mit der Gleichung (2) vorgenommen werden, sobald z innerhalb der Strecke von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ liegt; mit Hilfe der Abkürzung

$$T_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \cdots \tag{10}$$

erhält man

$$\lg\cos z = -\tfrac{1}{1}\frac{2^2 T_2 z^2}{\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{2^4 T_4 z^4}{\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{2^6 T_6 z^6}{\pi^6} - \cdots, \tag{11}$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Die hier vorkommenden Summen T_2, T_4, T_6 usw. lassen sich wieder durch S_2, S_4, S_6 usw. ausdrücken; nach Formel (8) ist nämlich

$$\frac{1}{2^m} S_m = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \cdots,$$

und wenn man dies von der Gleichung (8) abzieht, so bleibt

$$\frac{2^m - 1}{2^m} S_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \cdots = T_m.$$

Demnach wird aus der Gleichung (11) die folgende

$$\lg\cos z \tag{12}$$
$$= -\tfrac{1}{1}\frac{(2^2-1) S_2 z^2}{\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{(2^4-1) S_4 z^4}{\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{(2^6-1) S_6 z^6}{\pi^6} - \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Die Formeln (3) und (4) lassen sich analog behandeln, wobei man die für $-k\pi < z < +k\pi$ geltende Reihenentwicklung

$$\frac{z}{(k\pi)^2 - z^2} = \frac{z}{(k\pi)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{k\pi}\right)^2}$$
$$= \frac{z}{(k\pi)^2} + \frac{z^3}{(k\pi)^4} + \frac{z^5}{(k\pi)^6} + \cdots$$

zu benutzen hat; das Endergebnis findet sich aber rascher durch Differentiation der Gleichungen (9) und (12), nämlich

$$(13)\qquad \cot z = \frac{1}{z} - \frac{2\,S_2 z}{\pi^2} - \frac{2\,S_4 z^3}{\pi^4} - \frac{2\,S_6 z^5}{\pi^6} - \cdots,$$
$$-\pi < z < +\pi;$$

$$(14)\qquad \operatorname{tg} z = \frac{2\,(2^2-1)\,S_2 z}{\pi^2} + \frac{2\,(2^4-1)\,S_4 z^3}{\pi^4} + \frac{2\,(2^6-1)\,S_6 z^5}{\pi^6} + \cdots$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ersetzt man in der letzten Gleichung z durch $\frac{1}{2}z$ und addiert die entstehende Gleichung zur vorhergehenden, so erhält man noch

$$(15)\qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \frac{(2^1-1)\,S_2 z}{\pi^2} + \frac{(2^3-1)\,S_4 z^3}{2^2\pi^4} + \frac{(2^5-1)\,S_6 z^5}{2^4\pi^6} + \cdots,$$
$$-\pi < z < +\pi,$$

wie sich auch durch Umwandlung der Formel (6) finden würde.

Um endlich eine Potenzreihe für $\sec z$ zu gewinnen, beschränken wir in der Gleichung (7) die Veränderliche z auf die Werte zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ und entwickeln die einzelnen Glieder nach der Formel

$$\frac{n\pi}{(\frac{1}{2}n\pi)^2 - z^2} = \frac{4}{n\pi}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{2z}{n\pi}\right)^2} = \frac{4}{n\pi}\left\{1 + \left(\frac{2z}{n\pi}\right)^2 + \left(\frac{2z}{n\pi}\right)^4 + \cdots\right\}.$$

Indem wir zur Abkürzung

$$(16)\qquad U_m = \frac{1}{1^m} - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \cdots$$

setzen, gelangen wir zu folgendem Ergebnis:

$$(17)\qquad \sec z = \frac{2^2\,U_1}{\pi} + \frac{2^4\,U_3 z^2}{\pi^3} + \frac{2^6\,U_5 z^4}{\pi^5} + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

An die Gleichungen (14) und (17) knüpft sich noch eine wertvolle Bemerkung. Die Tangentenreihe muß nämlich gleichfalls zum

Vorschein kommen, wenn man das Theorem von **Mac Laurin** unmittelbar auf die Funktion $f(z) = \operatorname{tg} z$ anwendet: es ist daher innerhalb der schon bekannten Grenzen

$$\operatorname{tg} z = \frac{(D \operatorname{tg} z)_0}{1} z + \frac{(D^2 \operatorname{tg} z)_0}{1.2} z^2 + \cdots,$$

und zwar bezeichnet hier $(D^k \operatorname{tg} z)_0$ den besonderen Zahlwert, welchen der k^{te} Differentialquotient von $\operatorname{tg} z$ für $z = 0$ erlangt. Der Vergleich mit der Formel (14) zeigt erstens, daß bei geraden k jederzeit $(D^k \operatorname{tg} z)_0 = 0$ ist, wie man auch auf anderem Wege leicht findet, und zweitens, daß für ungerade k die Relation

$$(18) \qquad \frac{(D^k \operatorname{tg} z)_0}{1.2.3\ldots k} = \frac{2(2^{k+1} - 1) S_{k+1}}{\pi^{k+1}}$$

besteht. Um den Zähler linker Hand zu ermitteln, benutzen wir die Formel (4) in § 13 für $x = 0$ und setzen zur Abkürzung

$$(D^k \operatorname{tg} z)_0 = \tau_k, \quad (k \text{ ungerade});$$

wir haben dann bei ungeraden n

$$(19) \qquad \tau_n - \binom{n}{2} \tau_{n-2} + \binom{n}{4} \tau_{n-4} - \cdots = \sin \tfrac{1}{2} n \pi,$$

und hieraus ergeben sich der Reihe nach τ_1, τ_3, τ_5 usw., wenn fortschreitend $n = 1, 3, 5$ usw. genommen wird. Man hat nun einerseits

$$(20) \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\tau_1}{1} z + \frac{\tau_3}{1.2.3} z^3 + \frac{\tau_5}{1.2\ldots5} z^5 + \cdots$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

ferner nach (18), wobei zu größerer Deutlichkeit $k = 2p - 1$ sein möge,

$$(21) \qquad S_{2p} = \frac{\tau_{2p-1} \pi^{2p}}{2(2^{2p} - 1).1.2\ldots(2p-1)}.$$

Aus der Formel (19) geht hervor, daß τ_1, τ_3, τ_5 usw. ganze rationale Zahlen sind, und zwar

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_3 = 2, \quad \tau_5 = 16 \quad \text{usw.};$$

betrachtet man sie als bekannt, so zeigt die Formel (21), wie mit ihrer Hilfe die Summen S_2, S_4, S_6 usw. gefunden werden können, z. B.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}, \quad \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90},$$
$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945} \quad \text{usw.}$$

Was zweitens die Gleichung (17) anbelangt, so ist zunächst klar, daß dieselbe innerhalb des angegebenen Intervalls mit der Entwicklung

$$\sec z = 1 + \frac{(D \sec z)_0}{1} z + \frac{(D^2 \sec z)_0}{1 \,.\, 2} z^2 + \cdots$$

übereinstimmen muß; demnach hat man für ungerade k

$$(D^k \sec z)_0 = 0$$

und für gerade k

$$\frac{(D^k \sec z)_0}{k!} = \frac{2^{k+2} U_{k+1}}{\pi^{k+1}}. \tag{22}$$

Zur Abkürzung sei

$$(D^k \sec z)_0 = \tau_k, \quad (k \text{ gerade});$$

die Formel (2) in § 13 liefert dann für $x = 0$ und bei geraden n

$$\tau_n - \binom{n}{2} \tau_{n-2} + \binom{n}{4} \tau_{n-4} - \cdots = 0, \tag{23}$$

woraus man τ_2, τ_4, τ_6 usw. erhält, wenn man der Reihe nach $n = 2$, 4, 6 usw. nimmt. Es ist nun einerseits

$$\sec z = 1 + \frac{\tau_2}{1 \,.\, 2} z^2 + \frac{\tau_4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} z^4 + \cdots, \tag{24}$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

anderseits nach Formel (22) für $k = 2p$

$$U_{2p+1} = \frac{\tau_{2p}\, \pi^{2p+1}}{2^{2p+2}\,(2p)!}; \tag{25}$$

mithin können die rationalen ganzen Zahlen

$$\tau_2 = 1, \quad \tau_4 = 5, \quad \tau_6 = 61 \quad \text{usw.}$$

zur Bestimmung der Summen U_1, U_3, U_5 usw. dienen; so ist z. B.

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

usw.

Schreibt man in Formel (23) rechter Hand $\sin \frac{1}{2} n \pi$ statt 0, was bei geraden n richtig ist, so erhält man dieselbe Gleichung, welche unter (19) für ungerade n verzeichnet ist; demnach sind die Tangentenkoeffizienten nach derselben Regel gebildet wie die Sekantenkoeffizienten. Aus der Bemerkung, daß

$$\sec z + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2} z\right)$$

ist, folgt noch die Formel

$$(26)\qquad \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}z) = 1 + \frac{\tau_1}{1}z + \frac{\tau_2}{1.2}z^2 + \frac{\tau_3}{1.2.3}z^3 + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

worin alle mit τ bezeichneten Koeffizienten vorkommen.

Die Reihen für Kotangente, Tangente und Kosekante stellt man häufig unter einer etwas anderen Form dar, mit deren Angabe wir diese Untersuchungen beschließen wollen. Nach Formel (13) ist nämlich

$$\tfrac{1}{2}x\cot\tfrac{1}{2}x = 1 - \frac{S_2 x^2}{2^1\pi^2} - \frac{S_4 x^4}{2^3\pi^4} - \cdots;$$

dagegen würde das Theorem von Mac Laurin liefern

$$(27)\qquad \tfrac{1}{2}x\cot\tfrac{1}{2}x = 1 - \frac{B_1 x^2}{1.2} - \frac{B_3 x^4}{1.2.3.4} - \cdots,$$
$$-2\pi < x < +2\pi,$$

wobei

$$B_{2p-1} = -[D^{2p}(\tfrac{1}{2}x\cot\tfrac{1}{2}x)]_0$$

gesetzt wurde. Aus Gründen, die sich später ergeben werden, hat man die Form (27) vorgezogen und die Koeffizienten B_1, B_3, B_5 usw. mit dem Namen der Bernoullischen Zahlen belegt; es ist daher

$$\frac{S_{2p}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} = \frac{B_{2p-1}}{1.2.3\ldots(2p)}$$

oder

$$(28)\qquad S_{2p} = \frac{2^{2p-1}B_{2p-1}\pi^{2p}}{1.2.3\ldots(2p)},$$

und nach den Formeln (13), (14), (15)

$$(29)\qquad \cot z = \frac{1}{z} - \frac{2^2 B_1}{1.2}z - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4}z^3 - \frac{2^6 B_5}{1.2\ldots6}z^5 - \cdots;$$
$$-\pi < z < +\pi;$$

$$(30)\qquad \operatorname{tg} z = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2}z + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}z^3$$
$$+ \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2\ldots6}z^5 + \cdots, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi;$$

$$(31)\qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \frac{2(2^1-1)B_1}{1.2}z + \frac{2(2^3-1)B_3}{1.2.3.4}z^3$$
$$+ \frac{2(2^5-1)B_5}{1.2\ldots6}z^5 + \cdots, \quad -\pi < z < +\pi.$$

Ein Mittel zur Berechnung der Bernoullischen Zahlen erhält man durch Vergleichung der Formeln (21) und (28); es folgt nämlich

$$B_{2p-1} = \frac{p\,\tau_{2p-1}}{2^{2p-1}(2^{2p}-1)}, \tag{32}$$

mithin können die Bernoullischen Zahlen aus den Tangentenkoeffizienten hergeleitet werden, z. B.

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42},$$
$$B_7 = \frac{1}{30}, \quad B_9 = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = \frac{691}{2730},$$
$$B_{13} = \frac{7}{6}, \quad B_{15} = \frac{3617}{510}, \quad B_{17} = \frac{43867}{798}.$$

Über das Wachstum dieser Zahlen gibt die Gleichung (28) Auskunft, aus der man schließt

$$\frac{B_{2p+1}}{B_{2p-1}} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4\pi^2}\,\frac{S_{2p+2}}{S_{2p}}. \tag{33}$$

Nun ist offenbar allgemein

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots,$$
$$< \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots,$$
$$S_n < 1 + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \qquad S_n < 1 + \frac{1}{2^{n-1}},$$

anderseits $S_n > 1$; also folgt

$$\lim_{n=\infty} S_n = 1, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{S_{2p+2}}{S_{2p}} = 1.$$

Die Formel (33) ergibt demnach, daß die Bernoullischen Zahlen schließlich rascher zunehmen, als irgend eine geometrische Progression.

§ 50. Reihenentwicklungen für Funktionen mehrerer Unabhängiger.

Da nach dem Taylorschen Satze $f(x+h)$ in eine nach Potenzen von h fortschreitende Reihe verwandelbar ist, so läßt sich der Analogie nach erwarten, daß bei zwei Unabhängigen x und y die geänderte Funktion $F(x+h,\ y+k)$ nach Potenzen von h und k entwickelbar

sein werde. In der Tat macht sich dies leicht mittels folgenden Kunstgriffs. Die zu entwickelnde Funktion kann als der besondere Wert angesehen werden, welchen der Ausdruck

$$f(t) = F(x + ht, y + kt) \tag{1}$$

für $t = 1$ annimmt; als Funktion von t betrachtet, läßt sich $f(t)$ nach der Mac Laurinschen Formel

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} t + \frac{f''(0)}{1.2} t^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2.3\ldots(n-1)} t^{n-1} + R_n$$

in eine Reihe umsetzen, und hieraus muß für $t = 1$ die gesuchte Entwicklung von $F(x + h, y + k)$ hervorgehen. Durch fortschreitende Differentiation der Gleichung (1) erhält man die Formeln

$$f'(t) = \frac{\partial F}{\partial (x + ht)} h + \frac{\partial F}{\partial (y + kt)} k,$$

$$f''(t) = \frac{\partial^2 F}{[\partial (x + ht)]^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial (x + ht) . \partial (y + kt)} hk + \frac{\partial^2 F}{[\partial (y + kt)]^2} k^2$$

usw.,

von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt, wenn man F zuerst als Funktion zweier Unabhängigen ξ und η behandelt, welche mit t durch die Gleichungen $\xi = x + ht$ und $\eta = y + kt$ verbunden sind. Für $t = 0$ wird

$$f(0) = F(x, y),$$

$$f'(0) = \frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k,$$

$$f''(0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2 \quad \text{usw.,}$$

überhaupt stimmt $f^{(m)}(0)$ mit dem vollständigen m^{ten} Differential von $F(x, y)$ überein, wenn man sich in demselben ∂x durch h, und ∂y durch k ersetzt denkt; in kurzer symbolischer Form geschrieben ist also

$$f^{(m)}(0) = \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right)^m \partial^m F.$$

Dies gibt folgende Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} (2) \qquad & F(x + ht, y + kt) \\ &= F(x, y) + \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right) \frac{\partial F}{1} t + \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right)^2 \frac{\partial^2 F}{1.2} t^2 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right)^{n-1} \frac{\partial^{n-1} F}{1.2\ldots(n-1)} t^{n-1} + R_n, \end{aligned}$$

wobei noch der Rest, wofür wir die Form wählen

$$R_n = \frac{t^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\vartheta t), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

durch F auszudrücken ist. Die Vergleichung von $f'(t)$ und $f'(0)$, $f''(t)$ und $f''(0)$ usw. lehrt nun, daß $f^{(n)}(t)$ als dasjenige betrachtet werden kann, was aus $f^{(n)}(0)$ wird, wenn $x + ht$ für x, und $y + kt$ für y eintreten; bezeichnet man daher wie folgt

$$(3) \qquad F_n(x, y, h, k) = \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right)^n \partial^n F,$$

so ist

$$f^{(n)}(t) = F_n(x + ht, y + kt, h, k),$$

mithin, wenn ϑt an die Stelle von t gesetzt wird,

$$(4) \qquad R_n = \frac{t^n F_n(x + \vartheta h t, y + \vartheta k t, h, k)}{1.2.3\ldots n}.$$

Für $t = 1$ hat man schließlich folgende Entwicklung

$$(5) \qquad F(x + h, y + k)$$

$$= F(x, y) + \frac{F_1(x, y, h, k)}{1} + \frac{F_2(x, y, h, k)}{1.2} + \cdots + \frac{F_{n-1}(x, y, h, k)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$+ \frac{F_n(x + \vartheta h, y + \vartheta k, h, k)}{1.2.3\ldots n};$$

diese gilt aber nur unter der Bedingung, daß die Funktionen F, F_1, F_2, ... F_n stetig und endlich bleiben, während x bis $x + h$ und y bis $y + k$ zunimmt.

Setzt man nach Ausführung der in (3) angedeuteten Differentiationen $x = 0$, $y = 0$ und schreibt dann x und y für h und k, so erhält man die Entwicklung von $F(x, y)$ nach Potenzen von x und y.

Ähnliche Formeln gelten für Funktionen mehrerer Veränderlicher und sind mittels des anfangs erwähnten Kunstgriffs so leicht herzuleiten, daß eine nähere Auseinandersetzung unterbleiben kann.

Kapitel VIII.

Funktionen komplexer Veränderlicher.

§ 51. Das Rechnen mit komplexen Zahlen.

Wenn man sich, wozu die Auflösung der quadratischen Gleichungen veranlaßt, erlaubt, mit einem Symbol $\sqrt{-1}$ zu rechnen, und Zusammenstellungen wie $a_1 + a_2\sqrt{-1}$, in denen a gewöhnliche Zahlen sind, in die Rechnung einzuführen, so würden Addition und Multiplikation zu folgenden Gleichungen führen. Sei etwa $A = a_1 + a_2\sqrt{-1}$, $B = b_1 + b_2\sqrt{-1}$ gesetzt, so würde man ansetzen

$$(1) \qquad \begin{aligned} A + B &= a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\sqrt{-1}, \\ AB &= a_1 b_1 - a_2 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Man kann diese Rechnungen von dem zunächst bedenklich aussehenden Symbol $\sqrt{-1}$ befreien, und unter A und B Systeme von je zwei Zahlen, einer ersten und einer zweiten verstehen,

$$A = (a_1, a_2), \quad B = (b_1, b_2),$$

und für diese ganz reellen Zahlenpaare die folgenden durch die Gleichungen (1) veranlaßten Rechenregeln aufstellen:

$$(2) \quad A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad AB = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1);$$

man übersieht leicht, daß für diese neu definierten Operationen genau die in Einl. I aufgezählten Regeln gelten, z. B., wenn $C = (c_1, c_2)$,

$$\begin{aligned} (A + B)\, C &= [(a_1 + b_1)c_1 - (a_2 + b_2)c_2, \ (a_1 + b_1)c_2 + (a_2 + b_2)c_1] \\ &= AC + BC, \ AB = BA \ \text{usf.} \end{aligned}$$

Verschwindet die zweite Zahl in zwei Paaren, z. B. $A = (a_1, 0)$, $B = (b_1, 0)$, so geben die Gleichungen (2) die gewöhnlichen Operationen der Addition und Multiplikation mit den ersten Zahlen vollzogen:

$$(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0), \ (a_1, 0)\,(b_1, 0) = (a_1 b_1, 0),$$

so daß in den Rechnungen (2) die gewöhnlichen Operationen als Sonderfälle, nur weitläufiger geschrieben, enthalten sind; wir dürfen daher allgemein $a_1 = (a_1, 0)$, $b_1 = (b_1, 0)$ usf. setzen, und die gewöhnlichen Rechnungen mit a_1 und b_1 werden nach den Regeln (2) durchgeführt.

Jetzt beachten wir besonders das Zahlenpaar $i = (0, 1)$ und finden nach (2)

$$i^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

und weiter

$$a + ib = (a, 0) + (0, 1)\,(b, 0) = (a, b),$$

man kann also alle Zahlenpaare durch das besondere Paar i und solche mit verschwindender zweiter Zahl mittels der Operationen (2) ausdrücken, und dann diese Rechnungen durch die einfacheren

$$(3)\quad \begin{aligned} (a_1 + a_2 i) + (b_1 + b_2 i) &= a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\,i \\ (a_1 + a_2 i)\,(b_1 + b_2 i) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 i^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i \\ &= a_1 b_1 - a_2 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i \end{aligned}$$

ausdrücken; man rechnet also mit dem Symbol i wie mit einer gewöhnlichen Zahl, die aber die besondere Eigenschaft $i^2 = -1$ darbietet.

Damit ist das Symbol $\sqrt{-1}$, die imaginäre Einheit, vollkommen gerechtfertigt, da man immer auf ein völlig reelles, d. h. im Rahmen der bisherigen Arithmetik liegendes Zahlenpaar zurückgehen kann. Zahlenpaare von der Form $(0, a_2) = a_2 i$ nennt man rein imaginäre, alle anderen (a_1, a_2) komplexe Zahlen, die gewöhnlichen nennt man reell. Die Zahl 0, als Paar geschrieben (0, 0), hat auch hier die Eigenschaft, als Faktor das Produkt $= 0$ zu machen, wie die zweite Gleichung (3) zeigt, wenn man $b_2 = b_1 = 0$ setzt.

Durch jede von Null verschiedene komplexe Zahl $b_1 + b_2 i$ kann man auch dividieren, d. h. eine Zahl $c_1 + c_2 i$ finden, die, wenn $a_1 + a_2 i$ gegeben ist, die Gleichung

$$(4)\quad a_1 + a_2 i = (b_1 + b_2 i)\,(c_1 + c_2 i) = b_1 c_1 - b_2 c_2 + (b_1 c_2 + b_2 c_1)\,i$$

liefert; man findet durch Auflösung der Gleichungen

$$a_1 = b_1 c_1 - b_2 c_2, \quad a_2 = b_2 c_1 + b_1 c_2$$

nach c_1 und c_2 die Werte

$$c_1 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1{}^2 + b_2{}^2}, \quad c_2 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1{}^2 + b_2{}^2}$$

und bestätigt jetzt leicht die Gleichung (4). Der Nenner $b_1{}^2 + b_2{}^2$ kann nur verschwinden, wenn $b_1 = b_2 = 0$ ist, was wir ausgeschlossen haben; die Zahl $b_1 + b_2 i$ sollte von Null verschieden sein.

Irgend zwei komplexe Zahlen $a_1 + a_2 i$ und $b_1 + b_2 i$ sind gleich, wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$; eine komplexe Gleichung $A = B$ zerfällt immer in zwei reelle, worauf der Nutzen der komplexen Rechnung für das reelle Gebiet beruht.

Zu jeder komplexen Zahl A gibt es eine entgegengesetzte

$$-A = (-1).A = (-1, 0)(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$$
$$= -(a_1 + a_2 i) = -a_1 - a_2 i;$$

als Differenz $B - A$ bezeichnen wir die Summe $B + (-A)$, womit auch die Subtraktion so eingeführt ist, daß die für diese Operation im Reellen geltenden Regeln bei Bestand bleiben; offenbar ist

$$(B - A) + A = B.$$

Als absoluten Betrag der komplexen Zahl $A = a_1 + a_2 i$ bezeichnet man die Größe

$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

und findet

$$(|A| + |B|)^2 = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})^2$$
$$= a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$
$$|A + B|^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2,$$
$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 = 2(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2} - a_1 b_1 - a_2 b_2).$$

Die rechte Seite ist nun nie negativ; denn man hat die Beziehung

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geqq 0,$$

also

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b^2} \geqq \sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}. \tag{5}$$

Ist nun $a_1 b_1 + a_2 b_2 \leqq 0$, so ist die gewünschte Beziehung

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2} - (a_1 b_1 + a_2 b_2) \geqq 0 \tag{6}$$

schon gesichert; ist $a_1 b_1 + a_2 b_2 > 0$, so folgt dasselbe aus der Ungleichung (5); die Beziehung (6) gilt also allgemein, oder

$$|A| + |B| \geqq |A + B|. \tag{7}$$

Ebenso findet man

$$|A + B|^2 - \{|A| - |B|\}^2 = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}),$$

und die Ungleichung (6), in der man a_1 und a_2 durch $-a_1$ und $-a_2$ ersetzen kann, da ja a_1 und a_2 beliebige reelle Größen sind, ergibt

$$|A + B|^2 \geqq \{|A| - |B|\}^2$$

oder, wenn man beiderseits die positiven Quadratwurzeln auszieht,

$$|A + B| \geqq \big||A| - |B|\big|. \tag{8}$$

Die Ungleichungen (7) und (8) waren in Einl. I, 3. schon für reelle Größen aufgestellt, sind also jetzt verallgemeinert.

Geometrisch stellt man die komplexe Zahl $z = x + yi$ durch den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y dar. Sind r, θ die gewöhnlichen Polarkoordinaten, so hat man die Gleichungen

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta,$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \pm k\pi,$$

wobei k eine gerade oder ungerade ganze Zahl bedeutet, je nachdem x positiv oder negativ ist; wenn $x = 0$, ist $\theta = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ oder $(3/2)\pi + 2k\pi$ zu setzen, je nachdem y positiv oder negativ ist. Der hiermit bis auf das Vielfache von 2π definierte Winkel θ heißt das Winkelargument der komplexen Größe z; er ist genau so definiert wie der Winkel τ in § 18: Man drehe die positive x-Achse positiv herum um den Winkel θ, so kommt sie in die Lage der Halbgeraden vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Punkte z hin.

Man hat ferner bei gewöhnlicher Multiplikation, wenn $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} zz_1 &= r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.\,r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ &= rr_1[\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1 + i(\sin\theta\cos\theta_1 + \cos\theta\sin\theta_1)] \\ &= rr_1[\cos(\theta+\theta_1) + i\sin(\theta+\theta_1)]; \end{aligned}$$

der absolute Betrag ist also das Produkt der Beträge der Faktoren, das neue Winkelargument die Summe der gegebenen Argumente.

Durch mehrmalige Anwendung dieser Regel gelangt man zu der allgemeineren Formel

$$(9) \quad \begin{aligned} &r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,.\,r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ldots r_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m) \\ &= r_1 r_2 \ldots r_m[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m)]. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Division. Multipliziert man nämlich Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{z}{z_1} = \frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}$$

mit $(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)/r_1$, so wird der Nenner $= 1$ und folglich ist der gesuchte Quotient

$$\begin{aligned} &\frac{r}{r_1}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) \\ &= \frac{r}{r_1}[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1 + i(\sin\theta\cos\theta_1 - \cos\theta\sin\theta_1)] \end{aligned}$$

§ 52. Anwendungen der vorigen Sätze.

I. Dem Moivreschen Theorem zufolge gilt die Gleichung

$$\cos m\theta + i \sin m\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^m;$$

die rechte Seite ist, m als ganz und positiv vorausgesetzt, ein Produkt aus m gleichen Faktoren, zu dessen Ausrechnung der binomische Satz benutzt werden kann, weil die Multiplikation bei reellen und bei imaginären Faktoren auf völlig gleiche Weise geschieht. Nach beiderseitiger Vergleichung der reellen und der imaginären Teile gelangt man zu folgenden brauchbaren goniometrischen Formeln:

$$(1) \qquad \cos m\theta = \binom{m}{0}\cos^m\theta - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + \binom{m}{4}\cos^{m-4}\theta\sin^4\theta - \cdots,$$

$$(2) \qquad \sin m\theta = \binom{m}{1}\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\theta\sin^5\theta - \cdots$$

oder

$$(3) \qquad \frac{\cos m\theta}{\cos^m\theta} = \binom{m}{0} - \binom{m}{2}\operatorname{tg}^2\theta + \binom{m}{4}\operatorname{tg}^4\theta - \binom{m}{6}\operatorname{tg}^6\theta + \cdots,$$

$$(4) \qquad \frac{\sin m\theta}{\cos^m\theta} = \binom{m}{1}\operatorname{tg}\theta - \binom{m}{3}\operatorname{tg}^3\theta + \binom{m}{5}\operatorname{tg}^5\theta - \cdots$$

II. Die Auflösung der Gleichung $x^n = +1$. Aus der vorstehenden Gleichung folgt $x = (+1)^{\frac{1}{n}}$; die gesuchten Werte von x können folglich nach § 51 (11) berechnet werden, wenn man $r = 1$, $\theta = 0$, $m = 1$, $k = 0, 1, \ldots (n-1)$ setzt, und sie sind in der allgemeinen Form

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

enthalten. Man kann hierbei gerade und ungerade n unterscheiden im ersten Falle nimmt man der Reihe nach

$$k = 0, 1, 2, \cdots\cdots \frac{n}{2} - 1,$$

$$\frac{n}{2}, n-1, n-2, \cdots \frac{n}{2} + 1,$$

im zweiten Falle

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ \frac{n-1}{2},$$
$$n-1,\ n-2,\ \ldots\ldots\ \frac{n+1}{2}.$$

Für ein gerades n sind hiernach die Werte von x:

$$+1, \qquad -1,$$
$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \qquad \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n},$$
$$\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, \qquad \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n},$$
$$\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}, \qquad \cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n},$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, \qquad \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n},$$

dagegen für ein ungerades n:

$$+1,$$
$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \qquad \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n},$$
$$\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, \qquad \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n},$$
$$\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}, \qquad \cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n},$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \qquad \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

So hat z. B. die Gleichung

$$x^6 = +1$$

folgende sechs Wurzeln

$$+1, \qquad -1,$$
$$\tfrac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tfrac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$-\tfrac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\tfrac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

III. Die Auflösung der Gleichung $x^n = -1$. Für $r = 1$, $\theta = \pi$, $m = 1$ erhält man aus § 51 (11) als allgemeine Form der Wurzeln

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n};$$

bei geraden n hat demnach x folgende Werte:

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n} - i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

dagegen bei ungeraden n:

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n} - i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

§ 53. Die Exponentialgrößen mit komplexen Unabhängigen.

Nach Einl. V, 3. gilt die Grenzformel

$$e^x = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

bei beliebigen reellen Werten von x. Das veranlaßt uns, als Definition der Potenz e^{x+yi} die Gleichung

$$(1) \qquad e^{x+yi} = \lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{x+yi}{m}\right)^m$$

anzusetzen, und den hiermit geforderten Grenzübergang durchzuführen.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$1 + \frac{x + iy}{m} = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

woraus sich ergibt

$$(2)\quad r = \left[1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}\right]^{1/2}, \quad 1 + \frac{x}{m} = r\cos\theta, \quad \frac{y}{m} = r\sin\theta,$$

so daß $\cos\theta$ bei hinreichend großen Werten von m positiv ausfällt, also θ auf der Strecke $-\frac{1}{2}\pi \cdots + \frac{1}{2}\pi$ angenommen werden darf. Setzen wir daher weiter

$$\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{m}}{1 + \frac{x}{m}} = \vartheta,$$

was nach Einl. IV, 5. immer einen Wert der bezeichneten Strecke bedeutet, so kann $\theta = \vartheta$ genommen werden, und man kann setzen

$$1 + \frac{x + iy}{m} = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

also der Gleichung (1) zufolge

$$(3)\qquad e^{x+iy} = \lim r^m(\cos m\vartheta + i\sin m\vartheta).$$

Hierin ist nach (2)

$$r^m = \left(1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}\right)^{1/2\,m},$$

und wenn

$$\frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2} = \frac{1}{\mu}$$

gesetzt wird, erhält man

$$m\lg r = \mu\lg\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(x + \frac{x^2 + y^2}{2m}\right).$$

Bei unendlich wachsendem m konvergiert $1/\mu$ gegen Null; nach Einl. III, 2. wird dann ferner

$$\lim \mu\lg\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = 1,$$

und die vorletzte Gleichung ergibt

$$\lim(m\lg r) = x, \quad \lim r^m = e^x.$$

Was ferner $m\vartheta$ anbelangt, so ist identisch

$$m\vartheta = \frac{\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta} \cdot m \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\cos\vartheta}{\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}} \cdot \frac{y}{1 + \frac{x}{m}}$$

bei unendlich wachsenden m konvergiert ϑ gegen die Null, $\frac{\sin\vartheta}{v}$ gegen die Einheit, folglich $m\vartheta$ gegen den Wert y. Nach diesen Bemerkungen erhält die Gleichung (3) die Form

$$(4) \qquad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Fast genau dieselben Schlüsse sind auf die etwas allgemeinere Exponentialgröße a^z anwendbar. Bei reellen z ist

$$a^z = e^{z \lg a} = \lim \left[\left(1 + \frac{z \lg a}{m}\right)^m\right],$$

und wenn man diese Gleichung als Definition für den Fall $z = x + iy$ beibehält, so findet man ohne Mühe

$$(5) \qquad a^{x+iy} = a^x [\cos(y \lg a) + i \sin(y \lg a)].$$

Um zu entscheiden, ob die Fundamentaleigenschaft der Exponentialgröße, nämlich die Gleichung $a^z . a^\zeta = a^{z+\zeta}$, auch bei komplexen z und ζ richtig bleibt, multiplizieren wir die Gleichung (5) mit

$$a^{\xi+i\eta} = a^\xi [\cos(\eta \lg a) + i \sin(\eta \lg a)]$$

und benutzen rechter Hand den Satz

$$r(\cos\theta + i \sin\theta) . r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) = r r_1 [\cos(\theta + \theta_1) + i \sin(\theta + \theta_1)];$$

das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} a^{x+iy} . a^{\xi+i\eta} &= a^{x+\xi} \{\cos[(y+\eta)\lg a] + i \sin[(y+\eta)\lg a]\} \\ &= a^{(x+\xi)+i(y+\eta)}, \end{aligned}$$

und es erhellt hieraus, daß jene Eigenschaft in der Tat für komplexe Exponenten gilt. Alle übrigen Eigenschaften der Exponentialgröße, wie z. B. $(a^z)^k = a^{kz}$, sind Folgerungen der erwähnten Eigenschaft und bleiben daher gleichfalls ungestört.

Eine brauchbare Anwendung der obigen Theoreme ist folgende. In Formel (4) setzen wir $x = 0$, das eine Mal $y = u$, das andere Mal $y = -u$, und haben dann

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u, \quad e^{-iu} = \cos u - i \sin u,$$

mithin durch Addition und Subtraktion

$$(6) \qquad 2\cos u = e^{iu} + e^{-iu}, \quad 2i \sin u = e^{iu} - e^{-iu}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, wenn man beiderseits auf die m^{te} Potenz erhebt und rechter Hand den binomischen Satz für ganze positive m anwendet,

$$(7) \qquad 2^m \cos^m u = \binom{m}{0} e^{imu} + \binom{m}{1} e^{i(m-2)u} + \binom{m}{2} e^{i(m-4)u} + \cdots,$$

$$(8) \qquad 2^m i^m \sin^m u = \binom{m}{0} e^{imu} - \binom{m}{1} e^{i(m-2)u} + \binom{m}{2} e^{i(m-4)u} - \cdots.$$

Hier kann man jede Exponentialgröße wieder in Kosinus und Sinus umsetzen und nachher die reellen und imaginären Teile auf beiden Seiten vergleichen. Aus der Formel (7) erhält man so

$$2^m \cos^m u$$
$$= \binom{m}{0} \cos m u + \binom{m}{1} \cos (m-2) u + \binom{m}{2} \cos (m-4) u + \cdots$$

Nicht überflüssig ist es, die Fälle eines geraden und eines ungeraden m zu unterscheiden. Bei geraden m gibt es einen mittelsten Binomialkoeffizienten $\binom{m}{\frac{1}{2} m}$ und jeder andere Koeffizient kommt zweimal vor; daher lassen sich die mit gleichen Koeffizienten versehenen Summanden vereinigen, was nach beiderseitiger Division mit 2 zu folgender Gleichung führt:

$$(9) \qquad 2^{m-1} \cos^m u$$
$$= \binom{m}{0} \cos m u + \binom{m}{1} \cos (m-2) u + \binom{m}{2} \cos (m-4) u + \cdots$$
$$\cdots + \binom{m}{\frac{1}{2} m - 1} \cos 2 u + \tfrac{1}{2} \binom{m}{\frac{1}{2} m}.$$

Dagegen ergibt sich für ungerade m:

$$(10) \qquad 2^{m-1} \cos^m u$$
$$= \binom{m}{0} \cos m u + \binom{m}{1} \cos (m-2) u + \binom{m}{2} \cos (m-4) u + \cdots$$
$$\cdots + \binom{m}{\frac{1}{2}(m-3)} \cos 3 u + \binom{m}{\frac{1}{2}(m-1)} \cos u.$$

Die Gleichung (8) gestattet eine ganz ähnliche Behandlung, und zwar findet man bei geraden m:

$$(11) \qquad (-1)^{1/2\, m}\, 2^{m-1} \sin^m u$$
$$= \binom{m}{0} \cos m u - \binom{m}{1} \cos (m-2) u + \binom{m}{2} \cos (m-4) u - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{1/2\, m - 1} \binom{m}{\frac{1}{2} m - 1} \cos 2 u + (-1)^{1/2\, m}\, \tfrac{1}{2} \binom{m}{\frac{1}{2} m},$$

dagegen bei ungeraden m:

$$(12)\quad (-1)^{1/2(m-1)}\, 2^{m-1} \sin^m u = \binom{m}{0} \sin m u - \binom{m}{1} \sin(m-2) u$$
$$+ \binom{m}{2} \sin(m-4) u - \cdots + (-1)^{1/2(m-3)} \binom{m}{\frac{1}{2}(m-3)} \sin 3u$$
$$+ (-1)^{1/2(m-1)} \binom{m}{\frac{1}{2}(m-1)} \sin u.$$

Die hier entwickelten vier Gleichungen bilden gewissermaßen die Umkehrungen der beiden Gleichungen (1) und (2) in § 52.

§ 54. Die Logarithmen komplexer Zahlen.

Unter dem allgemeinen Logarithmus einer Zahl ζ verstehen wir jede reelle oder komplexe Größe z, welcher die Eigenschaft $e^z = \zeta$ zukommt. Bezeichnen wir diesen allgemeinen Logarithmus von ζ mit $\operatorname{Lg} \zeta$ und setzen

$$(1)\quad \operatorname{Lg}(\xi + i\eta) = x + iy,$$

wo x und y vorläufig noch unbekannt sind, so muß umgekehrt

$$e^{x+iy} = \xi + i\eta$$

oder

$$e^x (\cos y + i \sin y) = \xi + i\eta$$

sein. Die beiden hieraus folgenden Gleichungen

$$(2)\quad e^x \cos y = \xi, \quad e^x \sin y = \eta$$

liefern erstens

$$(3)\quad e^x = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad x = \tfrac{1}{2} \lg(\xi^2 + \eta^2),$$

und zwar nehmen wir das Wurzelzeichen im absoluten Sinne, weil e^x bei reellen x nicht negativ sein kann. Die Gleichungen (2) werden durch Substitution des Betrages von e^x zu den folgenden

$$(4)\quad \cos y = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \qquad \sin y = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

$$(5)\quad \operatorname{tg} y = \frac{\eta}{\xi}, \qquad y = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} \pm m\pi,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die sich etwas näher bestimmen läßt, wenn man die Fälle eines positiven und eines negativen ξ unterscheidet. Da nämlich der Winkel $\alpha = \operatorname{arctg}(\eta/\xi)$ nach Definition der Funktion arctg der Strecke $-\frac{1}{2}\pi \cdots + \frac{1}{2}\pi$ angehört, kann $\cos \alpha$ nicht negativ sein, und es folgt

$$\cos y = \cos(\alpha \pm m\pi) = (-1)^m \cos \alpha;$$

da nun ξ und $\cos y$ dasselbe Vorzeichen haben, muß m gerade oder ungerade sein, je nachdem ξ positiv oder negativ ist. Bezeichnet also k irgend eine positive Zahl, so haben wir vermöge der Werte von x und y folgende Formeln: für ein positives ξ:

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{Lg}(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\lg(\xi^2 + \eta^2) + i\left[\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} \pm 2k\pi\right],$$

dagegen für ein negatives ξ:

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{Lg}(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\lg(\xi^2 + \eta^2) + i\left[\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} \pm (2k+1)\pi\right].$$

In dem sehr einfachen Falle $\xi = \pm 1$ und $\eta = 0$ erhält man hieraus

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{Lg}(+1) = \pm 2k\pi i, \quad \operatorname{Lg}(-1) = \pm(2k+1)\pi i,$$

mithin kann bei positiven ξ

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{Lg}(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\lg(\xi^2 + \eta^2) + i\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} + \operatorname{Lg}(+1),$$

und bei negativen

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{Lg}(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\lg(\xi^2 + \eta^2) + i\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} + \operatorname{Lg}(-1)$$

gesetzt werden. Die unendliche Vieldeutigkeit der Logarithmen wird übrigens nicht überraschen, wenn man sich erinnert, daß

$$\lg\zeta = \lim\left[n(\sqrt[n]{\zeta} - 1)\right] \qquad (\text{für } n = \infty)$$

ist und daß $\sqrt[n]{\zeta}$, den Untersuchungen des § 52 zufolge, n verschiedene Werte besitzt.

Aus der Gleichung

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

ergibt sich bekanntlich die Haupteigenschaft der Logarithmen

$$\operatorname{Lg}(\zeta_1 \zeta_2) = \operatorname{Lg}\zeta_1 + \operatorname{Lg}\zeta_2;$$

jene Relation besteht, wie in § 53 gezeigt wurde, auch bei komplexen z_1 und z_2, mithin gilt die letztere Eigenschaft gleichfalls bei komplexen ζ_1 und ζ_2. Eine Anwendung des Satzes besteht darin, daß man die Werte von $\operatorname{Lg}(\xi + i\eta)$ und $\operatorname{Lg}(\xi - i\eta)$ nach Formel (6) oder nach Formel (7) entwickelt und die beiden erhaltenen Gleichungen voneinander abzieht; man findet so

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{Lg}\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right) = 2i\left\{\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} \pm h\pi\right\},$$

wo h eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

§ 55. Die goniometrischen und cyklometrischen Funktionen mit komplexen Variablen.

I. Die in § 53 (6) entwickelten Gleichungen

$$\cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}, \quad \sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

wollen wir als die allgemeinen analytischen Definitionen von $\cos u$ und $\sin u$ beibehalten; es ist dann

$$\cos(iv) = \frac{e^{-v} + e^{+v}}{2} = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2} = \mathfrak{Cof}\, v,$$

$$\sin(iv) = \frac{e^{-v} - e^{+v}}{2i} = i\,\frac{e^{v} - e^{-v}}{2} = i\,\mathfrak{Sin}\, v,$$

und überhaupt bei komplexen $u = x + i$;

$$\cos(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{+y-ix}}{2},$$

$$\sin(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{+y-ix}}{2i}$$

oder, wenn man e^{+ix} sowie e^{-ix} durch $\cos x$ und $\sin x$ ausdrückt,

$$(1) \qquad \cos(x + iy) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\cos x - \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\sin x,$$

$$(2) \qquad \sin(x + iy) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x + i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x.$$

Vermöge der Werte von $\cos(iy)$ und $\sin(iy)$ kann man dafür schreiben

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy),$$
$$\sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy),$$

woraus hervorgeht, daß die bekannten Formeln für $\cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$ auch bei imaginären β richtig bleiben. Die Gleichungen (1) und (2) liefern ferner

$$\cos^2(x + iy) + \sin^2(x + iy)$$
$$= \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)^2 = \mathfrak{Cof}^2 y - \mathfrak{Sin}^2 y = 1;$$

die Relation $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ besteht daher auch bei komplexen z.

Für die übrigen goniometrischen Funktionen behalten wir die gewöhnlichen Definitionen

$$\sec z = \frac{}{\cos z} \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ usw.}$$

ungeändert bei. Hiernach ist z. B.

$$\operatorname{tg}(x + i\,y) = \frac{(e^y + e^{-y}) \sin x + i\,(e^y - e^{-y}) \cos x}{(e^y + e^{-y}) \cos x - i\,(e^y - e^{-y}) \sin x},$$

oder, wenn man den Nenner durch Multiplikation mit

$$(e^y + e^{-y}) \cos x + i\,(e^y - e^{-y}) \sin x$$

reell macht,

$$\operatorname{tg}(x + i\,y) = \frac{2 \sin 2\,x + i\,(e^{2\,y} - e^{-2\,y})}{e^{2\,y} + 2 \cos 2\,x + e^{-2\,y}}. \tag{3}$$

Auf gleiche Weise lassen sich alle übrigen goniometrischen Funktionen des komplexen Bogens $x + i\,y$ auf die Form $\varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$ bringen.

Die in § 20 eingeführten hyperbolischen Funktionen

$$\mathfrak{Cof}\, y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\, y = \frac{e^y - e^{-}}{2}$$

erfüllen die Gleichungen

$$\mathfrak{Cof}^2 y - \mathfrak{Sin}^2 y = 1, \quad \mathfrak{Sin}\, 2\,y = 2\,\mathfrak{Sin}\, y\, \mathfrak{Cof}\, y,$$

welche gewissen goniometrischen Formeln analog sind, und ergeben

$$\cos(x + i\,y) = \cos x\, \mathfrak{Cof}\, y - i \sin x\, \mathfrak{Sin}\, y,$$

$$\sin(x + i\,y) = \sin x\, \mathfrak{Cof}\, y + i \cos x\, \mathfrak{Sin}\, y,$$

$$\operatorname{tg}(x + i\,y) = \frac{\sin 2\,x + i\,\mathfrak{Sin}\, 2\,y}{\cos 2\,x + \mathfrak{Cof}\, 2\,y},$$

$$\cot(x + i\,y) = -\frac{\sin 2\,x - i\,\mathfrak{Sin}\, 2\,y}{\cos 2\,x - \mathfrak{Cof}\, 2\,y}$$

II. a) Unter dem Symbole $\operatorname{Arcsin} \xi$ verstehen wir im folgenden jede reelle oder komplexe Größe z, welcher die Eigenschaft $\sin z = \xi$ zukommt. Hiernach gilt für ein reelles ξ, dessen absoluter Wert die Einheit nicht übersteigt, die Formel

$$\operatorname{Arcsin} \xi = m\,\pi \pm \arcsin \xi, \quad (\xi^2 \leqq 1); \tag{4}$$

dabei ist m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, und es entspricht das obere Vorzeichen einem geraden, das untere einem ungeraden m; die Formel liefert alle reellen Werte von $\operatorname{Arcsin} \xi$.

Setzt man allgemeiner

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Arcsin}(\xi + i\eta) = x + iy,$$

wo x und y vorläufig unbekannt sind, so folgt umgekehrt

$$\sin(x + iy) = \xi + i\eta,$$

das ist nach (2)

$$\mathfrak{Cof}\, y \sin x + i\, \mathfrak{Sin}\, y \cos x = \xi + i\eta,$$

und die Vorzeichen von y und η können offenbar gleichzeitig umgekehrt werden. Man darf daher, wenn man den Wert $\operatorname{Arcsin}(\xi + \eta i)$ bestimmen will, η positiv voraussetzen. Zur Bestimmung von x und y führen nun die Gleichungen

$$\text{(6)} \qquad \mathfrak{Cof}\, y \sin x = \xi, \quad \mathfrak{Sin}\, y \cos x = \eta,$$

die sich folgendermaßen auflösen lassen.

Man findet zunächst, indem man die Gleichungen

$$\mathfrak{Cof}^2 y - \mathfrak{Sin}^2 y = 1, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

berücksichtigt,

$$\mathfrak{Cof}^2 y + \sin^2 x = 1 + \xi^2 + \eta^2;$$

addiert und subtrahiert man die verdoppelte erste Gleichung (6), so folgt, da links vollständige Quadrate erscheinen,

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{Cof}\, y + \sin x &= \sqrt{(1+\xi)^2 + \eta^2}, \\ \mathfrak{Cof}\, y - \sin x &= \sqrt{(1-\xi)^2 + \eta^2}, \end{aligned}$$

und die Quadratwurzeln sind richtig positiv, da $\mathfrak{Cof}\, y \geqq 1$, $\sin x \leqq 1$. Nun ist

$$\sqrt{(1+\xi)^2 + \eta^2} = |\xi + \eta i + 1|, \quad \sqrt{(1-\xi)^2 + \eta^2} = |1 - \xi - \eta i|,$$
$$(1 + \xi + \eta i) + (1 - \xi - \eta i) = 2;$$

die Ungleichungen § 51 (7), (8) oder Einl. I, 3. ergeben also, indem wir

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} \sigma &= \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1+\xi)^2 + \eta^2} + \sqrt{(1-\xi)^2 + \eta^2}\right] \\ \tau &= \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1+\xi)^2 + \eta^2} - \sqrt{(1-\xi)^2 + \eta^2}\right] \end{aligned}$$

setzen,

$$2\sigma \geqq 2, \quad |2\tau| \leqq 2, \quad \sigma \geqq 1, \quad |\tau| \leqq 1.$$

Es ist daher möglich, den Gleichungen (7) gemäß reelle Werte y und x so zu bestimmen, daß

$$\sin x = \tau, \quad \mathfrak{Cof}\, y = \sigma, \quad e^{2y} - 2\sigma e^y + 1 = 0,$$

und man findet als allgemeinste Lösungen dieser Aufgabe

$$\text{(9)} \qquad x = m\pi + (-1)^m \arcsin \tau, \quad e^y = \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 1},$$

oder, da

$$\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1} = \frac{1}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}$$

ist,

$$y = \pm \lg(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}),$$

wobei die Größe lg offenbar reell ist.

Das Vorzeichen von y ist aber durch die zweite Gleichung (6) bestimmt; da $\mathfrak{Sin}\, y$ und y dasselbe Vorzeichen haben, muß y das Vorzeichen, wenn $\eta > 0$ ist, mit $\cos x$ gemein haben, wobei x durch die erste Gleichung (9) bestimmt ist. Man hat nach dieser zu setzen:

$$\cos x = \cos(m\pi + (-1)^m \arcsin \tau) = (-1)^m \cos(\arcsin \tau);$$

da nun $\arcsin \tau$ zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ liegt, also einen positiven Wert der Größe $\cos(\arcsin \tau)$ ergibt, so hat $\cos x$ das Vorzeichen von $(-1)^m$, und man muß, wenn η positiv ist,

$$y = (-1)^m \lg(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})$$

setzen; ist η negativ, ist y diesem Werte entgegengesetzt zu nehmen. Alle so erhaltenen Wertepaare (x, y) erfüllen die Gleichungen (6); das bedeutet, wenn $\eta \geqq 0$, die Formel

$$(10) \quad \operatorname{Arcsin}(\xi + \eta i) = m\pi + (-1)^m \{\arcsin \tau + i \lg(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})\},$$

wenn $\eta \leqq 0$, erhält man ebenso

$$(11) \quad \operatorname{Arcsin}(\xi + \eta i) = m\pi + (-1)^m \{\arcsin \tau - i \lg(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})\};$$

m ist beidemal eine beliebige positive oder negative Zahl.

Versteht man unter $\arcsin(\xi + \eta i)$ den Sonderwert von $\operatorname{Arcsin}(\xi + \eta i)$, den der Wert $m = 0$ liefert, so ist je nach dem Vorzeichen von η

$$(12) \qquad \arcsin(\xi + \eta i) = \arcsin \tau \pm i \lg(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1});$$

die Beziehung

$$\operatorname{Arcsin} \zeta = m\pi + (-1)^m \arcsin \zeta$$

gilt also auch bei komplexen Werten von ζ.

Als Sonderfälle sind folgende der Erwähnung wert.

Für $\eta = 0$ und $\xi^2 < 1$ liefert die Formel (8)

$$\sigma = \frac{1 + \xi + (1 - \xi)}{2} = 1, \quad \tau = \frac{1 + \xi - (1 - \xi)}{2} = \xi,$$

mithin wird die Formel (12) zur Identität $\arcsin \xi = \arcsin \xi$. Dagegen ist für $\eta = 0$ und $\xi^2 > 1$

$$\sigma = \frac{\xi + 1 + (\xi - 1)}{2} = \xi, \quad \tau = \frac{\xi + 1 - (\xi - 1)}{2} = 1,$$

mithin

(13) $$\arcsin \xi = \tfrac{1}{2}\pi + i \lg (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad \xi^2 > 1;$$

dieses Resultat wird nicht überraschen, wenn man beachtet, daß einem die Einheit übersteigenden Sinus kein reeller Bogen entsprechen kann.

Für $\xi = 0$, $\eta > 0$ ergibt sich

(14) $$\arcsin (i\eta) = i \lg (\sqrt{1 + \eta^2} + \eta).$$

b) Bei reellen, das Intervall -1 bis $+1$ nicht überschreitenden ξ bedeute Arccos ξ irgend einen Bogen, welcher ξ zum Kosinus hat, dagegen arccos ξ den kleinsten (d. h. den zwischen 0 und π fallenden) jener Bogen; es ist dann

(15) $$\operatorname{Arccos} \xi = 2m\pi \pm \arccos \xi, \quad (\xi^2 \lesseqgtr 1),$$

wobei m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet und ebensowohl das obere als das untere Vorzeichen von $\arccos \xi$ gilt.

Es sei nun allgemeiner

(16) $$\operatorname{Arccos} (\xi + i\eta) = x + iy,$$

so folgt umgekehrt

$$\cos (x + iy) = \xi + i\eta,$$

das ist nach Formel (2) und durch Vergleichung der reellen und imaginären Teile

(17) $$\operatorname{Cos} y \cos x = \xi, \quad \operatorname{Sin} \sin x = -\eta.$$

Mittels einer ähnlichen Rechnung wie im vorigen Abschnitte findet man hieraus

$$\operatorname{Cos} y + \cos x = \sqrt{(1 + \xi)^2 + \eta^2},$$
$$\operatorname{Cos} y - \cos x = \sqrt{(1 - \xi)^2 + \eta^2},$$
$$\cos x = \tau, \quad \operatorname{Cos} y = \sigma,$$

und da $\sigma \geqq 1$, $|\tau| \leqq 1$, ist es auch hier möglich, reelle Werte von x und y zu finden. Der allgemeinste Wert von x ist

(18) $$x = 2m\pi \pm \arccos \xi;$$

für y ergibt sich wie oben

$$y = \pm \lg (\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}),$$

und die zweite Gleichung (17) zeigt, daß bei positiven Werten η die Vorzeichen von $\sin x$ und y entgegengesetzt sein müssen.

Nun ist nach (18)

$$\sin x = \sin (\pm \arccos \tau) = \pm \sin (\arccos \tau)$$

und $\arccos \tau$ liegt auf der Strecke $0 \cdots \frac{1}{2}\pi$; das Vorzeichen von y ist also entgegengesetzt dem in der Gleichung (18) geltenden Vorzeichen; das bedeutet für $\eta \geqq 0$

$$\text{Arccos}\,(\xi + \eta\, i) = 2\, m\, \pi \pm [\arccos \tau - i \lg (\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})];$$

im Falle $\eta \leqq 0$ hat man die Formel

$$\text{Arccos}\,(\xi + \eta\, i) = 2\, m\, \pi \pm [\arccos \tau + i \lg (\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})].$$

Definiert man ferner $\arccos (\xi + \eta\, i)$ für $\eta \geqq 0$ durch die Gleichung

$$\arccos (\xi + \eta\, i) = \arccos \tau - i \lg (\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}), \tag{19}$$

so ist klar, daß die Gleichung

$$\text{Arccos}\, \zeta = 2\, m\, \pi \pm \arccos \zeta$$

auch für komplexe Werte von ζ gilt. Die Summe der Gleichungen (12) und (19) ergibt in beiden Fällen $\eta \geqq 0$ und $\eta \leqq 0$

$$\arccos \zeta + \arcsin \zeta = \tfrac{1}{2}\pi$$

auch im Falle komplexer Werte ζ.

c) Dem bisherigen analog bezeichne $\text{Arctg}\, \xi$ irgend einen Bogen, dessen Tangente die reelle Zahl ξ ist, es besteht dann die Relation

$$\text{Arctg}\, \xi = m\, \pi + \text{arctg}\, \xi, \tag{20}$$

worin m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Setzt man allgemeiner

$$\text{Arctg}\, (\xi + i\, \eta) = x + i\, y, \tag{21}$$

so ist umgekehrt mit Beachtung der Formel (3)

$$\xi + i\, \eta = \text{tg}\, (x + i\, y) = \frac{\sin 2\, x + i \cdot \frac{1}{2} (e^{2\, y} - e^{-2\, y})}{\cos 2\, x + \frac{1}{2} (e^{2\, y} + e^{-2\, y})}$$

oder wenn man für den Augenblick die Abkürzungen

$$\mathfrak{Cof}\, 2\, y = \tfrac{1}{2} (e^{2\, y} + e^{-2\, y}) = u, \quad \mathfrak{Sin}\, 2\, y = \tfrac{1}{2} (e^{2\, y} - e^{-2\, y}) = v$$

einführt und beiderseits die reellen sowie die imaginären Teile vergleicht,

$$\frac{\sin 2\, x}{\cos 2\, x + u} = \xi, \quad \frac{v}{\cos 2\, x + u} = \eta. \tag{22}$$

Subtrahiert man die Quadratsumme dieser Gleichungen von der Einheit und dividiert den Rest durch 2, so erhält man wegen $1 - \sin^2 2\, x = \cos^2 2\, x$

$$\frac{\cos 2\, x}{\cos 2\, x + u} = \frac{1 - (\xi^2 + \eta^2)}{2}; \tag{23}$$

der Quotient aus der ersten Gleichung (22) und der vorstehenden liefert

$$(24) \qquad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)},$$

und daraus folgt, daß alle möglichen Werte von x in der Form

$$(25) \qquad x = \tfrac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)} = \tfrac{1}{2}\left[m\pi + \operatorname{arctg} \frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)}\right]$$

enthalten sind, in der m eine ganze Zahl bedeutet. Diese wird aber eingeschränkt durch die Gleichung (23), nach der, da $u > 1$ und der Nenner der linken Seite nicht negativ sein kann, folgt, daß die Größen $\cos 2x$ und $1-(\xi^2+\eta^2)$, wenn sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen haben müssen. Nun ist nach (25)

$$\cos 2x = \cos(m\pi + \operatorname{arctg}\ldots) = (-1)^m \cos(\operatorname{arctg}\ldots)$$

und die Größe arctg liegt ihrer Definition nach auf der Strecke $-\frac{1}{2}\pi \cdots + \frac{1}{2}\pi$, hat also einen positiven Kosinus; somit folgt

$$(-1)^m [1-(\xi^2+\eta^2)] > 0,$$

d. h. m ist gerade, etwa $= 2n$, wenn $1-(\xi^2+\eta^2) > 0$, ungerade, etwa $= 2n+1$, wenn $1-(\xi^2+\eta^2) < 0$.

Addiert man ferner die Quadratsumme der Gleichungen (22) zur Einheit und dividiert die Summe durch 2, so erhält man wegen $1+v^2 = u^2$ die Gleichung

$$\frac{u}{\cos 2x + u} = \frac{1+\xi^2+\eta^2}{2}.$$

In Verbindung mit der zweiten Gleichung (22) gibt dies weiter

$$(26) \qquad \begin{aligned} \frac{u+v}{\cos 2x + u} &= \frac{1+\xi^2+\eta^2}{2} + \eta, \\ \frac{u-v}{\cos 2x + u} &= \frac{1+\xi^2+\eta^2}{2} - \eta, \end{aligned}$$

ferner durch Division

$$(27) \qquad \frac{u+v}{u-v} = \frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}.$$

Zufolge der Bedeutungen von u und v ist die linke Seite dieser Gleichung einerlei mit e^{4y}, daher

$$y = \tfrac{1}{4} \lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right].$$

Die so bestimmten Werte von x und y erfüllen nun wirklich die beiden Gleichungen (22) und damit in allgemeinster Weise die Gleichung (21). Denn zunächst folgt aus der Gleichung (27), daß man eine reelle Größe w finden kann, die für $\cos 2x$ gesetzt die Gleichungen (26) erfüllt. Daraus ergeben sich durch Addition und Subtraktion die Gleichungen

$$(28) \qquad \frac{v}{w+u} = \eta, \quad \frac{2w}{w+u} = 1 - \xi^2 - \eta^2.$$

Hieraus folgt, indem man die erste Gleichung quadriert und zur zweiten addiert, da $u^2 - v^2 = 1$ ist,

$$2w(w+u) = (w+u)^2 - v^2 - \xi^2(w+u^2),$$

$$0 = 1 - w^2 - \xi^2(w+u)^2, \quad \xi = \frac{\varepsilon\sqrt{1-w^2}}{w+u},$$

wobei $\varepsilon^2 = +1$. Diese Gleichung ergibt, daß $1 - w^2$ positiv ist; verbunden mit der zweiten Gleichung (28) gibt sie ferner

$$\frac{\varepsilon\sqrt{1-w^2}}{w} = \frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)}.$$

Verstehen wir nun unter $2x$ den bis auf vielfache von 2π bestimmten Winkel, der die Gleichungen

$$\cos 2x = w, \quad \sin 2x = \varepsilon\sqrt{1-w^2}, \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{\varepsilon\sqrt{1-w^2}}{w}$$

erfüllt, so gelten für ihn beide Gleichungen (22) sowie die Gleichungen (23) und (24); x ist also mit dem vorhin ebenso bezeichneten Winkel identisch, und dieser erfüllt die Forderungen (22), wie behauptet.

Erinnern wir uns nun der Fallunterscheidung, die wir hinsichtlich der Zahl m nötig gefunden haben, so ist klar, daß folgende Formeln erwiesen sind:

$$(29) \quad \operatorname{Arctg}(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)} + \tfrac{1}{4} i \lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right], \quad \xi^2+\eta^2 < 1,$$

$$(30) \quad \operatorname{Arctg}(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2-1}\right) + \tfrac{1}{4} i \lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right], \quad \xi^2+\eta^2 > 1.$$

In dem Sonderfalle $n = 0$ schreiben wir arctg statt Arctg und haben

$$\text{(31)} \qquad \operatorname{arctg}(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)} + \tfrac{1}{4} i \lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right], \quad \xi^2+\eta^2<1,$$

$$\text{(32)} \qquad \operatorname{arctg}(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2-1}\right) + \tfrac{1}{4} i \lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right], \quad \xi^2+\eta^2>1;$$

der Vergleich mit den vorhergehenden Formeln zeigt, daß die Relation

$$\operatorname{Arctg}\zeta = n\pi + \operatorname{arctg}\zeta$$

auch bei komplexen ζ richtig bleibt.

Für $\xi = 0$ ergeben sich die besonderen Formeln

$$\text{(33)} \qquad \operatorname{arctg}(i\eta) = \tfrac{1}{2} i \lg\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right), \qquad \eta^2 < 1,$$

$$\operatorname{arctg}(i\eta) = \tfrac{1}{2}\left[\pi + i\lg\left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\right)\right], \quad \eta^2 > 1.$$

Um endlich auch den Fall $\xi^2 + \eta^2 = 1$ zu erledigen, setzen wir allgemein $\sqrt{\xi^2+\eta^2} = \varrho$, und vollziehen in den Formeln (29) und (30) die Grenzübergänge $\lim \varrho = 1 - 0$ und $\lim \varrho = 1 + 0$; ist $\xi > 0$, so finden wir, da $\operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{1}{2}\pi$ ist, übereinstimmend

$$\operatorname{Arctg}(\xi + \eta i) = (n + \tfrac{1}{4})\pi + \tfrac{i}{4}\lg\frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad |\xi + \eta i| = 1,$$

im Falle $\xi < 0$ ergibt sich, da $\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{1}{2}\pi$ ist,

$$\operatorname{Arctg}(\xi + \eta i) = (n - \tfrac{1}{4})\pi + \tfrac{i}{4}\lg\frac{1+\eta}{1-\eta}.$$

Man bestätigt diese Formeln, z. B. die vorletzte, indem man

$$(n + \tfrac{1}{4})\pi + \tfrac{i}{4}\lg\frac{1+\eta}{1-\eta} = u, \quad \operatorname{tg} u = -i\cdot\frac{e^{ui}-e^{-ui}}{e^{ui}+e^{-ui}}$$

setzt; man findet

$$i \operatorname{tg} u = \frac{(1+i)\sqrt[4]{\dfrac{1-\eta}{1+\eta}} - (1-i)\sqrt[4]{\dfrac{1+\eta}{1-\eta}}}{(1+i)\sqrt[4]{\dfrac{1-\eta}{1+\eta}} + (1-i)\sqrt[4]{\dfrac{1+\eta}{1-\eta}}}$$

$$= \frac{(1+i)\sqrt{1-\eta} - (1-i)\sqrt{1+\eta}}{(1+i)\sqrt{1-\eta} + (1-i)\sqrt{1+\eta}},$$

also, da $\xi = \sqrt{1 - \eta^2}$ positiv ist,

$$i \operatorname{tg} u = \frac{(1+i)\xi - (1-i)(1+\eta)}{(1+i)\xi + (1-i)(1+\eta)} = -\eta + i\xi,$$

worin die zu bestätigende Gleichung vorliegt.

§ 56. Differentiation komplexer Ausdrücke.

Den vorigen Untersuchungen zufolge kann eine Funktion, welche außer der Unabhängigen z noch die imaginäre Einheit i enthält, auf die Normalform

$$(1) \qquad f(z, i) = \varphi(z) + i\psi(z)$$

gebracht werden; dann läßt sich aber auch eine bündige Erklärung über den Differentialquotienten von $f(z, i)$ geben. Unter $f'(z, i)$ versteht man nämlich den Ausdruck $\varphi'(z) + i\psi'(z)$, und es ist daher

$$(2) \qquad \frac{df(z, i)}{dz} = \frac{d\varphi(z)}{dz} + i\frac{d\psi(z)}{dz}.$$

Dieser Definition folgend, wollen wir die Differentialquotienten der einfachen Funktionen komplexer Unabhängiger aufsuchen.

Die Potenz. Setzen wir nach § 51

$$(x + iy)^\mu = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^\mu = r^\mu \cos\mu\theta + ir^\mu \sin\mu\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

so erhalten wir durch Differentiation in Beziehung auf x

$$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial x} = -\mu r^\mu \sin\mu\theta \frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu r^{\mu-1}\cos\mu\theta \frac{\partial r}{\partial x}$$
$$+ i\left[\mu r^\mu \cos\mu\theta \frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu r^{\mu-1}\sin\mu\theta \frac{\partial r}{\partial x}\right];$$

es ist aber

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = +\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\cos\theta,$$

mithin nach Einsetzung dieser Werte und gehöriger Zusammenziehung

$$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial x} = \mu r^{\mu-1}\cos(\mu-1)\theta + i\mu r^{\mu-1}\sin(\mu-1)\theta$$
$$= \mu r^{\mu-1}[\cos(\mu-1)\theta + i\sin(\mu-1)\theta],$$

d. h.

$$\frac{\partial\,[(x+iy)^\mu]}{\partial x} = \mu\,(x+iy)^{\mu-1}. \tag{3}$$

Durch eine gleich einfache Rechnung findet man

$$\frac{\partial\,[(x+iy)^\mu]}{\partial y} = i\mu\,(x+iy)^{\mu-1}, \tag{4}$$

und nun folgt aus den Formeln (3) und (4), daß die Differentiation einer Potenz mit komplexer Basis ebenso auszuführen ist, als wenn i ein reeller Koeffizient wäre.

Die Exponentialgröße. Durch Differentiation der Gleichung

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

erhält man augenblicklich

$$\frac{\partial\, e^{x+iy}}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^{x+iy}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\, e^{x+iy}}{\partial y} = -\, e^x \sin y + i e^x \cos y = i e^{x+iy}; \tag{6}$$

wie man sieht, bleibt auch hier die Differentiationsregel ungestört.

Der Logarithmus. Die Formeln (6) und (7) in § 54 können in die folgende zusammengezogen werden

$$\operatorname{Lg}(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\lg(\xi^2+\eta^2) + i\left(\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} + c\right),$$

wo c eine von ξ und η unabhängige Größe bezeichnet; daher ist

$$\frac{\partial \operatorname{Lg}(\xi+i\eta)}{\partial \xi} = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - i\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2+\eta^2} = \frac{1}{\xi+i\eta}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \operatorname{Lg}(\xi+i\eta)}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} + i\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} = i\frac{\xi - i\eta}{\xi^2+\eta^2} = i\frac{1}{\xi+i\eta}. \tag{8}$$

Auch hier geschieht die Differentiation ebenso, als wenn i reell wäre.

Die trigonometrischen Funktionen. Aus der Gleichung

$$\sin(x+iy) = \mathfrak{Cos}\, y \sin x + i\, \mathfrak{Sin}\, y \cos x$$

erhält man

$$(9)\qquad \frac{\partial \sin(x+iy)}{\partial x} = \mathfrak{Cof}\, y \cos x - i\, \mathfrak{Sin}\, y \sin x$$
$$= \cos(x+iy),$$

$$(10)\qquad \frac{\partial \sin(x+iy)}{\partial y} = \mathfrak{Sin}\, y \sin x + i\, \mathfrak{Cof}\, y \cos x$$
$$= i \cos(x+iy).$$

Für die übrigen trigonometrischen Funktionen ist ebenso leicht nachzuweisen, daß die gewöhnlichen Differentiationsregeln ungeändert bleiben.

Die cyklometrischen Funktionen. Setzen wir, wie in § 55 (5)

$$\operatorname{Arcsin}(\xi + i\eta) = x + iy,$$

wobei zwischen x und y die Gleichungen

$$\mathfrak{Cof}\, y \sin x = \xi, \qquad \mathfrak{Sin}\, y \cos x = \eta$$

stattfinden, so haben wir durch Differentiation in Beziehung auf ξ folgende drei Gleichungen

$$(11)\qquad \frac{\partial \operatorname{Arcsin}(\xi + i\eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$\mathfrak{Cof}\, y \cos x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \mathfrak{Sin}\, y \sin x \frac{\partial y}{\partial \xi} = 1,$$

$$-\mathfrak{Sin}\, y \sin x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \mathfrak{Cof}\, y \cos x \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\mathfrak{Cof}\, y \cos x}{(\mathfrak{Cof}\, y \cos x)^2 + (\mathfrak{Sin}\, y \sin x)^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\mathfrak{Sin}\, y \sin x}{(\mathfrak{Cof}\, y \cos x)^2 + (\mathfrak{Sin}\, y \sin x)^2};$$

substituiert man diese Werte in die Gleichung (11) und berücksichtigt die Beziehung

$$\frac{p+iq}{p^2+q^2} = \frac{1}{p-iq},$$

so gelangt man zu der Formel

$$\frac{\partial \operatorname{Arcsin}(\xi + i\eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, y \cos x - i\, \mathfrak{Sin}\, y \sin x}$$
$$= \frac{1}{\cos(x+iy)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x+iy)}}$$

oder

$$(12)\qquad \frac{\partial \operatorname{Arcsin}(\xi + i\eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{1-(\xi+i\eta)^2}}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung findet sich

$$(13)\qquad \frac{\partial \operatorname{Arcsin}(\xi + i\eta)}{\partial \eta} = i\frac{1}{\sqrt{1-(\xi+i\eta)^2}};$$

es gilt daher die gewöhnliche Regel zur Differentiation des arcus sinus auch bei komplexen Variablen. Für die übrigen cyklometrischen Funktionen gestaltet sich die Sache ebenso.

Durch die Zulassung der Differentialquotienten komplexer Ausdrücke erreicht man häufig den Vorteil, verschiedene Differentialquotienten unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt zu bringen. So sind z. B. die Gleichungen

$$d\left[\tfrac{1}{2}\lg\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)\right] = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2x^2}\,dx,$$

$$d\operatorname{arctg}\frac{\beta x}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2x^2}\,dx$$

nicht wesentlich voneinander verschieden; setzt man nämlich in der ersten $i\beta$ für β, so wird

$$d\left[\tfrac{1}{2}\lg\left(\frac{\alpha+i\beta x}{\alpha-i\beta x}\right)\right] = i\,\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2x^2}\,dx,$$

das ist nach § 54 (11)

$$i\,d\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta x}{\alpha} \pm h\pi\right) = i\,\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2x^2}\,dx,$$

was mit der zweiten Gleichung übereinkommt.

Daß der Gebrauch komplexer Zahlen auch bei der Entwicklung höherer Differentialquotienten von wesentlichem Nutzen sein kann, mag folgendes Beispiel zeigen.

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\beta x - i\alpha} - \frac{1}{\beta x + i\alpha}\right)$$

erhält man durch m-malige Differentiation in Beziehung auf x

$$D^m\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = \frac{(-1)^m m!\,\beta^m}{2i}\left\{\frac{1}{(\beta x - i\alpha)^{m+1}} - \frac{1}{(\beta x + i\alpha)^{m+1}}\right\}$$

$$= \frac{(-1)^m m!\,\beta^m}{2i}\cdot\frac{(\beta x + i\alpha)^{m+1} - (\beta x - i\alpha)^{m+1}}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{m+1}}.$$

Um die imaginären Ausdrücke wieder wegzuschaffen, sei $\beta > 0$ und

$$\beta x \pm i\alpha = r(\cos\theta \pm i\sin\theta),$$

$$r = \sqrt{\beta^2 x^2 + \alpha^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta x};$$

es wird dann

$$(\beta x + i\alpha)^{m+1} - (\beta x - i\alpha)^{m+1}$$

$$= r^{m+1}[\cos(m+1)\theta + i\sin(m+1)\theta]$$

$$- r^{m+1}[\cos(m+1)\theta - i\sin(m+1)\theta]$$

$$= 2ir^{m+1}\sin(m+1)\theta = 2i(\alpha^2+\beta^2x^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}\sin\left[(m+1)\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta x}\right],$$

mithin

$$(14) \qquad D^m\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = (-1)^m m!\,\beta^m \frac{\sin\left[(m+1)\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta x}\right]}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}.$$

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{\beta x}{\alpha^2+\beta^2x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\beta x - i\alpha} + \frac{1}{\beta x + i\alpha}\right)$$

erhält man nach derselben Methode

$$(15) \qquad D^m\left(\frac{\beta x}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = (-1)^m m!\,\beta^m \frac{\cos\left[(m+1)\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta x}\right]}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}.$$

Setzt man in der Formel (14) $\alpha = \beta = 1$, $m = n-1$ und berücksichtigt, daß

$$D^{n-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = D^n \operatorname{arctg} x$$

ist, so kommt man auf dasselbe Ergebnis zurück, welches in § 13 (13) durch ein weit umständlicheres Verfahren gefunden wurde.

§ 57. Die binomische Reihe im Komplexen.

Auch die Taylorsche und Mac Laurinsche Formel lassen sich mit einer gewissen Abänderung auf komplexe Funktionen einer reellen Unabhängigen übertragen. Sei eine solche mit ihrer konjugierten

$$F(x) = f(x) + i\varphi(x), \quad \overline{F}(x) = f(x) - i\varphi(x),$$

$f(x)$ und $\varphi(x)$ reell, und werde die Mac Laurinsche Formel in folgender Form angesetzt:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n (1-\theta_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta_1 x),$$
$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \varphi'(0) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) + \frac{x^n (1-\theta_2)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(\theta_2 x);$$

dabei seien θ_1 und θ_2 positive echte Brüche. Dann ist $f^{(n)}(\theta_1 x)$ der reelle Teil von $F^{(n)}(\theta_1 x)$, also kann man setzen

$$f^{(n)}(\theta_1 x) = \lambda_1 F^{(n)}(\theta_1 x),$$

wobei $|\lambda_1| \leqq 1$; ebenso

$$\varphi^{(n)}(\theta_2 x) = \lambda_2 F^{(n)}(\theta_2 x),$$

wobei $|\lambda_2| \leqq 1$. Nennt man nun $(1-\theta)|F^{(n)}(\theta x)|$ die größere der beiden positiven Größen

$$(1-\theta_1)|F^{(n)}(\theta_1 x)|, \quad (1-\theta_2)|F^{(n)}(\theta_2 x)|,$$

so folgt

$$(1-\theta_1)^n f^{(n)}(\theta_1 x) + i(1-\theta_2)^n \varphi^{(n)}(\theta_2 x) = 2\lambda F^{(n)}(\theta x)(1-\theta)^n,$$

wobei $|\lambda| \leqq 1$. Man kann also die Mac Laurinsche Formel schreiben

$$F(x) = F(0) + x F'(0) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + \frac{2\lambda F^{(n)}(\theta x)(1-\theta)^n x^n}{(n-1)!},$$

und ähnliches gilt von der Taylorschen Formel sowie von den anderen Formen dieser Reihen.

Wir wenden diese Formel an auf die Abschätzung des Restes in der komplexen Potenz

$$(1 + x + yi)^\mu = (1 + r e^{\varphi i})^\mu,$$

die wir als Funktion der reellen Größe r betrachten. Man muß diese Potenz zunächst eindeutig festlegen, etwa indem man ansetzt

$$F(r)(1+z)^\mu = (1 + r e^{\varphi i})^\mu = e^{\mu \operatorname{Lg}(1 + r\cos\varphi + ir\sin\varphi)}, \quad z = r e^{\varphi i}$$

und, mit Rücksicht darauf, daß $1 + r\cos\theta$ nicht negativ sein kann, gemäß der Formel (6) des § 51 im besonderen setzt

$$\operatorname{Lg}(1 + r e^{\varphi i}) = \lg \sqrt{1 + r e^{\varphi i}} + i \operatorname{arctg} \frac{r \sin\varphi}{1 + r\cos\varphi}.$$

Dieser Wert von Lg geht stetig in 0 über, wenn r verschwindet.

Da man nun beim Differenzieren komplexe Konstante wie reelle behandeln darf, folgt

$$F'(r) = \frac{\mu e^{\varphi i} e^{\mu \operatorname{Lg}(1 + r e^{\varphi i})}}{1 + r e^{\varphi i}} = \mu e^{\varphi i} (1 + r e^{\varphi i})^{\mu - 1} = \mu e^{\varphi i} (1 + z)^{\mu - 1},$$

$$F''(r) = \mu(\mu - 1)(1 + z)^{\mu - 2} e^{2\varphi i} \ldots,$$

so daß als Mac Laurinsche Entwicklung erscheint

$$F(r) = (1 + z)^{\mu} = 1 + \binom{\mu}{1} r e^{\varphi i} + \binom{\mu}{2} r^2 e^{2\varphi i} + \cdots$$

$$\cdots + \binom{\mu}{n-1} r^{n-1} e^{(n-1)\varphi i} + 2 \lambda n \binom{\mu}{n} \frac{(1 - \theta)^{n-1} r^n}{(1 + \theta z)^{n - \mu}},$$

wobei $|\lambda| \leqq 1$, $0 < \theta < 1$.

Hier kann nun auf den Rest, abgesehen vom Faktor 2λ, genau die Diskussion des § 44 angewandt werden; entscheidend ist der absolute Wert des Bruches

$$\frac{r(1 - \theta)}{1 + \theta z},$$

in welchem nach der Formel (8) des § 51 die Beziehung

$$|1 + \theta z| \geqq \big|1 - \theta |z|\big| = 1 - \theta r$$

gilt, solange $r < 1$, so daß $1 - \theta r > 1 - \theta$ und

$$\left|\frac{r(1 - \theta)}{1 + \theta z}\right| \leqq \frac{r(1 - \theta)}{1 - \theta r} < r,$$

was der in § 44 geltenden Ungleichung

$$\frac{|x|(1 - \theta)}{1 + \theta x} < |x|$$

entspricht. Man findet demnach durch das in § 44 gebrauchte Verfahren

$$\lim_{n = \infty} n \binom{\mu}{n} \frac{(1 - \theta)^{n-1} r^n}{(1 - \theta z)^{n - \mu}} = 0$$

also

$$(1) \qquad (1 + z)^{\mu} = 1 + \binom{\mu}{1} z + \binom{\mu}{2} z^2 + \cdots$$

bei komplexem Wert von z und der Annahme $|z| < 1$.

Zur Zerlegung in reellen und imaginären Teil führt die Gleichung

$$(1 + z)^{\mu} = e^{\mu \operatorname{Lg}(1 + z)} = e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta),$$

wobei dem besonderen Wert von $\operatorname{Lg}(1 + z)$ gemäß gesetzt ist

$$\alpha = \mu \lg |1 + z| = \frac{\mu}{2} \lg [(1 + r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi],$$

$$e^{\alpha} = (1 + 2 r \cos \varphi + r^2)^{\frac{\mu}{2}}$$

mit positivem Wert der Potenz, und

$$\beta = \mu \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi}{1 + r \cos \varphi};$$

die Gleichung ergibt somit

$$(2) \quad \begin{aligned} (1 + 2r\cos\varphi + r^2)^{\frac{\mu}{2}} \cos\beta &= 1 + \binom{\mu}{1} r\cos\varphi + \binom{\mu}{2} r^2 \cos 2\varphi + \cdots, \\ (1 + 2r\cos\varphi + r^2)^{\frac{\mu}{2}} \sin\beta &= \binom{\mu}{1} r\sin\varphi + \binom{\mu}{2} r^2 \sin 2\varphi + \cdots; \end{aligned}$$

dabei ist, wir wiederholen es, $r < 1$ vorausgesetzt.

Wird r festgehalten, so konvergiert die Reihe

$$(3) \qquad \binom{\mu}{1} r + \binom{\mu}{2} r^2 + \cdots$$

da das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Glieder dem Wert

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mu - n}{n + 1} r = -r$$

zustrebt, stärker als die geometrische Reihe $2r + 2r^2 + \cdots$, die von μ unabhängig ist; die Reihe (3) und noch mehr die Reihen (2) konvergieren also nach μ gleichmäßig und unbedingt, und dasselbe gilt auch von den Reihen, die man erhält, wenn man die Reihen (2), abgesehen von dem Gliede 1, durch μ dividiert. Man erhält also bestimmte Grenzwerte

$$A = \lim_{\mu=0} \left[\frac{1}{\mu}\binom{\mu}{1} r\cos\varphi + \frac{1}{\mu}\binom{\mu}{2} r^2 \cos 2\varphi + \cdots\right],$$

$$B = \lim_{\mu=0} \left[\frac{1}{\mu}\binom{\mu}{1} r\sin\varphi + \frac{1}{\mu}\binom{\mu}{2} r^2 \sin 2\varphi + \cdots\right],$$

indem man in den Reihengliedern $\mu = 0$ setzt, und es ergibt sich

$$A = r\cos\varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi + \tfrac{1}{3} r^3 \cos 3\varphi - \cdots$$

$$B = r\sin\varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\varphi - \cdots$$

Aus den Gleichungen (2) erhält man also, indem man wieder links das Reelle und Imaginäre zusammenzieht,

$$\begin{aligned} \lim_{\mu=0} \frac{(1+z)^\mu - 1}{\mu} &= \lim_{\mu=0} \frac{1}{\mu} \left[e^{\mu \operatorname{Lg}(1+z)} - e^{0 \cdot \operatorname{Lg}(1+z)}\right] \\ &= \operatorname{Lg}(1+z) = \tfrac{1}{2} \lg(1 + 2r\cos\varphi + r^2) \\ &\qquad + i \operatorname{arctg} \frac{r\sin\varphi}{1 + r\cos\varphi} \\ &= A + Bi, \end{aligned}$$

also endlich, da $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$$(4)\qquad \operatorname{Lg}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots,$$

d. h. die logarithmische Reihe stellt einen bestimmten Logarithmus von $1+z$ auch bei komplexen Werten von z dar, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Setzt man $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die bekannten Reihen

$$\lg(1+r) = r - \tfrac{1}{2}r^2 + \tfrac{1}{3}r^3 - \cdots,\quad \lg(1-r) = -r - \tfrac{1}{2}r^2 - \cdots,$$
$$\operatorname{arctg} r = r - \tfrac{1}{3}r^3 + \tfrac{1}{5}r^5 - \cdots,$$
$$\tfrac{1}{2}\lg\frac{1+r}{1-r} = r + \tfrac{1}{3}r^3 + \tfrac{1}{5}r^5 + \cdots,$$
$$i\operatorname{arctg} r = \tfrac{1}{2}\operatorname{Lg}\frac{1+ir}{1-ir},$$

womit die bekannte Beziehung zwischen Logarithmus und Arcustangens wieder hergestellt ist.

Wichtig ist, daß in den Gleichungen (2) und (4) unter gewissen Annahmen auch $r = 1$ gesetzt werden kann. Dazu führt der folgende von Abel herrührende Satz über Potenzreihen. Die reelle Reihe

$$R(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

konvergiere, sobald $0 < x < 1$, und die Summe $a_0 + a_1 + \cdots$ sei ebenfalls konvergent und $= A$. Dann gilt die Gleichung

$$\lim_{x=1-0} R(x) = A,$$

was keineswegs selbstverständlich ist, da $R(x)$ zwar auf jeder Strecke $0\ldots\alpha$, wenn $\alpha < 1$, stetig ist, keineswegs aber auf der ganzen Strecke $0\ldots 1$ dies mit Sicherheit ausgesagt werden kann.

Um diesen Satz zu beweisen, sei

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,\quad a_n = A_n - A_{n-1},\quad \lim_{n=\infty} A_n = A,$$

also

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n &= A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1}x^{n-1} + A_n x^n \\ &\quad - A_0 x - \cdots - A_{n-2}x^{n-1} - A_{n-1}x^n \\ &= (1-x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}) + A_n x^n. \end{aligned}$$

Der Grenzwert des letzten Gliedes ist, wenn $x < 1$ festgehalten wird, Null, da A_n der Grenze A zustrebt; somit folgt

$$\begin{aligned} R(x) &= \lim_{n=\infty}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= \lim_{n=\infty}(1-x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}) \end{aligned}$$

oder

$$R(x) = (1-x)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots)$$

oder, wenn $A_n = A + \alpha_n$ gesetzt wird und m irgend eine ganze Zahl ist,

$$
\begin{aligned}
R(x) &= (1-x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m) \\
&\quad + (1-x) A (x^{m+1} + x^{m+2} + \cdots) \qquad (5) \\
&\quad + (1-x)(\alpha_{m+1} x^{m+1} + \alpha_{m+2} x^{m+2} + \cdots).
\end{aligned}
$$

Jetzt werde, was möglich ist, m so groß gewählt, daß alle Größen $|\alpha_{m+1}|$, $|\alpha_{m+2}|$, ... unter einer beliebig klein gegebenen positiven Größe ε liegen; dann ist das dritte Glied des erhaltenen Ausdrucks $R(x)$ absolut kleiner als

$$(1-x)\,\varepsilon\,(x^{m+1} + x^{m+2} + \cdots) = \varepsilon\, x^{m+1} < \varepsilon,$$

und dies bleibt so, wenn nachträglich der echte Bruch x vermehrt wird. Das zweite Glied des Ausdrucks (5) ist $A x^{m+1}$; läßt man also jetzt x gegen 1 heranrücken, $\lim x = 1 - 0$, so erhält man

$$R(x) = A + \varrho_1 + \varrho_2,$$

wobei die Glieder ϱ absolut kleiner als ε sind, sobald $1 - x$ hinreichend klein geworden ist. Damit ist gezeigt

$$\lim_{x=1-0} R(x) = A,$$

wie behauptet wurde.

Wir wenden den Satz an auf die Reihen

$$r\cos\varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi + \cdots,$$
$$r\sin\varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi + \cdots,$$

indem wir x durch r ersetzen; die Summen der Koeffizienten

$$\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \cdots, \quad \sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \cdots$$

sind nach § 39 konvergent, wenn φ zwischen 0 und π liegt; nennen wir ihre Summen S und T, so ergibt unser Satz mit der Formel (4)

$$
\begin{aligned}
S + iT &= \lim_{r=1} \operatorname{Lg}(1 + r e^{i\varphi}) = \operatorname{Lg}(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&= \tfrac{1}{2} \lg[(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi] + i \operatorname{arctg} \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi},
\end{aligned}
$$

wobei $1 + \cos\varphi$ von Null verschieden und positiv ist und $\frac{1}{2}\varphi$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt. Da nun hiernach

$$(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 2 + 2\cos\varphi = 4\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2}$$

gesetzt werden kann, so ergibt sich

$$S = \lg\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \cdots,$$

$$T = \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots;$$

die letzte Gleichung wird offenbar unrichtig, wenn $\varphi = \pi$ gesetzt wird, was ja auch durch unsere Voraussetzungen ausgeschlossen wird.

§ 58. Unendliche Produkte.

Werde allgemein

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2)\ldots(1 + u_n)$$

gesetzt; ist dann $\lim\limits_{n=\infty} P_n$ endlich und bestimmt, etwa $= P$, so sagen wir, das unendliche Produkt

$$\prod_n^{1,\infty}(1 + u_n) = P$$

konvergiere und habe den Wert P. Sind zunächst die Größen u positiv, so bedenken wir, daß bei positiven Werten von x immer $1 + x < e^x$, also $1 + u_n < e^{u_n}$ ist, also

$$P_n < e^{u_1 + u_2 + \cdots + u_n};$$

konvergiert also die Reihe $u_1 + u_2 + \cdots$, so bleibt P_n unter einer festen Schranke; anderseits wächst P_n offenbar mit n, strebt also unter der ausgesprochenen Voraussetzung einer endlichen Grenze P zu; man kann auch sagen, die Reihe $P_1 + (P_2 - P_1) + \cdots$ konvergiert.

Jetzt sei allgemeiner die Reihe $v_1 + v_2 + \cdots$ unbedingt konvergent und allgemein $|v_n| = u_n$,

$$Q_n = (1 + v_1)(1 + v_2)\cdots(1 + v_n).$$

Dann ist

$$Q_n - Q_{n-1} = (1 + v_1)\cdots(1 + v_{n-1})v_n,$$

$$P_n - P_{n-1} = (1 + u_1)\cdots(1 + u_{n-1})u_n,$$

also sicher

$$P_n - P_{n-1} \geqq |Q_n - Q_{n-1}|,$$

die Reihe mit den Gliedern Q_1, $Q_n - Q_{n-1}$ konvergiert also unbedingt, und ihre Summe

$$Q_1 + (Q_2 - Q_1) + \cdots = \lim_{n=\infty} Q_n$$

ist endlich und bestimmt.

Enthalten die Größen v_n alle einen Faktor x, so ist $Q_n - Q_{n-1}$ ein Polynom n^{ten} Grades in x, also wenn man will, eine unbedingt konvergente Reihe von Potenzen von x mit Faktoren. Da nun auch die Reihe $\Sigma(Q_n - Q_{n-1})$ unbedingt konvergiert, so sind die Bedingungen für die Anwendung des Doppelreihensatzes (§ 42) erfüllt; man kann Q nach Potenzen von x ordnen; wenn $v_n = w_n x$, darf man setzen

$$Q = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots = \prod_n^{1,\infty} (1 + w_n x),$$

und da offenbar

$$Q_n = 1 + x(w_1 + w_2 + \cdots + w_n) + x^2(\cdots),$$

so ist

$$Q_n - Q_{n-1} = x w_n;$$

also in der umgeordneten Doppelreihe hat x als Faktor die Summe aller w_n, d. h.

$$C_1 = w_1 + w_2 + \cdots$$

Demzufolge hat man z. B.

$$(1) \qquad \left(1 + \frac{x}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$= 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots,$$

da die Reihe $1^{-2} + 2^{-2} + \cdots$ konvergiert, und für den ersten Koeffizienten

$$C_1 = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right),$$

und nach § 49 (28)

$$C_1 = \tfrac{1}{6}.$$

Auch die übrigen Koeffizienten sind leicht zu bestimmen; setzt man nämlich $x = -z^2$ und multipliziert beide Seiten der Gleichung (1) mit z, so erhält man

$$z\left(1 - \frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$= z - C_1 z^3 + C_2 z^5 - C_3 z^7 + \cdots,$$

und hier ist die linke Seite identisch mit $\sin z$ nach § 48 (16), mithin muß die rechte Seite mit der Sinusreihe übereinstimmen, woraus folgt

$$C_1 = \frac{1}{1.2.3}, \quad C_2 = \frac{1}{1.2\ldots5}, \quad C_3 = \frac{1}{1.2\ldots7} \quad \text{usw.}$$

Aus Formel (1) kommt jetzt

$$\left(1 + \frac{x}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2\ldots5} + \frac{x^3}{1.2\ldots7} + \cdots,$$

und zwar gilt dies für alle reellen x. Setzt man $x = + y^2$ und multipliziert beiderseits mit y, so geht die Reihe über in

$$y + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2\ldots 5} + \frac{y^7}{1.2\ldots 7} + \cdots = \mathfrak{Sin}\, y$$

und man hat daher die Gleichung

$$(2)\qquad \mathfrak{Sin}\, y = y\left(1 + \frac{y^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{y^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{y^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots,$$

welche, da $\sin i y = i\,\mathfrak{Sin}\, y$, zeigt, daß das unendliche Produkt für $\sin z$ auch in dem Falle richtig bleibt, wo z durch die imaginäre Variable $i y$ ersetzt wird.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten bei den Werten

$$w_1 = \frac{4}{1^2\pi^2},\quad w_2 = \frac{4}{3^2\pi^2},\quad w_3 = \frac{4}{5^2\pi^2}\quad \text{usw.};$$

man gelangt nämlich zu der Formel

$$(3)\qquad \mathfrak{Cof}\, y = \left(1 + \frac{4y^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4y^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4y^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots,$$

welche, da $\cos i y = \mathfrak{Cof}\, y$, beweist, daß das unendliche Produkt für $\cos z$ auch im Falle $z = i y$ richtig bleibt.

Auf die Gleichungen (2) und (3) sind die nämlichen Transformationen anwendbar, welche in § 49 mit den unendlichen Produkten für $\sin z$ und $\cos z$ ausgeführt wurden. Nimmt man zuerst die Logarithmen und differenziert nachher in Beziehung auf y, so erhält man, indem man die hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Cot}$ und $\mathfrak{Tg}$ wie bei den trigonometrischen Funktionen einführt,

$$(4)\qquad \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \mathfrak{Cot}\, y$$

$$= \frac{1}{y} + \frac{2y}{(1\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(2\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(3\pi)^2 + y^2} + \cdots,$$

$$(5)\qquad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \mathfrak{Tg}\, y$$

$$= \frac{2y}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + y^2} + \cdots,$$

$$(6)\qquad \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, y} = \frac{2}{e^y - e^{-y}}$$

$$= \frac{1}{y} + \frac{2y}{(1\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(2\pi)^2 + y^2} - \frac{2y}{(3\pi)^2 + y^2} + \cdots,$$

$$(7)\qquad \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, y} = \frac{2}{e^y + e^{-y}} = \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + y^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + y^2} + \frac{5\pi}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + y^2} - \cdots;$$

dieselben Resultate ergeben sich aus den Formeln (3), (4), (6) und (7) des § 49 durch Substitution von $z = iy$.

Verwandelt man ferner die soeben gefundenen Reihen in Potenzreihen, so gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

$$(8) \quad \mathfrak{Cot}\, y = \frac{1}{y} + \frac{2^2 B_1}{1.2} y - \frac{2^4 B_3}{1.2..4} y^3 + \frac{2^6 B_5}{1.2..6} y^5 - \cdots,$$

$$-\pi < y < +\pi,$$

$$(9) \quad \mathfrak{Tg}\, y = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2} y - \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2..4} y^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2...6} y^5 - \cdots,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < y < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$(10) \quad \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, y} = \frac{2}{e^y - e^{-y}}$$

$$= \frac{1}{y} - \frac{2(2^1-1)B_1}{1.2} y + \frac{2(2^3-1)B_3}{1.2..4} y^3 - \frac{2(2^5-1)B_5}{1.2...6} y^5 + \cdots,$$

$$-\pi < y < +\pi,$$

$$(11) \quad \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, y} = 1 - \frac{\tau_2}{1.2} y^2 + \frac{\tau_4}{1.2..4} y^4 - \frac{\tau_6}{1.2..6} y^6 + \cdots,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < y < +\tfrac{1}{2}\pi;$$

darin bedeuten B_1, B_3, B_5 usw. die Bernoullischen Zahlen, τ_2, τ_4, τ_6 usw. die Sekantenkoeffizienten.

Man ersieht aus den gefundenen vier Gleichungen, daß die Formeln (29), (30), (31) und (24) in § 49 auch für $z = iy$ richtig bleiben, wenn y auf dieselbe Strecke wie z beschränkt wird.

Kapitel IX.

Die Zerlegung rationaler Funktionen in Faktoren und Teilbrüche.

§ 59. Der Fundamentalsatz der Lehre von den algebraischen Gleichungen.

Aus der Algebra ist hinreichend bekannt, daß Gleichungen der vier ersten Grade jederzeit ebensoviel reelle oder komplexe Wurzeln besitzen, als der Grad der Gleichung Einheiten zählt; es liegt daher die Frage nahe, ob diese Eigenschaft bei jedem höheren Grade gleichfalls stattfindet. Die Theorie der imaginären Zahlen macht eine genaue Erörterung des Gegenstandes möglich, welcher wir nur eine Bemerkung vorauszuschicken haben.

Wenn eine Reihe positiver Größen $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$ gegeben ist und die Zahl q größer als jeder der Quotienten

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}, \quad \frac{c_{k+2}}{c_{k+1}}, \quad \ldots \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

gewählt wird, so kann man aus den Ungleichungen

$$q > \frac{c_{k+1}}{c_k}, \quad q > \frac{c_{k+2}}{c_{k+1}}, \cdots q > \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

leicht die folgenden ableiten

$$c_{k+1} < c_k q, \quad c_{k+2} < c_k q^2, \quad c_{k+3} < c_k q^3, \ldots;$$

diese führen noch zu der Beziehung

$$c_{k+1} w^{k+1} + c_{k+2} w^{k+2} + \cdots + c_n w^n$$
$$< c_k w^k (q w + q^2 w^2 + \cdots + q^n w^n),$$

worin w eine beliebige positive Größe bezeichnet. Wählt man letztere $< \frac{1}{2q}$, so wird $qw < \frac{1}{2}$ und

$$q w + q^2 w^2 + \cdots + q^n w^n < \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \cdots \text{ in inf.},$$

wobei die Summe rechter Hand $= 1$ ist. Die nunmehrige Ungleichung

$$c_k w^k > c_{k+1} w^{k+1} + c_{k+2} w^{k+2} + \cdots + c_n w^n$$

enthält folgenden Satz: in der aus positiven Größen bestehenden Reihe

$$c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \cdots + c_n w^n$$

läßt sich w immer so klein wählen, daß irgend ein Glied $c_k w^k$ mehr beträgt als die Summe aller nachherigen Glieder. Sind die Glieder teils positiv, teils negativ, so kann man sie durch ihre absoluten Werte ersetzen, und dann bleibt die Schlußweise dieselbe. Man ersieht hieraus, daß bei hinreichend kleinen w das Vorzeichen der Summe

$$c_k w^k + c_{k+1} w^{k+1} + \cdots + c_n w^n$$

mit dem Vorzeichen des ersten Summanden übereinstimmt.

I. Wir betrachten nun einen Ausdruck von der Form

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

welchen man eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades zu nennen pflegt. Setzt man für x die beliebige komplexe Zahl $u + iv$, so stellt sich $f(x) = f(u + iv)$ unter die Form $M + iN$, wo M und N ganze rationale, also stetige Funktionen von u und v sind; es ändert sich also auch der absolute Betrag $|f(x)| = \sqrt{M^2 + N^2}$ mit u und v oder mit x stetig.

Nun bedeute ϱ eine Wurzel der positiven oder negativen Einheit, w eine beliebige reelle Größe, und es werde in der Gleichung (1) $x = u + iv + \varrho w$ gesetzt; man erhält dann einen Ausdruck von der Form

$$(2) \qquad f(u + iv + \varrho w) = P + iQ,$$

dessen absoluter Betrag $\sqrt{P^2 + Q^2}$ ist. Indem man $u + iv + \varrho w$ als ein aus $u + iv$ und ϱw bestehendes Binom ansieht und dementsprechend die Potenzen von $u + iv + \varrho w$ mittels des binomischen Satzes entwickelt, gelangt man zu einer Gleichung folgender Gestalt:

$$f(u + iv + \varrho w) = M + iN + (M_1 + iN_1)\varrho w + \cdots$$
$$\cdots + (M_n + iN_n)\varrho^n w^n;$$

in dieser haben M, N die vorige Bedeutung, und M_1, N_1, M_2, N_2 ... M_n, N_n sind reelle rationale Funktionen von u und v. Da möglicherweise mehrere dieser Ausdrücke verschwinden können, so mögen M_k und N_k die ersten nicht gleichzeitig verschwindenden Funktionen bedeuten; es ist dann

$$f(u + iv + \varrho w)$$
$$= M + iN + (M_k + iN_k)\varrho^k w^k + \cdots + (M_n + iN_n)\varrho^n w^n.$$

Für ϱ, welches bisher nicht näher bestimmt wurde, lassen sich vier verschiedene Wahlen treffen, nämlich

$$\varrho = (+1)^{\frac{1}{k}}, \quad \varrho = (-1)^{\frac{1}{k}}, \quad \varrho = (+i)^{\frac{1}{k}}, \quad \varrho = (-i)^{\frac{1}{k}},$$

welchen die Werte

$$\varrho^k = +1, \quad \varrho^k = -1, \quad \varrho^k = +i, \quad \varrho^k = -i$$

entsprechen; bezeichnet demnach ε eine reelle (positive oder negative) Einheit, so kann einerseits $\varrho^k = \varepsilon$, mithin

$$f(u + iv + \varrho w) = M + \varepsilon M_k w^k + \cdots + i(N + \varepsilon N_k w^k + \cdots),$$

anderseits $\varrho^k = \varepsilon i$, folglich

$$f(u + iv + \varrho w) = M - \varepsilon N_k w^k + \cdots + i(N + \varepsilon M_k w^k + \cdots)$$

gemacht werden. Die Quadrate der absoluten Beträge dieser Ausdrücke sind für die genannten Fälle

$$P^2 + Q^2 = M^2 + N^2 + 2\varepsilon(M M_k + N N_k) w^k + \cdots,$$
$$P^2 + Q^2 = M^2 + N^2 + 2\varepsilon(N M_k - M N_k) w^k + \cdots,$$

demnach ist es ebensowohl möglich

$$P^2 + Q^2 - (M^2 + N^2) = 2\varepsilon(M M_k + N N_k) w^k + \cdots$$

als

$$P^2 + Q^2 = (M^2 + N^2) = 2\varepsilon(N M_k - M N_k) w^k + \cdots$$

zu machen. Bei hinreichend kleinen w hat jede der Summen rechter Hand dasselbe Vorzeichen wie das erste Glied, man kann daher jene Summen negativ werden lassen, indem man dem ε das hierzu erforderliche Vorzeichen gibt.

Wenn also $f(u + iv)$ nicht verschwindet, d. h. wenn

$$|f(u + iv)| = \sqrt{M^2 + N^2}$$

von Null verschieden ist, so kann der absolute Betrag $|f(z)|$ durch passende Wahl der komplexen Größe z noch verkleinert werden, so daß

$$\sqrt{P^2 + Q^2} < \sqrt{M^2 + N^2}, \quad |f(z)| < f(u + iv), \quad z = u + iv + \varrho w.$$

Der Schluß wäre hinfällig, wenn gleichzeitig

$$M M_k + N N_k = 0, \quad M N_k - N M_k = 0$$

wäre, also

$$(M^2 + N^2)(M_k^2 + N_k^2) = 0,$$

was aber unmöglich ist, da weder M und N noch M_k und N_k zugleich verschwinden.

Der absolute Betrag $|f(x)|$ kann also, von irgend einer Stelle x ausgehend, wenn er noch nicht Null ist, verkleinert werden; wir

wollen durch einen bestimmten Grenzprozeß eine Stelle x_0 finden lehren, für die $f(x_0) = 0$ ist. Damit haben wir dann eine vielleicht nicht praktische, aber völlig allgemeine Methode zur numerischen Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$, und die Existenz einer Wurzel dieser Gleichung ist dann in sehr bestimmtem Sinne erwiesen.

II. Der Fundamentalsatz der Algebra, um den es sich handelt, kann so ausgesprochen werden: ist $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ein Polynom n^{ten} Grades, also a_n von Null verschieden, so kann man setzen

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ gleiche oder verschiedene, reelle oder komplexe Konstante, x eine Unabhängige ist. Wir nehmen an, dieser Satz sei für Polynome vom Grade $n - 1$ bewiesen, wie er für $n = 2$ leicht ersichtlich ist, so daß man im besonderen, wenn $a_n = 1$, setzen kann

$$f'(x) = n(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_{n-1});$$

dabei sind β von x unabhängige Werte, und wenn $b_\nu = |f(\beta_\nu)|$ gesetzt wird, kann man die Größen β so geordnet denken, daß

$$0 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_{n-1};$$

natürlich sind alle Größen b von Null verschieden, da sonst schon eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ gefunden wäre.

Von der Gleichung $f(\beta_1) = b_1$ ausgehend, kann man nun nach den obigen Betrachtungen die Größe $|f(x)|$ noch verkleinern, d. h. einen Wert α finden derart, daß die Größe $a = |f(\alpha)|$ zwischen 0 und b_1 liegt, also

$$0 < a < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_{n-1}.$$

Wegen der oben näher formulierten Stetigkeit der Größe $f(x)$ kann man ferner in der Ebene der komplexen Zahlen um die Stellen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$ Kreise mit den Radien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ derart beschreiben, daß $|f(x)|$ in ihrem Innern beliebig wenig von b_1 oder b_2 usf. abweicht, daß also jedenfalls in ihrem Innern und auf ihrer Grenze die Ungleichung

$$|f(x)| > a$$

gilt. Eben diese gilt wegen der Gleichung

$$f(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \cdots \frac{a_0}{a_n} \left(\frac{1}{x}\right)^n\right],$$

sobald $|x| \geqq g$ und g eine hinreichend große positive Zahl bedeutet, die wir auch größer als alle $|\beta_\nu| + \varrho_\nu$ annehmen dürfen. Der Kreis $|x| = g$ und die Kreise $|x - \beta_\nu| = \varrho_\nu$ begrenzen dann ein Gebiet $\mathfrak{S}$

derart, daß außerhalb desselben und beim Überschreiten seiner Grenzen immer die Beziehung $|f(x)| > a$ eintritt. Ferner bestehen in diesem Gebiet $\mathfrak{G}$ die Ungleichungen

$$|x - \beta_\nu| > \varrho_\nu,$$

also auch

$$(3) \qquad |f'(x)| = n\,|(x - \beta_1)\ldots(x - \beta_{n-1})| > n\,\varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}$$

oder kurz $|f'(x)| > k$, und k ist von x und α unabhängig.

III. Nach diesen Vorbereitungen können wir zeigen, daß $f(x)$ im Innern des Gebietes $\mathfrak{G}$ zum Verschwinden gebracht werden kann. Der Punkt α liegt im Gebiet $\mathfrak{G}$; $|f(\alpha)| = a$ ist positiv und $f'(\alpha)$ von Null verschieden, da $|f(\alpha)| = a$ keinem der Werte b_ν gleich ist; wir versuchen, $|f(\alpha + h)|$ möglichst klein zu machen. Zu diesem Zweck entwickeln wir

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + h\,f'(\alpha) + \frac{h^2}{1\,.\,2}\,f''(\alpha) + \cdots;$$

einen Näherungswert von h, der $f(\alpha + h)$ klein macht, erhalten wir allem Anschein nach, wenn wir setzen

$$f(\alpha) + h\,f'(\alpha) = 0,$$

was aber nicht genau zu gelten braucht; wir setzen daher

$$h = -\,\delta\,\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

wobei δ einen noch verfügbaren Verbesserungsfaktor bedeutet. Man hat dann die Entwicklung

$$f(\alpha + h) = f(\alpha)(1 - \delta) + \frac{\delta^2}{2}\,f(\alpha)\left\{\frac{f(\alpha)\,f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} + \frac{\delta}{3}\,\frac{f(\alpha)\,f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^3} + \cdots\right\}.$$

Hier ist die große Klammer rechts, wenn man die Festsetzung $|\delta| < 1$ trifft, absolut kleiner als eine von δ unabhängige Größe Q; diese kann auch als von α unabhängig gelten, da jeder der Nenner $f'(\alpha)^\nu$ in diesem Gebiet $\mathfrak{G}$ nach (3) über k^ν bleibt, die Zähler aber Polynome in α sind, deren Werte im Gebiet $\mathfrak{G}$ unter von α unabhängigen Schranken liegen. Hiernach hat man, da $|f(\alpha)| = a$, die Ungleichung

$$|f(\alpha + h)| < a\,[\,|1 - \delta| + \tfrac{1}{2}\,|\delta^2|\,Q\,],$$

oder, indem man

$$\alpha_1 = \alpha + h = \alpha - \delta\,\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \qquad a_1 = |f(\alpha + h)|$$

setzt,

$$0 < a_1 < a\,(|1 - \delta| + \tfrac{1}{2}\,Q\,|\delta^2|).$$

Diese Beziehung gilt für jedes δ, für das $|\delta| < 1$; nimmt man im besonderen für δ einen positiven echten Bruch, so erhält man für die letzte Ungleichung

$$0 < a_1 < a(1 - \delta + \tfrac{1}{2} Q \delta^2),$$

und wenn man jetzt $\delta = 1/Q$ setzt,

$$(4) \qquad 0 < a_1 < a\left(1 - \frac{1}{2Q}\right).$$

Hieraus ergibt sich die wichtige Folgerung, daß $\alpha_1 = \alpha + h$ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört, da außerhalb desselben und auf seiner Grenze immer $|f(x)| > a$ ist. Man kann also mit den Werten α_1 und $f(\alpha_1) = a_1$ genau dieselbe Betrachtung anstellen wie mit α und $|f(\alpha)|$; außerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ ist überall $|f(x)| > a_1$, die Größe Q, die ja von α unabhängig war, behält ihre Bedeutung, und man findet eine weitere dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehörige Stelle α_2, für welche, $|f(\alpha_2)| = a_2$ gesetzt, die Ungleichung

$$a_2 < a_1\left(1 - \frac{1}{2Q}\right), \quad 0 < a_2 < a_1, \quad a_2 < a\left(1 - \frac{1}{2Q}\right)^2$$

gilt. So fortfahrend, erhält man entweder einmal einen Wert $a_n = |f(\alpha_n)| = 0$ und das Ziel ist erreicht; oder man erhält unzählige Werte

$$a_n < a\left(1 - \frac{1}{2Q}\right)^n,$$

die offenbar mit wachsenden Werten von n ergeben

$$(5) \qquad \lim a_n = \lim f(\alpha_n) = 0,$$

und die Stellen α_n liegen alle im Gebiet $\mathfrak{G}$. Jetzt ergeben die Definitionen der Größen α_n

$$\alpha_1 = \alpha - \delta \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - \frac{1}{Q} \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

also, da $|f'(\alpha)| > k$,

$$|\alpha_1 - \alpha| < \frac{a}{Qk};$$

anderseits gibt die Beziehung (4)

$$a - a_1 > \frac{a}{2Q};$$

also folgt

$$|\alpha_1 - \alpha| < \frac{2(a - a_1)}{k}.$$

Ebenso hat man allgemein

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{1}{Q}\frac{f(\alpha_{n-1})}{f'(\alpha_{n-1})}, \qquad |f'(\alpha_{n-1})| > k, \qquad a_{n-1} < a,$$

$$|\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \frac{a_{n-1}}{Qk}, \qquad a_n < a_{n-1}\left(1 - \frac{1}{2Q}\right),$$

$$a_{n-1} - a_n > \frac{a_{n-1}}{2Q}, \qquad |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \frac{2(a_{n-1} - a_n)}{k}.$$

Die Reihe $\alpha + (\alpha_1 - \alpha) + (\alpha_2 - \alpha_1)$ ist also unbedingt konvergent; ihre Glieder sind vom zweiten ab kleiner als die entsprechenden der Reihe

$$-\frac{2a}{k} + \frac{2(a - a_1)}{k} + \frac{2(a_1 - a_2)}{k} + \cdots,$$

deren Glieder vom zweiten ab positiv sind und deren Summe $2 \lim a_n\ k$, also Null ist; mithin bilden auch die reellen Teile der Größen $\alpha_n - \alpha_{n-1}$ und ebenso die imaginären Teile unbedingt konvergente Reihen von endlicher Summe; es gibt einen Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha + (\alpha_1 - \alpha) + (\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots = \gamma.$$

Dann folgt wegen der Stetigkeit des Polynoms $f(x)$, indem man die Gleichung (5) berücksichtigt,

$$f(\gamma) = \lim f(\alpha_n) = 0.$$

Mit γ ist also der Wert gefunden, der $f(\gamma)$ zum Verschwinden bringt; da man nun

$$f(x) = f(x) - f(\gamma) = (x - \gamma) f_1(x)$$

setzen kann, wobei $f_1(x)$ ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, für das die Zerlegbarkeit schon bewiesen gedacht wird, so folgt bei passender Wahl der Größen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$

$$f(x) = a_n (x - \gamma)(x - \gamma_1) \ldots (x - \gamma_{n-1}).$$

Damit ist der Fundamentalsatz der Algebra durch Übergang von $n - 1$ zu n vollständig bewiesen.

Sind die Koeffizienten des Polynoms $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ reell, und ist $f(\lambda + \mu i) = 0$, ist auch $f(\lambda - \mu i) = 0$, da jede ungerade Potenz von i in ihr Entgegengesetztes übergeht, wenn man i durch $-i$ ersetzt, während die geraden Potenzen ungeändert bleiben. Dann bleibt also der reelle Teil von $f(\lambda + \mu i)$, der die geraden Potenzen von i enthält, ungeändert, der mit i behaftete geht in sein Entgegengesetztes über; ist $f(\lambda + \mu i) = A + Bi$, und

sind A und B reell, so ist $f(\lambda - \mu i) = A - Bi$, woraus das Behauptete offenbar folgt. Die komplexen Linearfaktoren von $f(x)$ treten also paarweise auf und liefern reelle Produkte wie

$$(x - \lambda - \mu i)(x - \lambda + \mu i) = (x - \lambda)^2 + \mu^2.$$

Ein Polynom mit reellen Koeffizienten kann also in reelle Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegt werden.

§ 60. Die Zerlegung echt gebrochener Funktionen.

Unter einer gebrochenen rationalen algebraischen Funktion versteht man einen Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$, dessen Zähler und Nenner ganze Funktionen sind; sie heißt echt gebrochen, wenn der Nenner von höherem Grade als der Zähler ist, im Gegenfalle nennt man sie unecht gebrochen. Bei einer Funktion der letzteren Art kann man mit dem Nenner so lange in den Zähler dividieren, bis ein echt gebrochener Rest zum Vorschein kommt, d. h. jede unecht gebrochene Funktion läßt sich in eine ganze und in eine echt gebrochene Funktion zerlegen.

Die Summe mehrerer echt gebrochenen Funktionen ist wieder eine echt gebrochene Funktion, deren Nenner im allgemeinen das Produkt aus den Nennern der Summanden darstellt, z. B.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{5x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^2+1)};$$

man wird durch diese Bemerkung auf die Frage geführt, ob es umgekehrt wohl möglich sein würde, eine gegebene echt gebrochene Funktion in einzelne Funktionen derselben Art, in Teilbrüche oder Partialbrüche, zu zerlegen. Um dies zu untersuchen, denken wir uns vorerst den Nenner $F(x)$ in Faktoren zerlegt, etwa

$$F(x) = C(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$$

und nehmen $C = 1$, worin keine wesentliche Beschränkung liegt, weil man erforderlichenfalls Zähler und Nenner der gebrochenen Funktion durch den Koeffizienten der höchsten im Nenner vorkommenden Potenz dividieren kann. Da möglicherweise mehrere der Wurzeln $r_1, r_2, \dots r_n$ gleich sein können, so wollen wir annehmen, es seien vorhanden α Wurzeln, jede $= a$, β Wurzeln, jede $= b$ usw.; es ist dann

(1) $$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-k)^\varkappa,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \varkappa = n,$$

und die Größen $a, b, c, \ldots k$ sind jetzt sämtlich verschieden. Der Zähler der gegebenen Funktion heiße $f(x)$; sein Grad ist $< n$.

Für den Augenblick sei

$$\Phi(x) = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa, \tag{2}$$

mithin

$$F(x) = (x-a)^\alpha \Phi(x), \tag{3}$$

ferner

$$A = \frac{f(a)}{\Phi(a)}, \quad f_1(x) = \frac{f(x) - A\Phi(x)}{x-a}; \tag{4}$$

es gilt dann, wie durch Einsatz der Werte von A und $f_1(x)$ sogleich geprüft werden kann, die folgende identische Gleichung

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \Phi(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\Phi(x)}, \tag{5}$$

und daran knüpfen sich zwei wesentliche Bemerkungen. Da $\Phi(x)$ den Faktor $x-a$ nicht enthält, so ist $\Phi(a)$ von Null verschieden, mithin A eine endliche bestimmte Größe. Ferner hat man zufolge des Wertes von A

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \frac{f(a)}{\Phi(a)}\Phi(x)}{x-a};$$

der Zähler des vorstehenden Bruches ist eine ganze rationale Funktion von x und verschwindet für $x = a$; eben deswegen läßt sich diese Funktion ohne Rest durch $x - a$ dividieren und folglich ist der Quotient, d. h. $f_1(x)$ eine ganze Funktion von x. In der Gleichung (5) liegt demnach der Satz, daß die ursprünglich gegebene echt gebrochene Funktion in zwei echt gebrochene Funktionen zerlegt werden kann, von denen die zweite dieselbe Form besitzt wie die Urfunktion, während gleichzeitig der Grad ihres Nenners um eine Einheit niedriger ist. Indem man dasselbe Theorem wieder auf die zweite Funktion rechter Hand anwendet, erhält man

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \Phi(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\Phi(x)},$$

$$A_1 = \frac{f_1(a)}{\Phi(a)}, \quad f_2(x) = \frac{f_1(x) - A_1\Phi(x)}{x-a};$$

es erhellt augenblicklich, wie dieses Verfahren fortgesetzt werden kann und daß man dabei zu folgender Gleichung gelangen muß:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \Phi(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\Phi(x)}. \tag{6}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Psi(x) = (x-c)^{\gamma} \dots (x-k)^{\varkappa},$$

so ist der letzte Bruch in der vorigen Gleichung

$$\frac{f_{\alpha}(x)}{\Phi(x)} = \frac{f_{\alpha}(x)}{(x-b)^{\beta}\,\Psi(x)};$$

mit dieser echt gebrochenen Funktion lassen sich wieder dieselben Umwandlungen vornehmen wie in der Gleichung (6) und, indem man dieses Verfahren fortsetzt, gelangt man schließlich zu folgender Gleichung

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\
&+ \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \frac{K}{(x-k)^{\varkappa}} + \frac{K_1}{(x-k)^{\varkappa-1}} + \dots + \frac{K_{\varkappa-1}}{x-k}.
\end{aligned}
$$

Nachdem hiermit die Möglichkeit sowie die Form der Zerlegung echt gebrochener Funktionen gezeigt worden ist, kommt es noch auf die Berechnung der konstanten Zähler $A, A_1, \dots A_{\alpha-1}, B, B_1$ usw. an. Diese würden sich zwar bei wirklicher Ausführung der vorhin angedeuteten Operationen unmittelbar finden, doch ist dieses Verfahren so umständlich, daß ein kürzeres wünschenswert bleibt.

Der nächstliegende Gedanke ist offenbar, allen auf der rechten Seite der Gleichung (7) stehenden Größen den gemeinsamen Nenner $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \dots (x-k)^{\varkappa} = F(x)$ zu verschaffen und dann die Zähler zu vergleichen. Die völlige Identität von $f(x)$ und dem rechts zum Vorschein kommenden Zähler ist aber nur möglich, wenn beiderseits gleich hohe Potenzen von x gleiche Koeffizienten besitzen; man erhält damit $\alpha + \beta + \dots + \varkappa$ Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der ebensoviel Unbekannten.

Als Beispiel diene die Zerlegung von

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ sind $x = +1$, $x = +1$, $x = -1$, daher ist $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ und

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{9x^2 - 3x + 8}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Nach beiderseitiger Multiplikation mit $(x-1)^2(x+1)$ hat man die beiden Zähler

$$9x^2 - 3x + 8 = (A_1 + B)x^2 + (A - 2B)x + (A - A_1 + B),$$

deren Identität folgende drei Gleichungen liefert

$$A_1 + B = 9, \quad A - 2B = -3, \quad A - A_1 + B = 8;$$

man findet hieraus $A = 7$, $A_1 = 4$, $B = 5$, mithin

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+1}.$$

Bei einer größeren Anzahl von Partialbrüchen würde auch dieses Verfahren sehr weitläufig werden; wir wollen daher noch andere Methoden zeigen.

§ 61. Die Zähler der Teilbrüche.

Zunächst mag der einfache Fall betrachtet werden, wo $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \varkappa = 1$ ist, also der Nenner

$$(1) \qquad F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)$$

keine gleichen Faktoren enthält; die Gleichung § 60 (7) lautet jetzt

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k}.$$

Wir bringen dieselbe auf die kurze Form

$$(3) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

wo $\varphi(x)/\Phi(x)$ die Summe aller übrigen Partialbrüche bezeichnet und

$$\Phi(x) = (x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

mithin

$$(4) \qquad F(x) = (x-a)\Phi(x)$$

ist. Durch Multiplikation der Gleichungen (3) und (4) erhalten wir

$$f(x) = A\Phi(x) + (x-a)\varphi(x)$$

und für $x = a$

$$f(a) = A\Phi(a) \quad \text{oder} \quad A = \frac{f(a)}{\Phi(a)}.$$

Um aus dieser Gleichung, welche mit § 60 (4) übereinstimmt, $\Phi(a)$ zu entfernen, differenzieren wir die Gleichung (4), wodurch entsteht

$$F'(x) = (x-a)\Phi'(x) + \Phi(x),$$

und nehmen auch hier $x = a$; dies gibt

$$F'(a) = \Phi(a),$$

mithin nach dem Vorigen

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}. \tag{5}$$

Für jeden anderen Zähler würde sich die Sache ganz analog gestalten und es ist daher

$$B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \quad C = \frac{f(c)}{F'(c)}, \ldots \quad K = \frac{f(k)}{F'(k)}. \tag{6}$$

Als Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x^2 - 7}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}.$$

Der Nenner desselben verschwindet für $x = -1$, $x = +2$, $x = -3$ und ist daher $= (x + 1)(x - 2)(x + 3)$; die Zerlegung geschieht demnach in folgender Weise:

$$\frac{x^2 - 7}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}.$$

Hier ist

$$a = -1, \quad b = +2, \quad c = -3,$$

$$f(x) = x^2 - 7, \quad F'(x) = 3x^2 + 4x - 5,$$

$$A = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = \frac{-6}{-6} = +1,$$

$$B = \frac{f(+2)}{F'(+2)} = \frac{-3}{+15} = -\tfrac{1}{5},$$

$$C = \frac{f(-3)}{F'(-3)} = \frac{+2}{+10} = +\tfrac{1}{5},$$

und daher zerlegt sich der betrachtete Bruch wie folgt

$$\frac{x^2 - 7}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x+3}.$$

Das soeben auseinandergesetzte Verfahren bleibt im wesentlichen ungeändert, wenn einige oder alle Wurzeln $a, b, c, \ldots k$ komplex sind, denn die vorgenommenen Rechnungsoperationen gelten ganz gleichförmig für reelle und komplexe Zahlen. Will man aber den Übelstand vermeiden, daß auf der rechten Seite der Gleichung (2) imaginäre Größen vorkommen, so braucht man nur je zwei solche

Teilbrüche zu vereinigen, deren Nenner je zwei konjugierte komplexe Wurzeln enthalten. Um dies näher zu erläutern, wollen wir vorerst annehmen, die Gleichung $F(x) = 0$ habe nur zwei komplexe Wurzeln; diese sind dann einander konjugiert und von den Formen

$$a = p + iq, \quad b = p - iq.$$

Aus der Gleichung (2) wird jetzt die folgende

$$(7) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - p - iq} + \frac{B}{x - p + iq} + \frac{C}{x - c} + \cdots + \frac{K}{x - k},$$

und darin ist

$$A = \frac{f(p + iq)}{F'(p + iq)}, \quad B = \frac{f(p - iq)}{F'(p - iq)}.$$

Die vollständige Entwicklung von A führt zu einem Werte von komplexer Form, etwa

$$A = M + iN,$$

da sich aber A und B nur in dem Vorzeichen von i unterscheiden, so muß B den konjugierten Wert

$$B = M - iN$$

besitzen. In der Gleichung (7) lassen sich jetzt die beiden ersten Teilbrüche zusammenziehen; der gemeinschaftliche Nenner wird $(x - p)^2 + q^2$, im Zähler kann man zur Abkürzung

$$2M = P, \quad -2(Mp + Nq) = Q$$

setzen und erhält dann

$$(8) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Px + Q}{(x - p)^2 + q^2} + \frac{C}{x - c} + \cdots + \frac{K}{x - k}.$$

Die beiden zu konjugierten Wurzeln gehörigen imaginären Teilbrüche liefern also zusammen einen reellen Teilbruch mit quadratischem Nenner. Auf gleiche Weise behandelt man jedes Paar von Teilbrüchen, welches von einem Paare konjugierter Wurzeln herrührt.

Als Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{7x - 3}{x^3 - 3x^2 + x + 5}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3x^2 + x + 5$ sind $x = 2 + i$, $x = 2 - i$, $x = -1$, mithin wird die Zerlegung

$$\frac{7x - 3}{x^3 - 3x^2 + x + 5} = \frac{A}{x - 2 - i} + \frac{B}{x - 2 + i} + \frac{C}{x + 1}.$$

Hier ist

$$a = 2 + i, \quad b = 2 - i, \quad c = -1,$$

$$f(x) = 7x - 3, \quad F'(x) = 3x^2 - 6x + 1,$$

$$A = \frac{f(2+i)}{F'(2+i)} = \frac{+11 + 7i}{-2 + 6i} = \tfrac{1}{2} - 2i,$$

$$B = \frac{f(2-i)}{F'(2-i)} = \frac{+11 - 7i}{-2 - 6i} = \tfrac{1}{2} - 2i,$$

$$C = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = \frac{-10}{+10} = -1,$$

folglich die gesuchte Zerlegung

$$\frac{7x-3}{x^3 - 3x^2 + x + 5} = \frac{\frac{1}{2} - 2i}{x - 2 - i} + \frac{\frac{1}{2} + 2i}{x - 2 + i} - \frac{1}{x+1},$$

d. i. bei Zusammenziehung der beiden ersten Teilbrüche

$$\frac{7x-3}{x^3 - 3x^2 + x + 5} = \frac{x+2}{x^2 - 4x + 5} - \frac{1}{x+1}.$$

Als zweites Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x^{m-1}}{x^n - 1},$$

worin m und $n > m - 1$ positive ganze Zahlen bedeuten mögen. Setzen wir zur Abkürzung $\pi/n = \vartheta$, so hat die Gleichung $x^n - 1 = 0$ bei geraden n die beiden reellen Wurzeln

$$x = +1, \quad x = -1$$

und $n - 2$ komplexe Wurzeln, welche aus den Formeln

$$x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta, \quad x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta$$

dadurch erhalten werden, daß man $h = 2, 4, 6 \ldots n - 2$ nimmt. Nun ist im vorliegenden Falle

$$f(x) = x^{m-1}, \quad F(x) = x^n - 1, \quad F'(x) = n x^{n-1};$$

die beiden reellen Wurzeln liefern also die Teilbrüche

$$\frac{1}{n}\,\frac{1}{x-1}, \quad \frac{(-1)^m}{n}\,\frac{1}{x+1}. \tag{9}$$

Ferner gibt die Wurzel $x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta$ einen Teilbruch, dessen Zähler ist

$$R = \frac{(\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)^{m-1}}{n(\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)^{n-1}} = \frac{\cos h(m-n)\vartheta + i \sin h(m-n)\vartheta}{n},$$

wobei der Moivresche Satz benutzt wurde. Mit Rücksicht auf den Umstand, daß $n\vartheta = \pi$ und h eine gerade Zahl ist, erhält man einfacher

$$R = \frac{\cos hm\vartheta + i\sin hm\vartheta}{n};$$

die Wurzel $x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta$ gibt also den Teilbruch

$$\frac{1}{n}\frac{\cos hm\vartheta + i\sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta + i\sin h\vartheta)}.$$

Der konjugierten Wurzel $x = \cos h\vartheta - i\sin h\vartheta$ entspricht der konjugierte Teilbruch

$$\frac{1}{n}\frac{\cos hm\vartheta - i\sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta - i\sin h\vartheta)};$$

beide Teilbrüche zusammen liefern den reellen Bruch

$$(10) \qquad \frac{2}{n}\frac{(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$

dessen Zähler sich noch etwas vereinfachen läßt, was aber späterer Anwendungen wegen unterbleiben möge. Man erhält nun die gesuchte Zerlegung, wenn man die unter (9) angegebenen Brüche nebst den Brüchen summiert, welche aus dem Ausdruck (10) für $h = 2, 4, 6, \ldots n-2$ hervorgehen; unter Benutzung eines Summenzeichens ist also für gerade n:

$$(11) \qquad \frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\frac{1}{x-1} + \frac{(-1)^m}{n}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{n}\sum \frac{(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$

$$h = 2, 4, 6, \ldots n-2.$$

Bei ungeraden n sind die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ folgende

$$x = +1, \qquad x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i\sin h\vartheta,$$

$$h = 2, 4, 6, \ldots n-1;$$

die Rechnung unterscheidet sich jetzt nur dadurch von der vorigen, daß die Wurzel $x = -1$ nebst dem entsprechenden Teilbruch wegfällt; daher ist für ungerade n:

$$(12) \qquad \frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{n}\sum \frac{(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$

$$h = 2, 4, 6, \ldots n-1.$$

Als letztes Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x^{m-1}}{x^n+1};$$

wir unterscheiden dabei wieder gerade und ungerade n. Im ersten Falle hat die Gleichung $x^n + 1 = 0$ nur komplexe Wurzeln von den Formen

$$x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i\sin h\vartheta,$$

wo $\vartheta = \pi/n$ und $h = 1, 3, 5, \ldots n-1$ zu setzen ist. Der Wurzel $x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta$ entspricht ein Teilbruch mit dem Zähler

$$R = \frac{\cos h(m-n)\vartheta + i\sin h(m-n)\vartheta}{n},$$

wofür man wegen $n\vartheta = \pi$ und wegen des ungeraden h schreiben kann

$$R = -\frac{\cos hm\vartheta + i\sin hm\vartheta}{n}.$$

Die beiden konjugierten Wurzeln liefern daher die konjugierten Teilbrüche

$$-\frac{1}{n}\,\frac{\cos hm\vartheta + i\sin hm\vartheta}{x-(\cos h\vartheta + i\sin h\vartheta)} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{n}\,\frac{\cos hm\vartheta - i\sin hm\vartheta}{x-(\cos h\vartheta - i\sin h\vartheta)},$$

die sich leicht zusammenziehen lassen. Damit gelangt man bei geraden n zu folgender Zerlegung:

$$(13)\quad \frac{x^{m-1}}{x^n+1} = \frac{2}{n}\sum \frac{-(x-\cos h\vartheta)\cos hm\vartheta + \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$
$$h = 1, 3, 5, \ldots n-1.$$

Bei ungeraden n sind die Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$:

$$x = -1, \qquad x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i\sin h\vartheta,$$
$$h = 1, 3, 5, \ldots n-2;$$

die Zerlegung geschieht also wie vorhin, nur kommt noch der Teilbruch hinzu, welcher der reellen Wurzel $x = -1$ entspricht. Man hat daher für ungerade n:

$$(14)\quad \frac{x^{m-1}}{x^n+1} = \frac{(-1)^{m-1}}{n}\,\frac{1}{x+1}$$
$$+ \frac{2}{n}\sum \frac{-(x-\cos h\vartheta)\cos hm\vartheta + \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$
$$h = 1, 3, 5, \ldots n-2.$$

§ 62. Mehrfache Wurzeln des Nenners.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wo $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$ nicht sämtlich $= 1$ sind [§ 60 (7)]. Es sei r irgend eine der Größen $a, b, c, \ldots k$, und es bedeute $\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$ die Summe aller Teilbrüche, in denen r nicht vorkommt; die Gleichung (7) in § 60 läßt sich dann folgendermaßen darstellen:

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{R}{(x-r)^{\varrho}} + \frac{R_1}{(x-r)^{\varrho-1}} + \cdots + \frac{R_{\varrho-1}}{x-r} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

und zwar ist hier

$$(2) \qquad F(x) = (x-r)^{\varrho}\, \Phi(x).$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen, wobei zur Abkürzung

$$(3) \qquad R + R_1(x-r) + R_2(x-r)^2 + \cdots + R_{\varrho-1}(x-r)^{\varrho-1} = X$$

gesetzt werden möge, ergibt sich

$$(4) \qquad f(x) = X\Phi(x) + (x-r)^{\varrho}\, \varphi(x).$$

Diese Gleichung differenzieren wir mehrmals nacheinander und nehmen in ihr und jeder einzelnen Differentialgleichung $x = r$, was bei X und seinen Differentialquotienten X', X'' usw. durch ein angehängtes r bezeichnet werden möge; wir haben dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(r) &= X_r \Phi(r), \\ f'(r) &= X_r \Phi'(r) + X_r' \Phi(r), \\ f''(r) &= X_r \Phi''(r) + 2 X_r' \Phi'(r) + X_r'' \Phi(r) \text{ usw.} \end{aligned}$$

Anderseits ergeben sich aus der Gleichung (3) folgende Werte von X_r, X_r', X_r'' usf.:

$$X_r = R, \quad X_r' = 1\, R_1, \quad X_r'' = 1.2\, R_2, \quad X_r''' = 1.2.3\, R_3 \text{ usw.};$$

substituiert man dieselben in die vorigen Gleichungen und bezeichnet wie immer $1.2.3 \ldots m$ mit $m!$, so gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$(5) \qquad \begin{aligned} f(r) &= R\Phi(r), \\ f'(r) &= R\Phi'(r) + 1!\, R_1 \Phi(r), \\ f''(r) &= R\Phi''(r) + 2.1!\, R_1 \Phi'(r) + 2!\, R_2 \Phi(r) \text{ usw.}, \end{aligned}$$

deren allgemeines Schema ist

$$\begin{aligned} f^{(m)}(r) = R\Phi^{(m)}(r) &+ \binom{m}{1} 1!\, R_1 \Phi^{(m-1)}(r) \\ &+ \binom{m}{2} 2!\, R_2 \Phi^{(m-2)}(r) + \cdots \end{aligned}$$

Man kennt hier $\Phi(x)$, mithin auch $\Phi(r)$, $\Phi'(r)$, $\Phi''(r)$ usw.; die Gleichungen (5) enthalten daher nur die Unbekannten R, R_1, R_2 usw., welche der Reihe nach daraus entwickelt werden können.

Als Beispiel diene die Zerlegung

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}$$
$$=\frac{A}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Um zunächst A, A_1, A_2 zu bestimmen, hat man A für R, $r=0$, und

$$\Phi(x)=(x-1)^2(x+1)=x^3-x^2-x+1,$$
$$\Phi'(x)=3x^2-2x-1, \qquad \Phi''(x)=6x-2$$

zu setzen, während $f(x)$ immer $=1$ ist. Die Gleichungen (5) werden jetzt

$$1=A,$$
$$0=A(-1)+A_1,$$
$$0=A(-2)+2A_1(-1)+2A_2,$$

und daraus ergeben sich die Werte

$$A=1, \qquad A_1=1, \qquad A_2=2.$$

Um B und B_1 zu finden, schreibt man in (5) B statt R, setzt $r=1$,

$$\Phi(x)=x^3(x+1)=x^4+x^3,$$
$$\Phi'(x)=4x^3+3x^2,$$

und erhält

$$1=B.2, \qquad 0=B.7+B_1.2,$$

mithin

$$B=\tfrac{1}{2}, \qquad B_1=-\tfrac{7}{4}.$$

Zur Bestimmung von C gehören endlich die Substitutionen $R=C$, $r=-1$,

$$\Phi(x)=x^3(x-1)^2;$$

die erste der Gleichungen (5) liefert dann

$$1=C(-4) \quad \text{oder} \quad C=-\tfrac{1}{4}.$$

Zufolge dieser Koeffizientenwerte hat man jetzt folgende Zerlegung:

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}$$
$$=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{7}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}.$$

Das angegebene Verfahren bleibt der Hauptsache nach un ändert, wenn zwei oder mehrere der Größen $a, b, c, \ldots k$ komp ausfallen, nur wird man das Imaginäre wie früher dadurch vermeid daß man je zwei Teilbrüche vereinigt, welche konjugierten Wurz entsprechen. Ein Beispiel dürfte hinreichen, um diese Abänderu kennen zu lernen.

Wenn es sich um die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

handelt, so zerfällt man erst x^2+1 in $(x-i)(x+i)$ und se dann

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{x+1}{(x-i)^2(x+i)^2(x-1)}$$
$$= \frac{A}{(x-i)^2} + \frac{A_1}{x-i} + \frac{B}{(x+i)^2} + \frac{B_1}{x+i} + \frac{C}{x-1}.$$

Die Gleichungen (5) liefern, wenn man $f(x) = x+1$, A f R, i für r und $\Phi(x) = (x+i)^2(x-1)$ setzt, die Werte

$$A = \frac{i}{4}, \quad A_1 = -\frac{1-i}{4}.$$

Zur Bestimmung von B und B_1 ist keine neue Rechnung forderlich, denn es würde sich diese nur darin von der vorig unterscheiden, daß überall $-i$ an der Stelle von i und B statt stände; man hat daher

$$B = -\frac{i}{4}, \quad B_1 = -\frac{1+i}{4}.$$

Die Substitution $r = 1$, $R = C$, $\Phi(x) = (x^2+1)^2$ gibt nc $C = \frac{1}{2}$ und daher ist

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}$$
$$= \frac{i}{4}\left[\frac{1}{(x-i)^2} - \frac{1}{(x+i)^2}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{1-i}{x-i} + \frac{1+i}{x+i}\right] + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}$$

oder bei Zusammenziehung der konjugierten Teilbrüche

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)} = -\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}.$$

Integralrechnung.

Kapitel X.

Fundamentalsätze der Integralrechnung.

§ 63. Das unbestimmte Integral.

Die Differentialrechnung sucht die Ableitungen gegebener Funktionen; in der Gleichung $F'(x) = f(x)$ ist $F(x)$ die gegebene, $f(x)$ die gesuchte Funktion. Die Integralrechnung stellt sich die umgekehrte Aufgabe, $F(x)$ zu finden, wenn $f(x)$ gegeben ist; man nennt $F(x)$ die Stammfunktion oder das Integral der Funktion $f(x)$; diese ist der Integrand. Ist eine bestimmte Funktion $F(x)$ gefunden, so erfüllen auch alle Funktionen $F(x) + C$, in denen C ein Festwert ist, die Forderung

$$dF(x) = d[F(x) + C] = f(x)\,dx$$

und man schreibt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad d\int f(x)\,dx = f(x). \tag{1}$$

Das Integralzeichen ist aus dem S des Wortes Summe entstanden und kann in folgender Weise gerechtfertigt werden.

Sind $F(x)$ und $f(x)$, wie wir immer annehmen wollen, auf einer Strecke $a \ldots b$ stetig und sind auf dieser die wachsenden Werte x_0, $x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$ beliebig gewählt, so gibt die Beziehung $F'(x) = f(x)$ nach § 6 die Gleichungen

$$F(x_{\nu+1}) - F(x_\nu) = (x_{\nu+1} - x_\nu)\,f(\xi_\nu), \qquad x_\nu < \xi_\nu < x_{\nu+1};$$

addiert man diese Gleichungen, in denen $\nu = 0, 1, \ldots n-1$ gesetzt werde, und ist $x_n = x$, so folgt

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{\nu}^{0,\,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\,f(\xi_\nu).$$

Nun liegen, da $f(x)$ stetig sein soll, alle Differenzen

$$\varepsilon_\nu = f(\xi_\nu) - f(x_\nu)$$

unter einer beliebig klein vorgeschriebenen positiven Schranke ε, sobald alle Strecken $x_{\nu+1} - x_\nu$ hinreichend klein sind; man findet somit

$$F(x) = F(x_0) + \sum_\nu^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) f(x_\nu) + \sum_\nu \varepsilon_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu)$$

oder, wenn der absolute Betrag von λ kleiner als 1 ist,

$$F(x) = F(x_0) + \sum_\nu^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) f(x_\nu) + \lambda \varepsilon (x_n - x_0).$$

Hier ist das letzte Glied ebenso wie ε beliebig klein; man kann also annähernd, und zwar mit beliebiger Genauigkeit, setzen

$$F(x) = F(x_0) + \sum_\nu^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) f(x_\nu),$$

oder unbestimmter

$$F(x) = F(x_0) + \sum \Delta x \,.\, f(x).$$

Der Zuwachs der Stammfunktion $F(x)$ auf der Strecke von x_0 bis $x = x_n$ erscheint also entsprechend einer Teilung der Strecke $x_0 \ldots x$ in Elemente Δx als Summe beliebig kleiner Summanden von der Form $f(x) \Delta x$. Diese Summation rechtfertigt die Auffassung des Integrals als einer Summe; setzt man noch

$$C = -F(x_0),$$

so wird die Ähnlichkeit der letzten Gleichung mit der Gleichung (1) ersichtlich.

Die angedeutete Summation kann zwar zur angenäherten Berechnung der Stammfunktion $F(x)$ benutzt werden; Einsicht in den analytischen Charakter derselben gewinnt man aber meist nur durch die Gleichung

$$dF(x) = d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

indem man mit den Formeln der Differentialrechnung probierend eine Funktion sucht, deren Differential die gewünschte Form $f(x)\,dx$ hat. Dabei ist die erste Vorfrage: wie viele Integrale einer gegebenen Funktion $f(x)$ gibt es?

Die Antwort liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Sind $F(x)$ und $\Phi(x)$ zwei Integrale, also stetige Funktionen, die die Gleichung

$$dF(x) = d\Phi(x) = f(x)\,dx$$

erfüllen, so ist

$$d[F(x) - \Phi(x)] = 0$$

und die Ableitung der Größe $F - \Phi$ ist auf der betrachteten Strecke stetig, ebenso wie nach Definition die Größen F und Φ selbst; nach § 6 ist die Konstante die einzige stetige Funktion mit stetiger verschwindender Ableitung, also

$$\Phi(x) - F(x) = C, \quad \Phi(x) = F(x) + C.$$

Setzt man nämlich $\Psi(x) = \Phi(x) - F(x)$ und sind x und $x + h$ beliebige Stellen der Strecke, auf der $\Psi(x)$ und $\Psi'(x)$ stetig bleiben, so ist nach dem Mittelwertsatz

$$\Psi(x+h) - \Psi(x) = \Psi'(x + \theta h); \quad 0 < \theta < 1,$$

d. h., da Ψ' verschwindet,

$$\Psi(x+h) = \Psi(x) = C.$$

Wird also nach dem allgemeinsten Integral der Funktion $f(x)$ auf einer bestimmten Strecke, auf der sie stetig ist, gefragt, so geht dasselbe aus einem bestimmten durch Addition einer willkürlichen Konstanten hervor:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

In diesem Sinne ist das Integralzeichen vieldeutig und das allgemeinste Integral wird näher als **unbestimmtes Integral** bezeichnet. Jede Gleichung, die ein solches enthält, bezieht sich zunächst auf eine bestimmte Strecke, auf der der Integrand stetig ist.

Die Integrationskonstante C wird erst durch besondere Forderungen bestimmt, besonders durch die Festsetzung, das Integral $\Phi(x)$ solle an einer bestimmten Stelle $x = x_0$ einen vorgeschriebenen Wert A haben; dann ergibt sich

$$\Phi(x_0) = C + F(x_0) = A, \quad C = A - F(x_0),$$

oder, wenn $A = 0$ ist, wie oben $C = -F(x_0)$,

$$\Phi(x) = F(x) - F(x_0).$$

§ 64. Die Fundamentalformeln.

Der Definition des unbestimmten Integrals zufolge gibt jede Differentialformel Gelegenheit zur Aufstellung einer Integralformel, indem es hierzu nur einer veränderten Darstellung der ersteren bedarf. Als einfachste Formel schreiben wir nach § 63 (1)

$$d\int dx = dx, \quad \int dx = x + \text{const.}$$

Aus der allgemeineren Differentialformel

$$d\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right) = x^{\mu}\,dx,$$

welche für alle μ, mit alleiniger Ausnahme des Falles $\mu = -1$, Gültigkeit besitzt, erhält man so

$$(1) \qquad \int x^\mu \, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + \text{const.}, \quad \mu \gtrless -1.$$

Geht man von der allgemeinen Formel

$$d\left\{\frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b}\right\} = (a+bx)^\mu \, dx$$

aus, so findet sich auf gleiche Weise

$$(2) \qquad \int (a+bx)^\mu \, dx = \frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b} + \text{const.}, \quad \mu \gtrless -1.$$

Die Differentialformel

$$d \lg x = \frac{1}{x} \, dx$$

gibt, in derselben Weise umgekehrt, bei positiven x

$$(3) \qquad \int \frac{dx}{x} = \lg x + \text{const.};$$

allgemeiner ist

$$(4) \qquad \int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \lg(a+bx) + \text{const.},$$

womit für den Ausnahmefall $\mu = -1$ in den Formeln (1) und (2) die Entwicklung des Integrals gegeben ist. Mittels desselben Verfahrens leitet man die folgende Integralformel ab:

$$(5) \qquad \int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + \text{const.},$$

welche nur den Sonderfall $\mu = -2$ von Formel (2) darstellt; ferner hat man nach § 4

$$(6) \qquad \int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta x}{\alpha} + \text{const.},$$

oder für $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, wo nun a und b notwendig positiv sein müssen:

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \text{const.}$$

Aus § 4 ergibt sich bei gleicher Behandlung

$$(7) \qquad \int \frac{dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha\beta} \lg\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right) + \text{const.},$$

oder

$$\int \frac{dx}{a - b x^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \lg\left(\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}\right) + \text{const.},$$

wobei a und b an sich positiv sein müssen.

Nach § 4 ist weiter

$$\int \frac{x\,dx}{a + b x^2} = \frac{1}{2b} \lg(a + b x^2) + \text{const.}, \tag{8}$$

und hiermit schließt sich die Reihe derjenigen Fundamentalformeln, in denen algebraische, von Wurzeln freie Ausdrücke unter dem Integralzeichen stehen.

Aus § 4 erhält man ferner die Integralformel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} = \frac{1}{\beta} \lg(\beta x + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}) + \text{const.},$$

oder für $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \lg(x\sqrt{b} + \sqrt{a + b x^2}) + \text{const.}; \tag{9}$$

auf dieselbe Weise ergibt sich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} = \frac{1}{\beta} \arcsin \frac{\beta x}{\alpha} + \text{const.},$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - b x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \text{const.} \tag{10}$$

Die Differentialformeln in § 4 liefern noch die Integralformeln:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{\sqrt{a + b x^2}}{b} + \text{const.}, \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^3}} = \frac{x}{a\sqrt{a + b x^2}} + \text{const.}, \tag{12}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a + b x^2)^3}} = -\frac{1}{b\sqrt{a + b x^2}} + \text{const.} \tag{13}$$

Hiermit ist die Reihe derjenigen Grundformeln beendet, welche irrationale algebraische Ausdrücke unter dem Integralzeichen enthalten.

Aus der Gleichung $d[x \lg x - x] = \lg x\,dx$ folgt weiter

$$\int \lg x\,dx = x(\lg x - 1) + \text{const.} \tag{14}$$

Durch Umkehrung der bekannten Formel

$$d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = e^{ax}\,dx$$

wird ferner

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + \text{const.} \tag{15}$$

und damit sind zwei Formeln gewonnen, welche bei der Integration von logarithmischen und Exponentialfunktionen Anwendung finden.

Kehrt man ferner die vier Gleichungen um:

$$d\left(-\frac{\cos\mu u}{\mu}\right) = \sin\mu u\,du,\quad d\left(\frac{\sin\mu u}{\mu}\right) = \cos\mu u\,du,$$

$$d\left(-\frac{\lg\cos\mu u}{\mu}\right) = \operatorname{tg}\mu u\,du,\quad d\left(\frac{\lg\sin\mu u}{\mu}\right) = \cot\mu u\,du,$$

so ergeben sich unmittelbar die vier Integralformeln:

$$\int \sin\mu u\,du = -\frac{\cos\mu u}{\mu} + \text{const.}, \tag{16}$$

$$\int \cos\mu u\,du = +\frac{\sin\mu u}{\mu} + \text{const.}, \tag{17}$$

$$\int \operatorname{tg}\mu u\,du = -\frac{\lg\cos\mu u}{\mu} + \text{const.}, \tag{18}$$

$$\int \cot\mu u\,du = +\frac{\lg\sin\mu u}{\mu} + \text{const.} \tag{19}$$

Die beiden letzten Gleichungen in § 4 geben ferner

$$\int \frac{du}{\alpha^2\cos^2 u + \beta^2\sin^2 u} = \frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta\operatorname{tg}u}{\alpha}\right) + \text{const.}, \tag{20}$$

$$\int \frac{du}{\alpha^2\cos^2 u - \beta^2\sin^2 u} = \frac{1}{2\alpha\beta}\lg\left(\frac{\alpha+\beta\operatorname{tg}u}{\alpha-\beta\operatorname{tg}u}\right) + \text{const.} \tag{21}$$

Wir fügen endlich noch zwei Formeln bei, die aus den Differentialgleichungen

$$d\left[x\arcsin ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}\right] = \arcsin ax\,dx,$$

$$d\left[x\operatorname{arctg}ax - \frac{\lg(1+a^2x^2)}{2a}\right] = \operatorname{arctg}ax\,dx$$

entspringen, nämlich

$$\int \arcsin ax\,dx = x\arcsin ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a} + \text{const.}, \tag{22}$$

$$\int \operatorname{arctg}ax\,dx = x\operatorname{arctg}ax - \frac{\lg(1+a^2x^2)}{2a} + \text{const.} \tag{23}$$

§ 65. Allgemeine Reduktionsformeln.

Sind die Differentiale, um deren Integration es sich handelt, nicht so einfach wie in den oben entwickelten Grundformeln, so muß man den gegebenen Ausdruck in Teile zu zerlegen suchen, welche, einzeln genommen, integriert werden können, und nachher das Integral der komplizierteren Größe aus den Integralen ihrer Bestandteile zusammensetzen. Hierzu dienen folgende Gesetze.

I. Es mögen a und b Konstanten, U und V Funktionen von x, endlich u und v die Differentialquotienten jener Funktionen bezeichnen; es ist dann

$$d(aU + bV) = (au + bv)\,dx,$$

mithin umgekehrt

$$\int (au + bv)\,dx = aU + bV. \tag{1}$$

Zufolge der Bedeutung von u und v gelten ferner die Gleichungen

$$dU = u\,dx, \qquad dV = v\,dx,$$

aus denen folgt

$$U = \int u\,dx, \qquad V = \int v\,dx;$$

nach Substitution dieser Werte geht die Gleichung (1) in die folgende über

$$\int (au + bv)\,dx = a\int u\,dx + b\int v\,dx, \tag{2}$$

welche die Regel zur Integration der Aggregate enthält.

Hiernach ist z. B.

$$\int \frac{1}{\alpha x + \beta x^2}\,dx = \int \frac{1}{x(\alpha + \beta x)}\,dx = \int \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{x} - \frac{\beta}{\alpha + \beta x}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{1}{\alpha + \beta x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\lg x - \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\lg(\alpha + \beta x)}{\beta} = \frac{1}{\alpha}\lg\left(\frac{x}{\alpha + \beta x}\right).$$

Da die Differentialformel, von welcher wir anfangs ausgingen, auch für Aggregate von jeder endlichen Gliederzahl gilt, so läßt sich die Formel (2) gleichfalls auf jede endliche Reihe ausdehnen; z. B.

$$\int \frac{1 - x^n}{1 - x}\,dx = \int (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1})\,dx$$

$$= \int dx + \int x\,dx + \int x^2\,dx + \cdots + \int x^{n-1}\,dx$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \quad + \frac{x^n}{n} + \text{const.}$$

II. Unter Beibehaltung der vorigen Zeichen erhält man aus der Differentialformel

$$d(UV) = Uv\,dx + Vu\,dx$$

die folgende Integralformel, wobei von der Regel für die Integration der Summen Gebrauch gemacht worden ist:

$$\int Uv\,dx + \int Vu\,dx = UV,$$

oder

(3) $$\int U\,dV = UV - \int V\,dU.$$

Zufolge des Wertes

$$V = \int v\,dx$$

ist die vorige Gleichung identisch mit

$$\int Uv\,dx = U\int v\,dx - \int\left[\int v\,dx\right]u\,dx,$$

wofür man einfacher zu schreiben pflegt

$$\int Uv\,dx = U\int v\,dx - \int u\,dx\int v\,dx,$$

oder auch, weil $u\,dx = dU$ war,

$$\int Uv\,dx = U\int v\,dx - \int dU\int v\,dx.$$

Diese Formel gibt die Methode der partiellen Integration oder Teilintegration.

So hat man z. B. für $U = \lg(1+x^2)$, $v = x$, $V = \frac{1}{2}x^2$,

$$\int \lg(1+x^2)\,x\,dx = \lg(1+x^2)\int x\,dx - \int\frac{2x\,dx}{1+x^2}\int x\,dx$$

$$= \lg(1+x^2)\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - \int\frac{x^3\,dx}{1+x^2},$$

und wenn man beachtet, daß weiter

$$\int\frac{x^3\,dx}{1+x^2} = \int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\lg(1+x^2),$$

so ergibt sich schließlich

$$\int x\lg(1+x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}(1+x^2)\lg(1+x^2) - \tfrac{1}{2}x^2 + \text{const.}$$

III. Befindet sich unter dem Integralzeichen eine zusammengesetzte Funktion, handelt es sich also um ein Integral von der Form

$$\int f[\varphi(x)]\,dx,$$

so leistet die Substitution einer neuen Veränderlichen häufig gute Dienste; man kann nämlich $\varphi(x) = y$ setzen und nunmehr y

als neue Unabhängige ansehen. Zunächst hat man die Gleichung $\varphi(x) = y$ nach x aufzulösen, wodurch man zu einem Ergebnis von der Form $x = \psi(y)$ kommt; man drückt nachher dx durch dy aus, indem man durch Differentiation der vorigen Gleichung $dx = \psi'(y)\,dy$ erhält, und gelangt so zu der Substitutionsformel

$$\int f[\varphi(x)]\,dx = \int f(y)\,\psi'(y)\,dy. \tag{4}$$

Benutzt man die frühere Bemerkung, daß das Differential $dx = d\psi(y) = \psi'(y)\,dy$ dasselbe bleibt, gleichviel welches die Unabhängige ist, die man zugrunde legt, so kann man auch sagen, daß das Integral

$$\int F(x)\,dx$$

seine Form behält, wenn an Stelle von x eine andere Unabhängige, etwa durch die Gleichung $x = \psi(y)$, eingeführt wird. Man hat dann

$$dx = \psi'(y)\,dy, \quad \int F(x)\,dx = \int F[\psi(y)]\,dx = \int F[\psi(y)]\,\psi'(y)\,dy,$$

und wenn $y = \varphi(x)$ die Umkehrung der Gleichung $x = \psi(y)$ ist und wie oben

$$F(x) = f[\varphi(x)]$$

gesetzt wird, so kommt die Gleichung (4) durch Rechnung so heraus, wie sie oben aus den Grundbegriffen der Differentialrechnung erschlossen wurde.

Bemerken wir noch, daß die Formel $dx = \psi'(y)\,dy$ nur auf einer solchen y-Strecke gilt und einen Sinn hat, auf der $\psi'(y)$ endlich und stetig ist. Das ist nur dann gesichert, wenn $\varphi'(x)$ auf der betrachteten x-Strecke von Null verschieden, $\varphi(x)$ also einsinnig ist. Nur auf einer solchen Strecke, auf der auch $f[\varphi(x)]$ stetig bleibt, und auf der entsprechenden y-Strecke, auf der $f(y)$ stetig bleiben muß, gilt die Substitutionsformel (4) ohne weiteres.

Läßt sich die Integration (4) rechter Hand ausführen, wobei unter anderem die Teilintegration von Nutzen sein kann, so entsteht zunächst eine Formel

$$\int f(y)\,\psi'(y)\,dy = F(y) + \text{const.}$$

und durch Wiedereinsetzung des Wertes von y

$$\int f[\varphi(x)]\,dx = F[\varphi(x)] + \text{const.},$$

womit die verlangte Integration ausgeführt ist.

So z. B. wird man in dem Integral

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$e^x = y$ setzen, woraus $x = \lg y$, $dx = \frac{dy}{y}$ folgt; das Integral verwandelt sich jetzt in das folgende

$$\int \frac{1}{y + \frac{1}{y}} \frac{dy}{y} = \int \frac{dy}{y^2 + 1},$$

dessen Wert $\operatorname{arctg} y +$ const. ist; man hat daher

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arctg}(e^x) + \text{const.}$$

Hinsichtlich der vorhin erwähnten Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = y$ müssen wir noch bemerken, daß dieselbe möglicherweise mehrere verschiedene Werte für x geben kann; aus $\frac{x^2 - 1}{2x} = y$ z. B. folgt ebensowohl $x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ als $x = y - \sqrt{y^2 + 1}$, und es wäre daher die Frage, welcher von diesen Werten zu nehmen sei. Man sieht aber leicht, daß man jeden beliebigen dieser Werte wählen kann, weil am Ende y wieder rückwärts durch x ausgedrückt wird und man also jedenfalls zu demselben $\varphi(x)$ zurückkommt, von welchem man ausgegangen war.

§ 66. Integration durch unendliche Reihen.

Wenn die vorigen Mittel nicht ausreichen, um die Integration einer gegebenen Funktion zu bewerkstelligen, so versucht man, das Integral in eine unendliche Reihe zu verwandeln; dies geschieht meistens auf folgende Weise.

Das Integral sei von der Form

$$\int f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

und $f(x)$ eine Funktion, die sich wenigstens für alle zwischen $x = \lambda$ und $x = \mu$ liegenden x in eine unendliche Reihe verwandeln läßt, etwa

$$f(x) = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots; \tag{1}$$

es ist dann

$$\int f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int (X_0 + X_1 + X_2 + \cdots)\, \varphi(x)\, dx. \tag{2}$$

Hier fragt sich vor allem, ob der in § 65, I. für endliche Reihen bewiesene Satz auch bei unendlichen Reihen anwendbar bleibt; wäre dies der Fall, so würde

$$\int f(x)\, \varphi(x)\, dx \tag{3}$$
$$= \int X_0\, \varphi(x)\, dx + \int X_1\, \varphi(x)\, dx + \int X_2\, \varphi(x)\, dx + \cdots$$

sein, und wenn die Integrale rechter Hand entwickelt werden können, so wäre das gesuchte Integral durch eine unendliche Reihe ausgedrückt.

Wenn nun in jedem der Summanden

$$J_n(x) = \int X_n \varphi(x)\, dx \tag{4}$$

die Integrationskonstante festgelegt wird, und wenn dies so geschehen kann, daß die Reihe (3) gleichmäßig auf der x-Strecke $\lambda \ldots \mu$ konvergiert, so kann sie nach § 40 gliedweise differenziert werden, unter der weiteren Bedingung, daß die Reihe

$$X_1 \varphi(x) + X_2 \varphi(x) + \cdots$$

auf jener Strecke gleichmäßig konvergiert, und das ist sicher, wenn dasselbe für die Reihe $X_1 + X_2 + \cdots$ gilt.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, a sei eine Stelle der Strecke $\lambda \ldots \mu$, und sei

$$J_n(a) = \alpha_n,$$

die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots$ aber sei konvergent. Setzt man dann

$$\psi(x) = J_n(x) + J_{n+1}(x) + \cdots + J_{n+k}(x),$$
$$\psi(a) = \alpha_n \quad + \alpha_{n+1} \quad + \cdots + \alpha_{n+k},$$

so ist

$$\psi'(x) = (X_n \quad + X_{n+1} \quad + \cdots + X_{n+k}) \varphi(x),$$

$$\psi(x) - \psi(a) = \psi'(\xi)(x - a), \tag{5}$$

wobei ξ zwischen x und a liegt.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $X_1 + X_2 + \cdots$ und der Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$ kann nun n so groß gewählt werden, daß, wenn ε beliebig klein und positiv gegeben ist, die Ungleichung

$$|\psi'(x)| < \varepsilon$$

auf der ganzen Strecke $\lambda \ldots \mu$ gilt. Wegen der Konvergenz der Reihe $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$ kann n gleichzeitig so groß gewählt werden, daß

$$|\psi(a)| < \varepsilon,$$

und die Gleichung (5) gibt dann

$$|\psi(x)| < \varepsilon + \varepsilon |\mu - \lambda|,$$

womit die Reihe $J_1 + J_2 + \cdots$ auf der Strecke $\lambda \ldots \mu$ als gleichmäßig konvergent erwiesen ist. Dann aber folgt nach § 41, daß man gliedweise differenzieren darf:

$$D_x(J_1 + J_2 + \cdots) = (X_1 + X_2 + \cdots) \varphi(x),$$

und das ist gleichbedeutend mit der behaupteten Formel

$$J_1(x) + J_2(x) + \cdots + C = \int (X_1 + X_2 + \cdots) \varphi(x)\, dx$$

oder auch mit der Formel (3).

Sei z. B. $X_n = a_n x^n$ und die Reihe $X_1 + X_2 + \cdots$, was nach § 41 angenommen werden darf, auf einer Strecke $-\lambda \ldots \lambda$ gleichmäßig konvergent. Ist dann $0 < \mu < \lambda$, $\mu < a < \lambda$, und $\varphi(x)$ auf der Strecke $\mu \ldots \lambda$ stetig, so kann man

$$J_n(x) = a_n \int x^n \varphi(x) dx, \quad J_n(a) = 0$$

setzen und auf der Strecke $\mu \ldots \lambda$ gliedweise integrieren:

$$(6) \quad \int \varphi(x)(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) dx = J_1(x) + J_2(x) + \cdots + C.$$

Wird im besonderen $\varphi(x) = x^{\alpha-1}$, $a_n = (-1)^n$, $0 < \lambda < 1$ vorausgesetzt, und ist α keine ganze Zahl, so findet sich

$$(-1)^n J_n(x) = \frac{x^{n+\alpha}}{n+\alpha} - \frac{a^{n+\alpha}}{n+\alpha}.$$

Nun ist die Reihe

$$C_1 = \sum_n \frac{a^{n+\alpha}}{n+\alpha}(-1)^n$$

konvergent; man kann also setzen

$$J_1(x) + J_2(x) + \cdots + C_1 = -\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \frac{x^{2+\alpha}}{2+\alpha} - \cdots$$

und die Formel (6) ergibt

$$(7) \quad \int \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \frac{x^{2+\alpha}}{2+\alpha} - \cdots + C', \quad C' = C - C_1;$$

dies gilt auf der Strecke $\mu \ldots \lambda$, d. h. auf einer beliebigen Strecke, die nur positive echte Brüche enthält.

Will man das Integral auf einer Strecke $\varrho \geqq x \geqq \mu$, wobei $\mu > 1$, bestimmen, so schreibt man nach § 65, III., indem man $x = 1/y$ setzt,

$$\int \frac{x^{\alpha-1} dx}{1+x} = -\int \frac{y^{-\alpha} dy}{1+y};$$

y ist jetzt auf die Strecke $1/\varrho \ldots 1/\mu$ beschränkt, die nur positive echte Brüche enthält und die Formel (7) ergibt, indem man schließlich wieder $y = 1/x$ setzt,

$$\int \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1} - \frac{x^{\alpha-2}}{\alpha-2} + \frac{x^{\alpha-3}}{\alpha-3} - \cdots + C.$$

Diese Gleichung gilt auf einer beliebigen Strecke, die nur positive Größen > 1 enthält.

Weitere Beispiele für die Integration durch Reihen folgen später.

Kapitel XI.

Integration rationaler Funktionen.

§ 67. Die Aufgabe und ihre einfachsten Fälle.

Das allgemeine Problem, womit wir uns im vorliegenden Kapitel beschäftigen, ist die Entwicklung des Integrals

$$S = \int \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \lambda x^m}{a + b x + c x^2 + \cdots + k x^n} d x,$$

wobei m und n ganze positive Zahlen bedeuten. Die unter dem Integralzeichen stehende gebrochene rationale Funktion kann echt oder unecht gebrochen sein; im letzteren Falle läßt sich dieselbe durch Division in eine ganze Funktion und in einen echt gebrochenen Rest zerlegen, was durch die Gleichung

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \lambda x^m}{a + b x + c x^2 + \cdots + k x^n} = \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \varkappa_1 x^{m-n} + \frac{A + B x + C x^2 + \cdots + M x^{n-1}}{a + b x + c x^2 + \cdots + k x^n}$$

ausgedrückt werden möge. Bezeichnet man den echt gebrochenen Rest mit $\frac{f(x)}{F(x)}$, so ist

$$S = \int \left[\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \cdots + \varkappa_1 x^{m-n} + \frac{f(x)}{F(x)}\right] d x$$

und durch Integration der einzelnen Teile

$$S = \alpha_1 \frac{x}{1} + \beta_1 \frac{x^2}{2} + \gamma_1 \frac{x^3}{3} + \cdots + \varkappa_1 \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1} + \int \frac{f(x)}{F(x)} dx.$$

Diese Gleichung gibt zu erkennen, daß die Integration einer unecht gebrochenen Funktion auf die Integration einer echt gebrochenen zurückgeführt werden kann; wir haben uns daher nur mit letzterer zu beschäftigen.

Ist der Nenner vom ersten Grade, so wird das letzte Integral zu folgendem

$$\int \frac{A}{a+bx}\,dx = A\int \frac{1}{a+bx}\,dx,$$

dessen Wert sich unmittelbar aus der Grundformel (4) in § 64 ergibt.

Ist der Nenner vom zweiten Grade, so hat man es mit dem Integral

$$\int \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}\,dx$$

zu tun; dieses zerfällt in zwei Integrale, nämlich

$$A\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\,dx + B\int \frac{x}{a+bx+cx^2}\,dx, \tag{1}$$

deren Entwicklung auf folgende Weise geschieht.

I. Es ist identisch

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{c\,dx}{ac+bcx+c^2x^2} = \int \frac{c\,dx}{(ac-\frac{1}{4}b^2)+(cx+\frac{1}{2}b)^2},$$

und wenn man eine neue Veränderliche y mittels der Substitution

$$cx+\tfrac{1}{2}b = y, \quad c\,dx = dy$$

einführt, so wird aus der vorigen Gleichung

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dy}{(ac-\frac{1}{4}b^2)+y^2}. \tag{2}$$

Hier sind die Fälle zu unterscheiden, ob $ac-\frac{1}{4}b^2$ positiv, Null oder negativ ist; denn der Wert des Integrals erhält nach den Grundformeln (6) und (7) des § 64 verschiedene Gestalten, je nachdem im Nenner die Summe oder die Differenz zweier Quadrate vorkommt.

Im ersten Falle,

$$ac-\tfrac{1}{4}b^2>0 \quad \text{oder} \quad 4ac-b^2>0,$$

ist $\sqrt{ac-\frac{1}{4}b^2}$ eine reelle Größe, die wir mit α bezeichnen wollen; die Gleichung (2) gibt dann unter Anwendung der Fundamentalformel § 64 (6)

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dy}{\alpha^2+y^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}+\text{const.}$$

Nach Wiedereinsetzung der Werte von y und α hat man

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}+\text{const.},$$
$$4ac-b^2>0.$$

Im zweiten Falle ($ac - \frac{1}{4}b^2 = 0$) wird die Gleichung (2) zur folgenden:

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + \text{const.},$$

das ist vermöge des Wertes von y

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = -\frac{2}{b + 2cx} + \text{const.},$$
$$4ac - b^2 = 0.$$

Im dritten Falle ($ac - \frac{1}{4}b^2 < 0$) ist $\frac{1}{4}b^2 - ac$ positiv, mithin $\sqrt{\frac{1}{4}b^2 - ac}$ eine reelle Größe, die α heißen möge; die Gleichung (1) lautet jetzt

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \int \frac{dy}{-\alpha^2 + y^2} = \int \frac{-dy}{\alpha^2 - y^2}$$
$$= -\frac{1}{2\alpha} \lg\left(\frac{\alpha + y}{\alpha - y}\right) + \text{const.},$$

und daraus ergibt sich nach Substitution der Werte von y und α

$$(3) \quad \int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \lg\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + b + 2cx}{\sqrt{b^2 - 4ac} - b - 2cx}\right)$$
$$+ \text{const.}, \quad 4ac - b^2 < 0.$$

Eine etwas andere Form erhält dieses Integral, wenn man von der identischen Gleichung

$$\lg\left(\frac{p}{q}\right) = \lg\left(\frac{p}{-q}\right) + \lg(-1)$$

Gebrauch macht und die konstante Größe $\lg(-1)$ in die willkürliche Integrationskonstante einrechnet; es ist dann

$$(4) \quad \int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \lg\left(\frac{b + 2cx + \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + 2cx - \sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$$
$$+ \text{const.}$$

und man wird nun die Formel (3) oder die Formel (4) benutzen, je nachdem $\sqrt{b^2 - 4ac}$ mehr oder weniger als $b + 2cx$ beträgt.

II. Um das zweite der in dem Ausdrucke (1) vorkommenden Integrale zu entwickeln, gehen wir von der Differentialformel aus

$$d \lg(a + bx + cx^2) = \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2} dx.$$

Die Umkehrung derselben gibt

$$\int \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2} dx = \lg(a + bx + cx^2)$$

oder durch Integration der einzelnen Teile

$$b\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} + 2c\int \frac{x\,dx}{a + bx + cx^2} = \lg(a + bx + cx^2),$$

und wenn man das zweite Integral als Unbekannte ansieht, so er-hält man

$$(5) \quad \int \frac{x\,dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{2c}\lg(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}.$$

Das gesuchte Integral ist hiermit auf ein schon bekanntes In-tegral zurückgeführt.

III. Setzt man in der Gleichung

$$\int \frac{A + Bx}{a + bx + cx^2} dx = A\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} + B\int \frac{x\,dx}{a + bx + cx^2}$$

statt des zweiten Integrals rechter Hand seinen Wert nach (5), s erhält man

$$\int \frac{A + Bx}{a + bx + cx^2} dx$$

$$= \frac{B}{2c}\lg(a + bx + cx^2) + \frac{2Ac - Bb}{2c}\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}$$

und damit erledigt sich die Integration der echt gebrochenen alg braischen Funktionen mit quadratischem Nenner.

§ 68. Folgerungen aus dem Vorigen.

Bevor wir die Integration solcher echt gebrochenen Funktion vornehmen, deren Nenner den zweiten Grad übersteigen, wollen w erst nachweisen, daß Integrale von der Form

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a + bx + cx^2)^{n+1}}$$

auf die obigen Integrale zurückgeführt werden können, wenn m u n ganze positive Zahlen sind.

Bezeichnen wir das Trinom $a + bx + cx^2$ kurz mit T, so fo durch gewöhnliche Differentiation

$$d\left(\frac{b + 2cx}{T^n}\right) = -n\frac{(b + 2cx)^2}{T^{n+1}}dx + 2c\frac{dx}{T^n};$$

unter Anwendung der identischen Gleichung

$$(b + 2cx)^2 = 4cT - (4ac - b^2)$$

und durch Vereinigung der gleichartigen Größen wird hieraus

$$d\left(\frac{b+2cx}{T^n}\right) = (4ac - b^2)n\frac{dx}{T^{n+1}} - 2c(2n-1)\frac{dx}{T^n}.$$

Die Integration gibt

$$\frac{b+2cx}{T^n} = (4ac - b^2)n\int\frac{dx}{T^{n+1}} - 2c(2n-1)\int\frac{dx}{T^n};$$

rechnet man das erste Integral rechter Hand aus und setzt zur Abkürzung

$$4ac - b^2 = \lambda, \quad \lambda \gtrless 0,$$

so gelangt man zu folgender Beziehung:

$$(1) \qquad \int\frac{dx}{T^{n+1}} = \frac{b+2cx}{n\lambda T^n} + \frac{(2n-1)2c}{n\lambda}\int\frac{dx}{T^n}.$$

Diese Reduktionsformel liefert der Reihe nach die Werte von

$$\int\frac{dx}{T^2}, \quad \int\frac{dx}{T^3}, \quad \int\frac{dx}{T^4}, \ldots,$$

indem man fortschreitend $n = 1, 2, 3, \ldots$ nimmt und jeden gewonnenen Wert in die nächste Gleichung einsetzt. Man hat demnach für $n = 1$

$$\int\frac{dx}{T^2} = \frac{b+2cx}{\lambda T} + \frac{2c}{\lambda}\int\frac{dx}{T},$$

wo das Integral rechter Hand aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen bekannt ist; ferner für $n = 2$

$$\int\frac{dx}{T^3} = \frac{b+2cx}{2\lambda T^2} + \frac{3c}{\lambda}\int\frac{dx}{T^2}$$

$$= \frac{b+2cx}{2\lambda T^2} + \frac{3c(b+2cx)}{\lambda^2 T} + \frac{6c^2}{\lambda^2}\int\frac{dx}{T}$$

usw.

Überhaupt können nach diesem Verfahren alle Integrale von der Form

$$\int\frac{dx}{T^{n+1}}$$

auf das in § 67, I. betrachtete Integral zurückgeführt, mithin auch vollständig entwickelt werden.

Weiter ist nun, wie man durch Differentiation findet,

$$d\left(\frac{x^{m-1}}{T^n}\right) = (m-1)\frac{x^{m-2}}{T^n}\,dx - n\,\frac{x^{m-1}(b+2cx)}{T^{n+1}}\,dx,$$

oder, wenn man rechter Hand alles auf gleichen Nenner bringt und das Gleichartige vereinigt,

$$d\left(\frac{x^{m-1}}{T^n}\right) = (m-1)\,a\,\frac{x^{m-2}\,dx}{T^{n+1}} - (n-m+1)\,b\,\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}}$$
$$- (2n-m+1)\,c\,\frac{x^m\,dx}{T^{n+1}}.$$

Umgekehrt ist die entsprechende Integralgleichung

$$\frac{x^{m-1}}{T^n} = (m-1)\,a\int\frac{x^{m-2}\,dx}{T^{n+1}} - (n-m+1)\,b\int\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}}$$
$$- (2n-m+1)\,c\int\frac{x^m\,dx}{T^{n+1}},$$

oder

(2) $$\int\frac{x^m\,dx}{T^{n+1}} = -\frac{1}{(2n-m+1)\,c}\cdot\frac{x^{m-1}}{T^n}$$
$$-\frac{(n-m+1)\,b}{(2n-m+1)\,c}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}} + \frac{(m-1)\,a}{(2n-m+1)\,c}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{T^{n+1}}.$$

Geht man von dem Werte $m = 1$ aus und sieht das Integral von dx/T^{n+1} als bekannt an, so kann man der Reihe nach die Integrale

$$\int\frac{x\,dx}{T^{n+1}},\quad \int\frac{x^2\,dx}{T^{n+1}},\quad \int\frac{x^3\,dx}{T^{n+1}},\ \cdots$$

entwickeln, nämlich

$$m = 1,\qquad \int\frac{x\,dx}{T^{n+1}} = -\frac{1}{2\,n\,c\,T^n} - \frac{b}{2\,c}\int\frac{dx}{T^{n+1}},$$

$$m = 2,\qquad \int\frac{x^2\,dx}{T^{n+1}} = -\frac{x}{(2n-1)\,c\,T^n} - \frac{(n-1)\,b}{(2n-1)\,c}\int\frac{x\,dx}{T^{n+1}}$$
$$+\frac{a}{(2n-1)\,c}\int\frac{dx}{T^{n+1}},$$

wo rechter Hand noch der Wert des ersten Integrals aus der vorigen Gleichung zu nehmen ist usw. — Durch fortschreitende Anwendung

der Formeln (1) und (2) kann nun auch der Wert jedes Integrals von der Form

$$\int \frac{A + Bx + Cx^2 + \cdots + Hx^h}{(a + bx + cx^2)^{n+1}}\, dx$$

vollständig ermittelt werden.

Es ist nicht überflüssig, zu bemerken, daß die Gleichung (2) für negative m gleichfalls gelten muß, weil sie die Umkehrung einer für alle möglichen m und n richtig bleibenden Differentialformel darstellt. Lassen wir nun $-m+2$ an die Stelle von m treten, so nimmt die Gleichung (2) folgende Form an:

$$\int \frac{dx}{x^{m-2}T^{n+1}} = -\frac{1}{(2n+m-1)c}\,\frac{1}{x^{m-1}T^n}$$
$$-\frac{(n+m-1)b}{(2n+m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}T^{n+1}} - \frac{(m-1)a}{(2n+m-1)c}\int \frac{dx}{x^m T^{n+1}},$$

und wenn man das letzte Integral rechts als Unbekannte betrachtet, so hat man

$$(3) \qquad \int \frac{dx}{x^m T^{n+1}} = -\frac{1}{(m-1)a\, x^{m-1}T^n}$$
$$-\frac{(n+m-1)b}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-1}T^{n+1}} - \frac{(2n+m-1)c}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-2}T^{n+1}}.$$

Für $m = 1$ ist diese Formel nicht brauchbar; man kann in diesem Falle die Substitution $x = \frac{1}{z}$ anwenden und erhält dadurch direkt

$$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^{n+1}} = -\int \frac{z^{2n+1}\,dz}{(c+bz+az^2)^{n+1}},$$

wo man rechter Hand die Integration mittels der Formeln (1) und (2) auszuführen und nachher rückwärts $z = \frac{1}{x}$ zu setzen hat. Macht man hierauf in der Gleichung (3) den Ansatz $m = 2, 3, \ldots$, so kann man die Integrale

$$\int \frac{dx}{x^2 T^{n+1}}, \quad \int \frac{dx}{x^3 T^{n+1}}, \ldots$$

der Reihe nach entwickeln und überhaupt den Wert jedes unter der Form

$$\int \left\{A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \cdots + \frac{H}{x^h}\right\} \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n+1}}$$

stehenden Integrals ermitteln.

§ 69. Die Integration echt gebrochener Funktionen.

Wenn es sich um die Ausführung der Integration

$$\int \frac{M_0 x^m + M_1 x^{m-1} + \cdots + M_{m-1} x + M_m}{N_0 x^n + N_1 x^{n-1} + \cdots + N_{n-1} x + N_n} dx$$

handelt, worin m und $n > m$ ganze positive Zahlen bedeuten, so ist es von Vorteil, zunächst x^n von seinem Koeffizienten zu befreien, was einfach dadurch geschieht, daß man Zähler und Nenner mit N_0 dividiert; der neue Nenner heiße dann $F(x)$, der Zähler $f(x)$. Wir unterscheiden hier wieder dieselben Fälle wie in § 61.

I. Ist der Nenner von der Form

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

wobei $a, b, c, \ldots k$ als verschieden voneinander vorausgesetzt werden, so hat man

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k} \right) dx.$$

Bei reellen $a, b, c, \ldots k$ läßt sich die Integration sofort ausführen und gibt

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = A \lg(x-a) + B \lg(x-b) + C \lg(x-c) + \cdots$$
$$\cdots + K \lg(x-k) + \text{const.}$$

Hiernach ist z. B.

$$\int \frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6} dx$$
$$= \lg(x+1) - \tfrac{1}{5}\lg(x-2) + \tfrac{1}{5}\lg(x+3) + \text{const.}$$

Sind einige der Größen $a, b, c, \ldots k$ von komplexer Form, etwa $a = p + iq$, $b = p - iq$, so gibt die Formel (8) in § 61

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int \frac{Px+Q}{(x-p)^2+q^2} dx + C \lg(x-c) + \cdots + K \lg(x-k);$$

das noch übrige Integral rechter Hand gehört unter diejenigen, womit wir uns in § 67, III. beschäftigt haben, und kann daher entwickelt werden. So ist z. B.

$$\int \frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5} dx = \int \frac{2+x}{5-4x+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x} dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\lg(5-4x+x^2) + 4 \operatorname{arctg}(x-2) - \lg(1+x) + \text{const.}$$

II. Es sei ferner $F(x)$ von der Form

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa,$$

mithin
$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{K}{(x-k)^\varkappa} + \frac{K_1}{(x-k)^{\varkappa-1}} + \cdots + \frac{K_{\varkappa-1}}{x-k}.$$

Unter der Voraussetzung, daß $a, b, c, \ldots k$ reell sind, hat man sogleich
$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$$
$$= -\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \frac{A_1}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}} - \cdots - \frac{A_{\alpha-2}}{x-a} + A_{\alpha-1}\lg(x-a)$$
$$- \frac{B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \frac{B_1}{(\beta-2)(x-b)^{\beta-2}} - \cdots - \frac{B_{\beta-2}}{x-b} + B_{\beta-1}\lg(x-b)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- \frac{K}{(\varkappa-1)(x-k)^{\varkappa-1}} - \frac{K_1}{(\varkappa-2)(x-k)^{\varkappa-2}} - \cdots - \frac{K_{\varkappa-2}}{x-k} + K_{\varkappa-1}\lg(x-k).$$

So ist z. B.
$$\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2(x+1)}$$
$$= \int\left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{7}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}\right]dx$$
$$= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + 2\lg x - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{7}{4}\lg(x-1) - \frac{1}{4}\lg(x+1) + \text{const.}$$

Wenn endlich unter den Größen $a, b, c, \ldots k$ komplexe Zahlen vorkommen, so entstehen Teilbrüche von der Form
$$\frac{\psi(x)}{[(x-p)^2+q^2]^s},$$
wo s eine ganze positive Zahl ist; auch diese sind nach § 68 immer integrabel. So hat man z. B.
$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}\,dx$$
$$= \int\left[-\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\lg(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\lg(x-1) + \text{const.}$$

Ein paar allgemeinere Beispiele für diese Integrationsmethoden sind folgende.

III. Multipliziert man die Gleichungen (11) und (12) des § 61 mit dx und integriert nach der leicht zu prüfenden Formel

$$\int \frac{(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1}\,dx$$

$$= \cos hm\vartheta \cdot \tfrac{1}{2}\lg(x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1) - \sin hm\vartheta \,.\, \operatorname{arctg}\frac{x - \cos h\vartheta}{\sin h\vartheta},$$

so gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

a) für gerade n und $\vartheta = \pi/n$:

$$\int \frac{x^{m-1}}{x^n - 1}\,dx = \frac{1}{n}\lg(x-1) + \frac{(-1)^m}{n}\lg(x+1)$$

$$+ \frac{1}{n}\sum[\cos hm\vartheta \,.\, \lg(x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1)]$$

$$- \frac{2}{n}\sum\left[\sin hm\vartheta \,.\, \operatorname{arctg}\frac{x - \cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\right] + \text{const.},$$

$$h = 2, 4, 6, \ldots n-2;$$

b) für ungerade n:

$$\int \frac{x^{m-1}}{x^n - 1}\,dx = \frac{1}{n}\lg(x-1)$$

$$+ \frac{1}{n}\sum[\cos hm\vartheta \,.\, \lg(x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1)]$$

$$- \frac{2}{n}\sum\left[\sin hm\vartheta \,.\, \operatorname{arctg}\frac{x - \cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\right] + \text{const.},$$

$$h = 2, 4, 6, \ldots n-1.$$

IV. Multipliziert man ferner die Gleichungen (13) und (14) des § 61 mit dx und integriert wie vorhin, so erhält man

a) für gerade n und $\vartheta = \pi/n$:

$$\int \frac{x^{m-1}}{x^n + 1}\,dx = -\frac{1}{n}\sum[\cos hm\vartheta \,.\, \lg(x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1)]$$

$$+ \frac{2}{n}\sum\left[\sin hm\vartheta \,.\, \operatorname{arctg}\frac{x - \cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\right] + \text{const.},$$

$$h = 1, 3, 5, \ldots n-1;$$

gesetzt, jeder einzelne Teil integriert und die Gleichung mit $(2k+1)b$ multipliziert wird,

$$(2k+1)b\int\frac{x^m(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}\,dx$$

$$=2x^m(a+bx)^k\sqrt{a+bx}-2ma\int\frac{x^{m-1}(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}\,dx$$

$$-2mb\int\frac{x^m(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

Schafft man das letzte Integral rechter Hand auf die linke Seite, so erhält man

$$\int\frac{x^m(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}\,dx$$

$$=\frac{2x^m(a+bx)^k\sqrt{a+bx}}{(2m+2k+1)b}-\frac{2ma}{(2m+2k+1)b}\int\frac{x^{m-1}(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

Für $m=1, 2, 3$ usw. ergeben sich hieraus der Reihe nach die Integrale

$$\int\frac{x(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}\,dx,\qquad\int\frac{x^2(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}\,dx\quad\text{usw.},$$

daher läßt sich auch das Integral

$$\int\frac{f(x)(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}\,dx$$

jederzeit entwickeln, wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von x, und k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

II. Um ferner den Wert des Integrals

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

zu bestimmen, gehen wir einen ähnlichen Weg, wie in § 67, I., doch müssen wir dabei die Fälle eines positiven und eines negativen c unterscheiden.

Der absolute Wert von c heiße γ; dann ist im ersten Falle $c=+\gamma$ und

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+\gamma x^2}}=\int\frac{\sqrt{\gamma}\,dx}{\sqrt{a\gamma+b\gamma x+\gamma^2x^2}}$$

$$=\sqrt{\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{(a\gamma-\frac{1}{4}b^2)+(\frac{1}{2}b+\gamma x)^2}}.$$

Zur Abkürzung sei $a\gamma - \frac{1}{4}b^2 = k$ und gleichzeitig werde eine neue Veränderliche y mittels der Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}b + \gamma x = y, \quad x = \frac{y - \frac{1}{2}b}{\gamma}, \quad dx = \frac{1}{\gamma}dy$$

eingeführt; es ist dann

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + bx + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dy}{\sqrt{k + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\lg(y + \sqrt{k + y^2}) + C,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\lg[\tfrac{1}{2}b + \gamma x + \sqrt{\gamma(a + bx + \gamma x^2)}] + C.$$

Den in der Klammer stehenden Ausdruck bringen wir auf den gemeinschaftlichen Nenner 2 und setzen

$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\lg 2 + C = \text{const.};$$

vermöge der Bedeutung von γ haben wir dann folgende Integralformel:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\lg(b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}) + \text{const.},$$
$$c > 0.$$

Im zweiten Falle $c = -\gamma$ rechnen wir ähnlich:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + bx - \gamma x^2}} = \int\frac{\sqrt{\gamma}\,dx}{\sqrt{a\gamma + b\gamma x - \gamma^2 x^2}}$$

$$= \sqrt{\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + a\gamma) - (\gamma x - \frac{1}{2}b)^2}}$$

und setzen $\frac{1}{4}b^2 + a\gamma = \alpha^2$; α sei positiv und

$$\gamma x - \tfrac{1}{2}b = y, \quad x = \frac{y + \frac{1}{2}b}{\gamma}, \quad dx = \frac{1}{\gamma}dy;$$

dies gibt unter Anwendung einer bekannten Fundamentalformel

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + bx - \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\arcsin\frac{y}{\alpha} + \text{const.}$$

Nach Substitution der Werte von $\gamma = -c$, α und y folgt nun

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{-b - 2cx}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + \text{const.},$$
$$c < 0.$$

Ergäbe sich α^2 negativ, so wäre das Integral rein imaginär und käme durch i dividiert auf einen der behandelten Fälle zurück.

III. Die soeben gewonnenen Ergebnisse können wiederum als Ausgangspunkte für fernere Entwicklungen dienen, wenn man die in § 68 unter (1), (2) und (3) entwickelten Reduktionsformeln damit in Verbindung bringt und berücksichtigt, daß die erwähnten Formeln die Umkehrungen zweier Differentialformeln sind, die für beliebige m und n gelten. Setzen wir nämlich in der Gleichung

$$(1) \qquad \int \frac{dx}{T^{n+1}} = \frac{b+2cx}{n\lambda T^n} + \frac{(2n-1)2c}{n\lambda}\int\frac{dx}{T^n}$$

$$[T = a + bx + cx^2, \quad \lambda = 4ac - b^2]$$

der Reihe nach $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ usf., so gelangen wir zu folgenden Gleichungen:

$$\int \frac{dx}{T\sqrt{T}} = 2\frac{b+2cx}{\lambda\sqrt{T}},$$

$$\int \frac{dx}{T^2\sqrt{T}} = \frac{2}{3}\frac{b+2cx}{\lambda\sqrt{T}} + \frac{8c}{3\lambda}\int\frac{dx}{T\sqrt{T}}$$

usw.,

aus denen hervorgeht, daß sich jedes Integral von der Form

$$\int \frac{dx}{T^k\sqrt{T}},$$

worin k eine positive ganze Zahl bezeichnet, vollständig entwickeln läßt und für $k > 0$ eine algebraische Funktion von x ist.

Kehrt man die Gleichung (1) um, drückt also das Integral rechter Hand durch das Integral linker Hand aus, so hat man weiter

$$\int \frac{dx}{T^n} = -\frac{b+2cx}{(2n-1)2cT^n} + \frac{n\lambda}{(2n-1)2c}\int\frac{dx}{T^{n+1}};$$

für $n = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ usf. entspringen hieraus die Gleichungen

$$\int dx\sqrt{T} = \frac{b+2cx}{4c}\sqrt{T} + \frac{\lambda}{8c}\int\frac{dx}{\sqrt{T}},$$

$$\int dx\,T\sqrt{T} = \frac{b+2cx}{8c}T\sqrt{T} + \frac{3\lambda}{16c}\int dx\sqrt{T}$$

usw.,

durch deren wiederholte Anwendung sich jedes Integral von der Form

$$\int dx\, T^k \sqrt{T}$$

für ein ganzes positives k entwickeln läßt. — Überhaupt ist nach diesen Betrachtungen der Wert des Integrals

$$\int T^p dx = \int (a + bx + cx^2)^p dx$$

als bekannt anzusehen, wenn p unter die Form $\pm (k + \frac{1}{2})$ gehört.

Mittels der Formeln (2) und (3) in § 68 folgt hieraus unmittelbar, daß für jedes ganze positive m auch die Integrale

$$\int x^m T^p dx \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{x^m} T^p dx$$

entwickelt werden können, indem man $n + 1 = \pm (k + \frac{1}{2})$ setzt und im übrigen ganz so wie dort verfährt. So erhält man z. B. für $n = -\frac{1}{2}$:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{T}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{T}}{mc} - \frac{(2m-1)b}{2mc} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{T}}$$
$$- \frac{(m-1)a}{mc} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{T}},$$

woraus die Werte der Integrale

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{T}}, \ldots$$

der Reihe nach leicht hergeleitet werden können.

§ 71. Integration durch Wegschaffung des Wurzelzeichens.

Ein sehr brauchbares Verfahren zur Integration irrationaler Ausdrücke besteht in der Substitution einer neuen Veränderlichen von der Art, daß die unter dem Wurzelzeichen stehende Größe zu einer vollständigen Potenz wird, aus welcher die Wurzel gezogen werden kann; das Integral erhält dadurch von selbst eine rationale Form und unterliegt dann den Methoden des vorigen Kapitels. Die Fälle, bei denen das genannte Verfahren gute Dienste leistet, sind folgende.

I. Um ein Radikal von der Form $\sqrt{\alpha + \beta x}$ wegzuschaffen, setzt man einfach

$$\sqrt{\alpha + \beta x} = y,$$

mithin

$$x = \frac{y^2 - \alpha}{\beta}, \quad dx = \frac{2y}{\beta}dy;$$

da die Werte von x und dx rational sind, so leistet die Substitution das Verlangte.

Hiernach ist z. B.

$$\int \frac{dx}{a + b\sqrt{\alpha + \beta x}} = \frac{2}{\beta}\int \frac{y\,dy}{a + by} = \frac{2}{b\beta}\int \left(1 - \frac{a}{a + by}\right) dy$$

$$= \frac{2}{b\beta}\left[y - \frac{a}{b}\lg(a + by)\right]$$

$$= \frac{2}{b\beta}\left[\sqrt{\alpha + \beta x} - \frac{a}{b}\lg(a + b\sqrt{\alpha + \beta x})\right].$$

Als zweites Beispiel diene die Entwicklung

$$\int \frac{dx}{(a + bx)\sqrt{\alpha + \beta x}}$$

$$= \frac{2}{\beta}\int \frac{y\,dy}{\left(a + b\frac{y^2 - \alpha}{\beta}\right)y} = 2\int \frac{dy}{(a\beta - b\alpha) + by^2}.$$

Hier ist zu unterscheiden, ob $a\beta - b\alpha$ und b gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen; in jedem Falle kann aber die Integration leicht ausgeführt werden.

Das erwähnte Verfahren bleibt auch dann anwendbar, wenn eine Wurzelgröße von der Form $\sqrt[n]{\alpha + \beta x}$ wegzuschaffen ist; man setzt nämlich

$$\sqrt[n]{\alpha + \beta x} = y,$$

mithin

$$x = \frac{y^n - \alpha}{\beta}, \quad dx = \frac{n y^{n-1}}{\beta}dx$$

und hat eine ganz ähnliche Rechnung.

II. Wenn ein Radikal von der Form $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}$ vorkommt, so ist die vorige Substitution ohne Nutzen; die Gleichung $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = y$ gibt nämlich

$$x = \frac{\sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\beta}, \quad dx = \frac{y\,dy}{\beta\sqrt{y^2 - \alpha^2}},$$

woraus zu ersehen ist, daß man zwar die eine Wurzel los wird, statt deren aber durch x und dx zwei neue hereinbringt. Man setzt in diesem Falle

$$(1) \qquad \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} - \beta x}{\alpha} = y;$$

hieraus folgt

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1 - y^2}{2y}, \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \alpha \frac{1 + y^2}{2y},$$

$$dx = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1 + y^2}{2y^2} dx,$$

und diese Ausdrücke sind sämtlich rational.

Mittels des angegebenen Verfahrens erhält man z. B.

$$\int \frac{dy}{(a + bx)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} = -2 \int \frac{dy}{b\alpha + 2a\beta y - b\alpha y^2};$$

nach Formel (4) in § 67 ist die rechte Seite gleich

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}} \lg \left(\frac{a\beta - b\alpha y + \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}}{a\beta - b\alpha y - \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}} \right) + \text{const.},$$

und wenn man hier den Wert von y aus der Gleichung (1) einsetzt, so gelangt man zu der Formel:

$$\int \frac{dx}{(a + bx)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}} \lg \left(\frac{a\beta + b\beta x - b\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} + \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}}{a\beta + b\beta x - b\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} - \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}} \right).$$

III. Um eine Wurzelgröße von der Form $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$ wegzuschaffen, benutzt man die Substitution

$$\sqrt{\frac{\alpha - \beta x}{\alpha + \beta x}} = y,$$

welche gibt

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1 - y^2}{1 + y^2}, \quad \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2} = \frac{2\alpha y}{1 + y^2}, \tag{2}$$

$$dx = -\frac{4\alpha}{\beta} \cdot \frac{y\,dy}{(1 + y^2)^2};$$

die letzten drei Ausdrücke sind rational und bringen daher keine neue Wurzel in das Integral.

Nach diesem Verfahren erhält man z. B.

$$\int \frac{dx}{(a + bx)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} = -2 \int \frac{dy}{a\beta + b\alpha + (a\beta - b\alpha)y^2};$$

hier ist zu unterscheiden, ob $a\beta + b\alpha$ und $a\beta - b\alpha$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, ob also $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2$ positiv,

Null oder negativ ist; den genannten Fällen entsprechen die Werte

$$-\frac{2}{\sqrt{a^2\beta^2-b^2\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a\beta-b\alpha}}{\sqrt{a\beta+b\alpha}}y\right)+\text{const.},$$

$$-\frac{2y}{a\beta+b\alpha}+\text{const.},$$

$$-\frac{1}{\sqrt{b^2\alpha^2-a^2\beta^2}}\lg\left(\frac{\sqrt{b\alpha+a\beta}+\sqrt{b\alpha-a\beta}\,.\,y}{\sqrt{b\alpha+a\beta}-\sqrt{b\alpha-a\beta}\,.\,y}\right)+\text{const.}$$

Nach Wiedereinsetzung des Wertes von y gelangt man zu folgenden drei Integralformeln:

für $a^2\beta^2-b^2\alpha^2>0$, $\displaystyle\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$

$$=-\frac{2}{\sqrt{a^2\beta^2-b^2\alpha^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(a\beta-b\alpha)(\alpha-\beta x)}{(a\beta+b\alpha)(\alpha+\beta x)}}+\text{const.};$$

für $a^2\beta^2-b^2\alpha^2=0$, $\displaystyle\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$

$$=-\frac{2}{a\beta+b\alpha}\sqrt{\frac{\alpha-\beta x}{\alpha+\beta x}}+\text{const.};$$

für $a^2\beta^2-b^2\alpha^2<0$, $\displaystyle\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{b^2\alpha^2-a^2\beta^2}}\lg\left(\frac{\sqrt{(b\alpha+a\beta)(\alpha+\beta x)}+\sqrt{(b\alpha-a\beta)(\alpha-\beta x)}}{\sqrt{(b\alpha+a\beta)(\alpha+\beta x)}-\sqrt{(b\alpha-a\beta)(\alpha-\beta x)}}\right)$$
$$+\text{const.}$$

Als zweites Beispiel diene folgende Entwicklung. Nach (2) erhält man:

$$\int\frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}}=-2\int\frac{(1+y^2)\,dy}{[1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2]^2}$$

$$=-\frac{2}{1-\varepsilon}\int\left\{\frac{1}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2}-\frac{2\varepsilon}{[1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2]^2}\right\}dy,$$

und wenn man auf das zweite Integral rechter Hand die Reduktionsformel

$$\int\frac{dy}{(a+cy^2)^2}=\frac{y}{2a(a+cy^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dy}{a+cy^2}$$

anwendet, so findet man für die rechte Seite der vorigen Gleichung:

$$\frac{2}{1-\varepsilon^2}\left\{\frac{\varepsilon y}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2}-\int\frac{dy}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2}\right\}.$$

Die noch übrige Integration ist leicht ausführbar, wobei die Fälle $\varepsilon^2 < 1$, $\varepsilon^2 = 1$ und $\varepsilon^2 > 1$ zu unterscheiden sind; durch Wiedereinsetzung des Wertes von y erhält man schließlich

für $\varepsilon^2 < 1$, $$\int\frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x}-\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)(1-x)}{(1+\varepsilon)(1+x)}}\right\}+\text{const.};$$

für $\varepsilon^2 = 1$,

$$\int\frac{dx}{(1+x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{3}\,\frac{2+x}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\text{const.};$$

für $\varepsilon^2 > 1$, $$\int\frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\varepsilon^2-1}\left\{-\frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\lg\left(\frac{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+x)}+\sqrt{(\varepsilon-1)(1-x)}}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+x)}-\sqrt{(\varepsilon-1)(1-x)}}\right)\right\}+\text{const.}$$

IV. Durch ähnliche Substitutionen, wie sie in den beiden vorigen Abschnitten benutzt wurden, läßt sich auch eine Wurzel von der Form $\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}$ wegschaffen, wobei γ immer als positiv betrachtet wird.

Steht unter der Wurzel $+\gamma x^2$, kann man stets

$$\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}=\lambda\sqrt{\pm 1},\quad \lambda > 0$$

und, stets die oberen oder stets die unteren Vorzeichen nehmend,

$$\frac{2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-(\beta+2\gamma x)}{\lambda}=\pm y$$

setzen und erhält

$$x=\frac{\lambda(1\mp y^2)-2\beta y}{4\gamma y},$$

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{\lambda}{4\sqrt{\gamma}}\,\frac{1\pm y^2}{y},$$

$$dx=\mp\frac{\lambda}{4\gamma}\,\frac{1\pm y^2}{y^2}\,dy.$$

Wenn dagegen unter Wurzelzeichen $-\gamma x^2$ steht, so setze man zur Abkürzung

$$\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2} = \mu$$

und mache Gebrauch von der Substitution

$$\sqrt{\frac{\mu + \beta - 2\gamma x}{\mu - \beta + 2\gamma x}} = y,$$

aus welcher sich folgende Werte ergeben:

$$x = \frac{\mu + \beta - (\mu - \beta) y^2}{2\gamma(1 + y^2)},$$

$$\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2} = \frac{\mu}{\sqrt{\gamma}} \frac{y}{1 + y^2},$$

$$dx = -\frac{2\mu}{\gamma} \frac{y\,dy}{(1 + y^2)^2}.$$

Nach diesen Formeln hat man z. B.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{\gamma}} \int \frac{dy}{1 + y^2}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arctg} y = -\frac{2}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \frac{2\gamma x - \beta}{\mu}}{1 + \frac{2\gamma x - \beta}{\mu}}}.$$

Hier läßt sich arctg in arccos oder arcsin umsetzen, wenn man bemerkt, daß aus der Gleichung $\cos u = z$ folgt:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - z}{1 + z}}, \quad \tfrac{1}{2} u = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - z}{1 + z}},$$

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - z}{1 + z}} = \arccos z = \frac{\pi}{2} - \arcsin z;$$

es wird nämlich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \arcsin \frac{2\gamma x - \beta}{\mu} + \text{const.},$$

was mit einer Formel in § 70, II. übereinstimmt.

§ 72. Integration binomischer Differentiale.

Unter binomischen Differentialen versteht man Ausdrücke von der Form

$$x^{m-1} (a + b x^n)^{\frac{p}{q}} dx,$$

worin m, n, p und q ganze positive Zahlen bezeichnen. Die Integration solcher Differentiale kann auf zweierlei Weise geschehen, entweder durch Wegschaffung des Wurzelzeichens, oder durch Rückgang auf ähnliche und einfachere Integrationen.

I. Setzt man erstlich

$$x = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

mithin

$$dx = \frac{q}{nb} z^{q-1} \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

so gelangt man zu der Gleichung

$$\int x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{nb^{\frac{m}{n}}} \int (z^q - a)^{\frac{m}{n}-1} z^{p+q-1} dz$$

und hier ist rechter Hand ein rationales Differential vorhanden, sobald m/n eine ganze Zahl ausmacht. So z. B. hat man nach den obigen Formeln

$$\int x^5 (1 - x^2)^{\frac{2}{7}} dx = -\frac{7}{2} \int (z^7 - 1)^2 z^8 dz,$$

wo die Integration in Beziehung auf z durch Entwicklung von $(z^7 - 1)^2$ ausgeführt werden kann, und am Schlusse derselben der Wert von z aus der Gleichung

$$x = \left(\frac{z^7 - 1}{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 - z^7)^{\frac{1}{2}}$$

zu nehmen, also

$$z = (1 - x^2)^{\frac{1}{7}}$$

einzusetzen ist.

Eine zweite Substitution, welche ebenfalls zu einer rationalen Form führen kann, ist

$$x = \left(\frac{a}{z^q - b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

also

$$dx = -\frac{q a^{\frac{1}{n}}}{n} \frac{z^{q-1} dz}{(z^q - b)^{\frac{1}{n}+1}};$$

man erhält durch dieselbe:

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx = -\frac{q\,a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}{n}\int\frac{z^{p+q-1}\,dz}{(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}}$$

und hier wird das Differential rechter Hand rational, wenn $m/n + p/q$ eine ganze Zahl ist. So hat man beispielsweise

$$\int x(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx = -\int\frac{z^3\,dz}{(z^3-1)^2}$$

und darin

$$x = \left(\frac{1}{z^3-1}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{oder} \quad z = \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}}{x},$$

nach welchen Angaben die Rechnung keinen weiteren Schwierigkeiten unterliegt.

II. Ist weder m/n noch $m/n + p/q$ eine ganze Zahl, so läßt sich das binomische Differential im allgemeinen nicht rational machen; man benutzt dann die nachstehend entwickelten Reduktionsformeln, die übrigens allgemein für beliebige m und n gelten.

Bezeichnen wir p/q kurz mit s und $a + bx^n$ mit X, so gibt die Teilintegration:

$$\begin{aligned}\int x^{m-1}X^s\,dx &= X^s\int x^{m-1}\,dx - s\int X^{s-1}\,dX\int x^{m-1}\,dx\\ &= X^s\frac{x^m}{m} - s\int X^{s-1}\,dX\frac{x^m}{m},\end{aligned}$$

und weil $dX = bnx^{n-1}\,dx$ ist:

$$\int x^{m-1}X^s\,dx = \frac{x^m X^s}{m} - \frac{bns}{m}\int x^{m+n-1}X^{s-1}\,dx. \tag{1}$$

Dieser Formel wird man sich bedienen, wenn eine Vermehrung von m und eine gleichzeitige Verminderung von s wünschenswert ist.

Durch Umkehrung der Formel (1) hat man noch

$$\int x^{m+n-1}X^{s-1}\,dx = \frac{x^m X^s}{bns} - \frac{m}{bns}\int x^{m-1}X^s\,dx$$

oder, wenn $m-n$ für m und $s+1$ für s gesetzt wird,

$$\int x^{m-1}X^s\,dx = \frac{x^{m-n}X^{s+1}}{bn(s+1)} - \frac{m-n}{bn(s+1)}\int x^{m-n-1}X^{s+1}\,dx; \tag{2}$$

mittels dieser Formel verkleinert man m und vergrößert gleichzeitig s.

Wenn man ferner die rechte Seite der identischen Gleichung

$$\int x^{m-1} X^s dx = \int x^{m-1}(a + b x^n) X^{s-1} dx$$
$$= a\int x^{m-1} X^{s-1} dx + b\int x^{m+n-1} X^{s-1} dx$$

mit der rechten Seite der Gleichung (1) zusammenhält, so ist zunächst

$$\frac{x^m X^s}{m} - \frac{b n s}{m}\int x^{m+n-1} X^{s-1} dx$$
$$= a\int x^{m-1} X^{s-1} dx + b\int x^{m+n-1} X^{s-1} dx,$$

in dieser Gleichung schreiben wir $s + 1$ für s und sehen das erste Integral rechter Hand als Unbekannte an; es wird so:

$$\int x^{m-1} X^s dx = \frac{x^m X^{s+1}}{am} - \frac{b(m + ns + n)}{am}\int x^{m+n-1} X^s dx;$$

diese Reduktionsformel vergrößert m ohne s zu ändern. Drückt man das Integral rechter Hand durch die übrigen Größen aus und schreibt nachher $m - n$ für m, so ist:

$$(3) \qquad \int x^{m-1} X^s dx = \frac{x^{m-n} X^{s+1}}{b(m + ns)} - \frac{a(m-n)}{b(m + ns)}\int x^{m-n-1} X^s dx,$$

womit eine Verkleinerung von m ohne Änderung von s herbeigeführt wird.

Gehen wir wiederum von der identischen Gleichung aus:

$$\int x^{m-1} X^s dx = a\int x^{m-1} X^{s-1} dx + b\int x^{m+n-1} X^{s-1} dx,$$

so gibt die Anwendung der Formel (2) auf das Integral rechter Hand:

$$\int x^{m-1} X^s dx$$
$$= a\int x^{m-1} X^{s-1} dx + b\left[\frac{x^m X^s}{bns} - \frac{m}{bns}\int x^{m-1} X^s dx\right].$$

Durch Vereinigung der gleichartigen Größen folgt hieraus

$$(4) \qquad \int x^{m-1} X^s dx = \frac{x^m X^s}{m + ns} + \frac{ans}{m + ns}\int x^{m-1} X^{s-1} dx,$$

welche Formel zur Verkleinerung von s ohne Änderung von m dient. — Schreibt man noch $s + 1$ für s und reduziert die Gleichung (4) auf das Integral rechter Hand, so ergibt sich

$$\int x^{m-1} X^s dx = -\frac{x^m X^{s+1}}{an(s+1)} + \frac{m + n + ns}{an(s+1)}\int x^{m-1} X^{s+1} dx,$$

und hiermit ist die Möglichkeit geboten, s ohne Störung des m zu vergrößern.

Es versteht sich von selbst, daß man von diesen sechs Reduktionsformeln die benutzen wird, welche im gegebenen Falle am raschesten auf ein bereits bekanntes Integral führt. Wäre z. B. das zu entwickelnde Integral

$$\int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{a x - x^2}} = \int x^{k-\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

und darin k eine ganze positive Zahl, so liegt es am nächsten, durch fortschreitende Verkleinerung von k auf das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a x - x^2}} = \arcsin \frac{2x-a}{a} + \text{const.}$$

zurückzugehen; in diesem Falle ist also die Anwendung der Formel (3) angezeigt und man erhält dadurch

$$\int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{a x - x^2}} = -\frac{x^{k-1}\sqrt{a x - x^2}}{k} + \frac{a(2k-1)}{2k}\int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{a x - x^2}},$$

wie man auch aus § 70, III. finden kann. Ähnlicher Überlegungen bedarf es in jedem anderen Falle.

Zu bemerken ist noch, daß die obigen Reduktionsformeln für $m - n = 0$, sowie für $m + ns = 0$ nicht in Anspruch genommen werden dürfen, wie ein Rückblick auf ihre Herleitung leicht erkennen läßt. In diesen beiden Fällen können aber nach I. die Differentialformeln rational gemacht werden und bedürfen der genannten Reduktionsformeln nicht.

§ 73. Integration mittels unendlicher Reihen.

Wenn die bisherigen Mittel nicht hinreichen, um die Integration eines irrationalen Differentials auszuführen, so benutzt man gewöhnlich das in § 66 angegebene Verfahren und stellt das Integral als Summe einer unendlichen Reihe dar. Diese Methode gestattet häufig so mancherlei Wandlungen, daß einige Beispiele nicht überflüssig sein dürften.

a) Handelt es sich um das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2x^4}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2x^2}}\,dx,$$

worin α, β und x echte Brüche sein mögen, so kann man zwei verschiedene Wege gehen, je nachdem man nur einen der beiden unter dem Integralzeichen vorkommenden Faktoren in eine Reihe verwandelt oder beide Faktoren entwickelt.

Bei Anwendung des ersten Verfahrens ist es von Vorteil, denjenigen Faktor zu entwickeln, welcher den kleineren der beiden Brüche α und β enthält, weil die Reihe um so rascher konvergiert, je kleiner die Größe ist, nach deren Potenzen sie fortschreitet. Unter der Voraussetzung $\alpha^2 > \beta^2$ erhält man zufolge des Gesagten

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha^2 x^2)(1-\beta^2 x^2)}}$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} \left\{1 + \frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\beta^4 x^4 + \cdots\right\},$$

oder nach § 66, wenn man die einzelnen Integrale rechter Hand mit $X_0, X_2, X_4 \ldots$ bezeichnet und die verfügbaren Integrationskonstanten so wählt, daß alle Größen X an der Stelle $x = 0$ verschwinden,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha^2 x^2)(1-\beta^2 x^2)}} + \text{const.}$$
$$= X_0 + \frac{1}{2}\beta^2 X_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\beta^4 X_4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\beta^6 X_6 + \cdots$$

Das erste der Integrale $X_0, X_2, X_4 \ldots$ ist unmittelbar bekannt, nämlich

$$X_0 = \frac{\arcsin \alpha x}{\alpha};$$

zur Berechnung der übrigen dient die Rückgangsformel

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}{m\alpha^2} + \frac{m-1}{m\alpha^2}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}};$$

sie gibt, da alle X_n an der Stelle $x = 0$ verschwinden,

$$X_m = \frac{(m-1)X_{m-2} - x^{m-1}\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}{m\alpha^2},$$

worin der Reihe nach $m = 2, 4, 6 \ldots$ zu setzen ist.

Will man den zweiten der angedeuteten Wege gehen, so hat man die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\alpha^4 x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\alpha^6 x^6 + \cdots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2 x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\beta^4 x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\beta^6 x^6 + \cdots$$

miteinander zu multiplizieren; das Ergebnis ist von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2x^2)(1-\beta^2x^2)}} = C_0 + C_2x^2 + C_4x^4 + C_6x^6 + \cdots,$$

und zwar

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, \\ C_2 &= \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \\ C_4 &= \tfrac{1}{8}(3\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 3\beta^4) \\ C_6 &= \tfrac{1}{16}(5\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^4 + 5\beta^6) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Durch Integration erhält man hieraus nach § 66

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha^2x^2)(1-\beta^2x^2)}} = \frac{C_0x}{1} + \frac{C_2x^3}{3} + \frac{C_4x^5}{5} + \cdots,$$

wo nur noch eine Konstante beizufügen ist.

b) Als zweites Beispiel diene die Entwicklung des Integrals

$$\int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx, \qquad \varepsilon^2 < 1,\ x^2 < 1,$$

welches bei den geometrischen Anwendungen der Integralrechnung vorkommen wird. Ist ε ein kleiner echter Bruch höchstens $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so tut man am besten, nur den Zähler in eine Reihe zu verwandeln und zur Abkürzung

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = U_m = U_m(x), \quad U_m(0) = 0$$

zu setzen. Man findet

$$(1) \qquad \int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= \text{const.} + U_0 - \frac{U_2}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\frac{U_4}{4}\varepsilon^4 - \frac{1.3}{2.4}\frac{U_6}{6}\varepsilon^6 - \cdots,$$

und dabei geschieht die Berechnung der mit U bezeichneten Integrale nach den Formeln

$$U_0 = \arcsin x, \quad U_m = \frac{(m-1)\,U_{m-2} - x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}.$$

Wenn dagegen ε wenig von der Einheit abweicht, so besitzt die gefundene Reihe (1) eine so langsame Konvergenz, daß man eine sehr große Menge von Reihengliedern summieren müßte, um eine

nur mäßige Genauigkeit zu erreichen; dann sind folgende Transformationen von Nutzen.

Man hat identisch

$$\int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 x^2}{1-x^2}}\, dx = \int \sqrt{1+\frac{(1-\varepsilon^2)\, x^2}{1-x^2}}\, dx,$$

und hier läßt sich die Wurzel rechter Hand in eine konvergierende Reihe verwandeln, sobald

$$\frac{(1-\varepsilon^2)\, x^2}{1-x^2} \leqq 1, \quad \text{d. h.} \quad x^2 \leqq \frac{1}{2-\varepsilon^2}$$

ist; dies gibt

$$\int \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{(1-\varepsilon^2)\, x^2}{1-x^2} - \frac{1}{2\,.\,4} \frac{(1-\varepsilon^2)^2 x^4}{(1-x^2)^2} + \cdots \right\} dx.$$

Daß man hier gliedweise integrieren darf, ersieht man leicht, wenn man sich für den Augenblick

$$\frac{x^2}{1-x^2} = z^2 \quad \text{oder} \quad x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

gesetzt denkt; es wird hierdurch

$$\int \sqrt{1+\frac{(1-\varepsilon^2)\, x^2}{1-x^2}}\, dx = \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}} \sqrt{1+(1-\varepsilon^2)\, z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\, z^2 - \frac{1}{8}(1-\varepsilon^2)^2 z^4 + \cdots \right\}.$$

Die letzte Reihe schreitet nach Potenzen von z fort und daher dürfen ihre einzelnen Glieder nach § 66 integriert werden, wofern $(1-\varepsilon^2)\, z^2$ ein echter Bruch ist; durch Wiedereinsetzung des Wertes von z erhält man

$$(2) \quad \int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 x^2}{1-x^2}}\, dx = \text{const.} + x + \frac{1-\varepsilon^2}{2} V_1 - \frac{1}{2} \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4} V_2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \frac{(1-\varepsilon^2)^3}{6} V_3 - \cdots, \quad x^2 \leqq \frac{1}{2-\varepsilon^2},$$

wobei zur Abkürzung

$$\int \frac{x^{2k}\, dx}{(1-x^2)^k} = V_k = V_k(x), \quad V_k(0) = 0$$

gesetzt worden ist. Mit Hilfe der Reduktionsformel (2) in § 72 findet man leicht

$$V_1 = \frac{1}{2} \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x, \quad V_k = \frac{1}{2k-2} \left\{ \frac{x^{2k-1}}{(1-x^2)^{k-1}} - (2k-1)\, V_{k-1} \right\},$$

wonach die fortschreitende Berechnung von V_2, V_3 usw. keine Schwierigkeit bietet.

Im Falle x^2 die angegebene Grenze übersteigt, verliert die Formel (2) ihre Anwendbarkeit; man benutzt dann die identische Gleichung

$$\int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 x^2}{1-x^2}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-\varepsilon^2 x^2}}},$$

worin, wegen $x^2 < 1$, auch immer

$$\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-\varepsilon^2 x^2} < 1$$

und daher die Reihenentwicklung erlaubt ist. Dies gibt

$$\int \left\{1 + \frac{1}{2}\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-\varepsilon^2 x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{(1-\varepsilon^2)^2 x^4}{(1-\varepsilon^2 x^2)^2} + \cdots\right\} dx$$

und durch Integration der einzelnen Glieder, die wie oben zu rechtfertigen ist,

$$(3) \qquad \int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 x^2}{1-x^2}}\, dx = \text{const.} + x + \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2) W_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(1-\varepsilon^2)^2 W_2 + \cdots;$$

dabei ist

$$W_1 = \frac{1}{\varepsilon^3}\left\{\frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+\varepsilon x}{1-\varepsilon x}\right) - \varepsilon x\right\},$$

$$W_k = \frac{1}{(2k-2)\varepsilon^2}\left\{\frac{x^{2k-1}}{(1-\varepsilon^2 x^2)^{k-1}} - (2k-1) W_{k-1}\right\},$$

wie man mittels der Reduktionsformel (2) in § 72 leicht findet.

c) Es versteht sich von selbst, daß man die Integration mittels unendlicher Reihen auch in dem Falle anwenden kann, wo bereits auf anderem Wege der Wert des Integrals in geschlossener Form entwickelt ist; die nach beiden Methoden abgeleiteten Werte eines und desselben Integrals können sich nur um eine Konstante unterscheiden und lassen daher eine Vergleichung zu, welche jederzeit auf ein zur Theorie der Reihen gehörendes Ergebnis führt.

So hat man z. B. einerseits, wenn C, C_1, C_2 Konstante sind,

$$\int \frac{1}{1+x}\, dx = \lg(1+x) + C_1,$$

anderseits, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt,

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots + C_2,$$

mithin durch Vergleichung

$$\lg(1+x) + C = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Der Wert von $C = C_1 - C_2$ bestimmt sich durch den Sonderansatz $x = 0$; man findet $C = 0$ und kommt damit auf ein bekanntes Ergebnis zurück.

Nach demselben Verfahren läßt sich die Reihe für $\operatorname{arctg} x$ aus der Gleichung

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx,$$
$$x^2 < 1,$$

herleiten, ebenso die Reihe für $\arcsin x$ aus

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \left\{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots\right\} dx,$$
$$x^2 < 1.$$

Ein ähnliches Ergebnis liefert die Gleichung

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \left\{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \cdots\right\} dx,$$

d. i.

$$\lg(x + \sqrt{1+x^2}) + C = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Für $x = 0$ erhält man $C = 0$, mithin

$$\lg(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Kapitel XIII.

Integration transzendenter Funktionen.

§ 74. Differentiale mit Exponentialgrößen.

I. Enthält die zu integrierende Funktion nur Exponentialgrößen, ist also das Integral von der Form

$$\int f(e^{ax})\,dx,$$

so kann es mittels der Substitution

$$e^{ax} = z, \quad \text{mithin} \quad x = \frac{\lg z}{a}, \quad dx = \frac{1}{a}\frac{dz}{z}$$

auf ein anderes zurückgeführt werden, worin keine Exponentialgröße vorkommt; man erhält nämlich

$$\int f(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int f(z)\frac{dz}{z}.$$

Hiernach ist z. B.

$$\int \frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{z+\frac{1}{z}}\,\frac{dz}{z} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} z + \text{const.} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(e^{ax}) + \text{const.}$$

Als zweites Beispiel diene das Integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{ax}}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1+z}}\,\frac{dz}{z};$$

wenn $1 + z = u^2$ gesetzt wird, woraus $\sqrt{1+z} = u$, $z = u^2 - 1$ und $dz = 2u\,du$ folgen, verwandelt sich das letzte Integral in

$$\frac{2}{a}\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{a}\lg\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + \text{const.},$$

mithin ist durch Wiedereinsetzung der Werte von u und z

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{ax}}} = \frac{1}{a} \lg\left(\frac{\sqrt{1+e^{ax}}-1}{\sqrt{1+e^{ax}}+1}\right) + \text{const.}$$

II. Betrachten wir nun den Fall, wo das Differential Exponentialgrößen und Potenzen enthält. Die einfachste Form eines solchen Integrals ist

$$\int x^m e^{ax}\, dx,$$

und es liegt nahe, die Regel der Teilintegration

$$\int u v\, dx = u \int v\, dx - \int du \int v\, dx$$

darauf anzuwenden, indem man von der Fundamentalformel

$$(1) \qquad \int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + \text{const.}$$

Gebrauch macht; man findet so

$$(2) \qquad \int x^m e^{ax}\, dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} e^{ax}\, dx.$$

Im Fall m eine ganze positive Zahl ist, kann man durch wiederholte Anwendung dieser Formel, den Exponenten von x fortwährend verkleinernd, zuletzt auf das Integral (1) zurückkommen; in der Tat erhält man unter der gemachten Voraussetzung:

$$(3) \qquad \int x^m e^{ax}\, dx = \left[\frac{x^m}{a} - \frac{m x^{m-1}}{a^2} + \frac{m(m-1) x^{m-2}}{a^3} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 2 \cdot 1}{a^{m+1}}\right] e^{ax} + \text{const.}$$

Hiernach läßt sich auch das Integral

$$\int \varphi(x)\, e^{ax}\, dx$$

entwickeln, wenn $\varphi(x)$ unter der Form $A + Bx + Cx^2 + \cdots$ enthalten ist.

Setzt man $-m+1$ in der Gleichung (2) an die Stelle von m und rechnet das Integral rechter Hand aus, so gelangt man zu der Formel

$$(4) \qquad \int \frac{1}{x^m} e^{ax}\, dx = -\frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \int \frac{1}{x^{m-1}} e^{ax}\, dx,$$

welche für ganze m mit Ausnahme von $m = 1$ benutzt werden kann. Im letzteren Falle gibt die Formel ein unbrauchbares Resultat, und

es bleibt dann nichts übrig, als eine Reihenverwandlung vorzunehmen; vermöge der für alle x geltenden Gleichung

$$\frac{e^{ax}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{a}{1} + \frac{a^2 x}{1.2} + \frac{a^3 x^2}{1.2.3} + \cdots$$

erhält man, da die Potenzreihe nach § 66 gliedweise integriert werden darf,

$$(5) \qquad \int \frac{1}{x} e^{ax} dx = \text{const.} + \lg x + \frac{1}{1}\frac{ax}{1} + \frac{1}{2}\frac{(ax)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(ax)^3}{1.2.3} + \cdots,$$

und nunmehr lassen sich aus der Formel (4) für $m = 2, 3, \ldots$ die Werte der Integrale

$$\int \frac{1}{x^2} e^{ax} dx, \quad \int \frac{1}{x^3} e^{ax} dx, \ldots$$

der Reihe nach ableiten. Eine weitere Folgerung hiervon ist, daß das Integral

$$\int \psi(x) e^{ax} dx, \quad \text{worin} \quad \psi(x) = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \cdots,$$

jederzeit auf das in (5) entwickelte Integral zurückgeführt werden kann. Die linke Seite dieser Gleichung geht, wenn $a = 1$, $e^x = u$ gesetzt wird, in die Größe

$$\operatorname{li} u = \int \frac{du}{\lg u},$$

die man oft unter dem Namen Integrallogarithmus als neue Transzendente einführt.

Ist der Exponent von x ein Bruch, so kann man ihn zwar verkleinern, indem man die Formeln (2) oder (4) anwendet, je nachdem er positiv oder negativ ist; aber man wird zuletzt immer wieder zu einer Reihenentwicklung genötigt.

Das gegebene Integral sei z. B.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^x dx,$$

so kann man für den Fall eines echtgebrochenen x die Umwandlung

$$\int \left\{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots\right\} e^x dx$$

vornehmen und die einzelnen Glieder mittels der Formel (3) integrieren; ist dagegen $x > 1$, so wird man $x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ für $\sqrt{1+x^2}$ setzen und dem Integrale die Form:

$$\int \frac{1}{x}\left[1-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{x^6}+\cdots\right]e^x\,dx$$

geben, wo die Formeln (5) und (4) anwendbar sind.

§ 75. Logarithmische Differentiale.

Enthält das zu integrierende Differential nur Logarithmen in der Weise, daß

$$\int f(\lg z)\,dz$$

das fragliche Integral ist, so leistet die Substitution

$$\lg z = y, \quad \text{also} \quad z = e^y, \quad dz = e^y\,dy$$

gute Dienste; man erhält nämlich

$$\int f(\lg z)\,dz = \int f(y)\,e^y\,dy,$$

wo nun die Entwicklungen des vorigen Paragraphen benutzt werden können.

So hat man z. B. für ein ganzes positives m

$$\int (\lg z)^m\,dz = \int y^m e^y\,dy$$

$$= [y^m - m\,y^{m-1} + m(m-1)\,y^{m-2} - \cdots + (-1)^m m(m-1)\ldots 2.1]\,e^y,$$

und indem man den Wert von y wieder einsetzt:

$$\int (\lg z)^m dz = [(\lg z)^m - m(\lg z)^{m-1} + m(m-1)(\lg z)^{m-2} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^m m(m-1)\ldots 2.1]\,z + \text{const.}$$

Auf gleiche Weise erhält man mittels der Formel (5) des vorigen Paragraphen für den Integrallogarithmus $\operatorname{li} z$

$$\int \frac{dz}{\lg z} = \text{const.} + \lg(\lg z) + \frac{1}{1}\frac{\lg z}{1} + \frac{1}{2}\frac{(\lg z)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(\lg z)^3}{1.2.3} + \cdots$$

und aus der Formel (4):

$$\int \frac{dz}{(\lg z)^m} = -\frac{z}{(m-1)(\lg z)^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{dz}{(\lg z)^{m-1}}.$$

Die Substitution $z = e^y$ ist auch bei dem allgemeineren Integrale

$$\int z^\mu f(\lg z)\,dz$$

vorteilhaft anwendbar; sie gibt nämlich

$$(1)\qquad \int z^{\mu} f(\lg z)\, dz = \int e^{(\mu+1)y} f(y)\, dy.$$

So ist z. B. für den Sonderfall $\mu = -1$, $f(\lg z) = (\lg z)^m$:

$$\int \frac{1}{z} (\lg z)^m\, dz = \int y^m\, dy = \frac{y^{m+1}}{m+1} + \text{const.}$$

$$= \frac{(\lg z)^{m+1}}{m+1} + \text{const.}, \quad (m \gtrless -1),$$

und in dem Ausnahmefalle $m = -1$:

$$\int \frac{1}{z \lg z}\, dz = \int \frac{1}{y}\, dy = \lg y + \text{const.}$$

$$= \lg(\lg z) + \text{const.}$$

Für ein von -1 verschiedenes μ und ein ganzes positives m liefert die Gleichung (1) zunächst:

$$\int z^{\mu} (\lg z)^m\, dz = \int e^{(\mu+1)y} y^m\, dy,$$

nachher durch Anwendung der Formel (3) des vorigen Paragraphen und durch Wiedereinsetzung des Wertes von y:

$$\int z^{\mu} (\lg z)^m\, dz = \left[\frac{(\lg z)^m}{\mu+1} - \frac{m(\lg z)^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1)(\lg z)^{m-2}}{(\mu+1)^3} - \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 2 \,.\, 1}{(\mu+1)^{m+1}}\right] z^{\mu+1} + \text{const.}$$

In allen übrigen Fällen müssen die Integrationen logarithmischer Differentiale durch Reihenentwicklungen ausgeführt werden.

Als Beispiel diene das Integral

$$\int \frac{\lg(1+z)}{z}\, dz,$$

worin $1 + z$ positiv, mithin z zwischen -1 und $+\infty$ enthalten sein muß, wenn $\lg(1+z)$ reelle Werte haben soll. Behufs der Reihenentwicklung sind hier die beiden Fälle $-1 < z < +1$ und $z > +1$ zu unterscheiden; im ersten Falle ist

$$\lg(1+z) = \tfrac{1}{1} z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \cdots,$$

folglich, da Potenzreihen nach § 41 gliedweise differenziert werden dürfen,

$$\int \frac{\lg(1+z)}{z}\, dz = \text{const.} + \frac{z}{1^2} - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} - \cdots,$$

$$-1 < z < +1.$$

Für den zweiten Fall benutzt man die Transformation

$$\lg(1+z) = \lg z + \lg\left(1+\frac{1}{z}\right)$$
$$= \lg z + \frac{1}{1}\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{z^3} - \cdots$$

und erhält

$$\int \frac{\lg(1+z)}{z}\,dz$$
$$= \text{const.} + \frac{1}{2}(\lg z)^2 - \frac{1}{1^2 z} + \frac{1}{2^2 z^2} - \frac{1}{3^2 z^3} + \cdots, \quad z > 1.$$

Die Integration der einzelnen Glieder ist hier erlaubt, weil die Substitution $1/z = x$ zu einer nach Potenzen von x fortgehenden Reihe führen würde.

§ 76. Rein goniometrische Differentiale.

I. Wenn das gegebene Differential nur aus den verschiedenen goniometrischen Funktionen eines und desselben Bogens besteht, wenn mithin das gesuchte Integral unter der Form

$$\int F(\sin u, \cos u, \operatorname{tg} u, \ldots)\,du$$

enthalten ist, so kann man sich zuerst der Gleichungen

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}, \qquad \operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \quad \text{usw.}$$

bedienen, um alle vorkommenden Funktionen durch $\sin u$ auszudrücken; das Integral erhält dann die Form

$$\int f(\sin u)\,du,$$

wobei immer vorausgesetzt werden darf, daß u zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten sei. Mit Hilfe der Substitution

$$\sin u = x, \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ergibt sich nun

$$\int f(\sin u)\,du = \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

und damit ist das Integral auf ein anderes zurückgeführt, welches keine goniometrischen Funktionen mehr enthält.

Nach diesem Verfahren hat man z. B.

$$\int \sec u\,du = \int \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int \frac{dx}{1-x^2}$$
$$= \frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right)$$

und bei Anwendung einer bekannten goniometrischen Formel

(1) $$\int \sec u\,du = \lg \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u\right) + \text{const.}$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$\int \operatorname{cosec} u\,du = \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\lg\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = -\lg\left(\frac{1+\cos u}{\sin u}\right)$$

oder kürzer

(2) $$\int \operatorname{cosec} u\,du = \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}u + \text{const.}$$

Mit Hilfe der genannten Substitution erhält man auch

$$\int \sin^p u \cos^q u\,du = \int x^p (1-x^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dx;$$

auf das rechter Hand stehende Integral sind die sechs Reduktionsformeln des § 72 anwendbar, wobei $a = 1$, $b = -1$, $m = p+1$, $n = 2$, $s = \frac{1}{2}(q-1)$ zu setzen ist. Führt man nachher die Werte von $x = \sin u$ und $dx = \cos u\,du$ wieder ein, so gelangt man zu folgenden Gleichungen:

(3) $$\int \sin^p u \cos^q u\,du$$
$$= \frac{\sin^{p+1} u \cos^{q-1} u}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int \sin^{p+2} u \cos^{q-2} u\,du$$
$$= -\frac{\sin^{p-1} u \cos^{q+1} u}{q+1} + \frac{p-1}{q+1}\int \sin^{p-2} u \cos^{q+2} u\,du$$
$$= \frac{\sin^{p+1} u \cos^{q+1} u}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}\int \sin^{p+2} u \cos^{q} u\,du$$
$$= -\frac{\sin^{p-1} u \cos^{q+1} u}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} u \cos^{q} u\,du$$
$$= \frac{\sin^{p+1} u \cos^{q-1} u}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \sin^{p} u \cos^{q-2} u\,du$$
$$= -\frac{\sin^{p+1} u \cos^{q+1} u}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1}\int \sin^{p} u \cos^{q+2} u\,du.$$

Mittels dieser Formeln bringt man das ursprüngliche Integral auf ein anderes derselben Art zurück, worin p oder q oder beide um zwei größere oder kleinere Werte besitzen; die fortgesetzte Anwendung der genannten Reduktionsformeln führt schließlich auf ein Integral, worin die Exponenten von $\sin u$ und $\cos u$ nicht außerhalb der Strecke von -1 bis $+1$ liegen. Sind p und q positive oder negative ganze Zahlen, so kommt man zuletzt auf eines der folgenden Integrale

$$\int du, \qquad \int \sin u\, du, \qquad \int \cos u\, du,$$

$$\int \sin u \cos u\, du, \qquad \int \frac{du}{\sin u}, \qquad \int \frac{du}{\cos u},$$

$$\int \operatorname{tg} u\, du, \qquad \int \cot u\, du, \qquad \int \frac{du}{\sin u \cos u},$$

die sämtlich durch die Substitution $\sin u = x$ entwickelt werden können. So erhält man z. B., wenn p und q positive ganze Zahlen bezeichnen,

(4) für gerade p,

$$\int \sin^p u\, du = -\frac{\cos u}{p}\left\{\sin^{p-1} u + \frac{p-1}{p-2}\sin^{p-3} u \right.$$
$$\left. + \frac{(p-1)(p-3)}{(p-2)(p-4)}\sin^{p-5} u + \cdots + \frac{(p-1)(p-3)\ldots 3}{(p-2)(p-4)\ldots 2}\sin u\right\}$$
$$+ \frac{(p-1)(p-3)\ldots 3.1}{p(p-2)(p-4)\ldots 4.2}u + \text{const.};$$

(5) für ungerade p,

$$\int \sin^p u\, du = -\frac{\cos u}{p}\left\{\sin^{p-1} u + \frac{p-1}{p-2}\sin^{p-3} u \right.$$
$$\left. + \frac{(p-1)(p-3)}{(p-2)(p-4)}\sin^{p-5} u + \cdots + \frac{(p-1)(p-3)\ldots 4.2}{(p-2)(p-4)\ldots 3.1}\right\}$$
$$+ \text{const.};$$

(6) für gerade q,

$$\int \cos^q u\, du = \frac{\sin u}{q}\left\{\cos^{q-1} u + \frac{q-1}{q-2}\cos^{q-3} u \right.$$
$$\left. + \frac{(q-1)(q-3)}{(q-2)(q-4)}\cos^{q-5} u + \cdots + \frac{(q-1)(q-3)\ldots 3}{(q-2)(q-4)\ldots 2}\cos u\right\}$$
$$+ \frac{(q-1)(q-3)\ldots 3.1}{q(q-2)(q-4)\ldots 4.2}u + \text{const.};$$

(7) für ungerade q,

$$\int \cos^q u\,du = \frac{\sin u}{q}\Big\{\cos^{q-1}u + \frac{q-1}{q-2}\cos^{q-3}u$$
$$+ \frac{(q-1)(q-3)}{(q-2)(q-4)}\cos^{q-5}u + \cdots + \frac{(q-1)(q-3)\ldots 4.2}{(q-2)(q-4)\ldots 3.1}\Big\}$$
$$+ \text{const.};$$

(8) für gerade p,

$$\int \operatorname{tg}^p u\,du = \frac{\operatorname{tg}^{p-1}u}{p-1} - \frac{\operatorname{tg}^{p-3}u}{p-3} + \frac{\operatorname{tg}^{p-5}u}{p-5} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\frac{1}{2}p-1}\frac{\operatorname{tg} u}{1} + (-1)^{\frac{1}{2}p} u + \text{const.};$$

(9) für ungerade p,

$$\int \operatorname{tg}^p u\,du = \frac{\operatorname{tg}^{p-1}u}{p-1} - \frac{\operatorname{tg}^{p-3}u}{p-3} + \frac{\operatorname{tg}^{p-5}u}{p-5} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)}\frac{\operatorname{tg}^2 u}{2} + (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)}\lg\cos u + \text{const.}$$

Beiläufig sei noch bemerkt, daß sich die Integrale

$$\int \sin^p u\,du \quad \text{und} \quad \int \cos^q u\,du$$

auch auf andere Weise entwickeln lassen. Bei geraden m hat man nämlich nach § 53 (11)

$$(-1)^{\frac{1}{2}m}\,2^{m-1}\sin^m u$$
$$= \binom{m}{0}\cos m u - \binom{m}{1}\cos(m-2)u + \binom{m}{2}\cos(m-4)u - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1}\binom{m}{\frac{1}{2}m-1}\cos 2u + (-1)^{\frac{1}{2}m}\binom{m}{\frac{1}{2}m}$$

und daraus folgt sehr leicht

(10) für gerade m,

$$\int \sin^m u\,du = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^{m-1}}\Big\{\frac{\sin m u}{m} - \binom{m}{1}\frac{\sin(m-2)u}{m-2}$$
$$+ \binom{m}{2}\frac{\sin(m-4)u}{m-4} - \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1}\binom{m}{\frac{1}{2}m-1}\frac{\sin 2u}{2}$$
$$+ (-1)^{\frac{1}{2}m}\binom{m}{\frac{1}{2}m}\frac{u}{2}\Big\} + \text{const.}$$

Auf ähnliche Weise erhält man

(11) für ungerade m,

$$\int \sin^m u\, du = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}}{2^{m-1}} \left\{ \frac{\cos m u}{m} - \binom{m}{1} \frac{\cos (m-2) u}{m-2} \right.$$

$$\left. + \binom{m}{2} \frac{\cos (m-4) u}{m-4} - \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \binom{m}{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{\cos u}{1} \right\} + \text{const.}:$$

(12) für gerade m,

$$\int \cos^m u\, du = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{\sin m u}{m} + \binom{m}{1} \frac{\sin (m-2) u}{m-2} \right.$$

$$\left. + \binom{m}{2} \frac{\sin (m-4) u}{m-4} + \cdots + \binom{m}{\frac{1}{2}m-1} \frac{\sin 2u}{2} + \binom{m}{\frac{1}{2}m} \frac{u}{2} \right\} + \text{const.};$$

(13) für ungerade m,

$$\int \cos^m u\, du = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{\sin m u}{m} + \binom{m}{1} \frac{\sin (m-2) u}{m-2} \right.$$

$$\left. + \binom{m}{2} \frac{\sin (m-4) u}{m-4} + \cdots + \binom{m}{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{\sin u}{1} \right\} + \text{const.}$$

II. Eine zweite Umwandlung des Integrals

$$\int F(\sin u, \cos u, \operatorname{tg} u, \ldots)\, du$$

besteht darin, daß man alle vorkommenden goniometrischen Funktionen durch $\cos u$ ausdrückt, wodurch das Integral die Form

$$\int \varphi (\cos u)\, du$$

erhält, und nachher

$$\cos u = y, \quad du = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

substituiert; damit gelangt man zu der Gleichung

$$\int \varphi (\cos u)\, du = -\int \frac{\varphi(y)\, dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Im wesentlichen ist diese Reduktion von der vorigen nicht verschieden und wird daher keiner Erläuterung durch Beispiele bedürfen.

III. Man kann drittens das Integral

$$\int F(\sin u, \cos u, \operatorname{tg} u, \ldots)\, du$$

auch so behandeln, daß man erst alle goniometrischen Funktionen durch $\operatorname{tg} u$ ausdrückt, wodurch die Form

$$\int \psi(\operatorname{tg} u)\, du$$

entsteht, und nachher die Substitution

$$\operatorname{tg} u = z, \quad du = \frac{dz}{1+z^2}$$

vornimmt; letztere gibt

$$\int \psi(\operatorname{tg} u)\, du = \int \frac{\psi(z)\, dz}{1+z^2}.$$

Diese Transformation bietet den Vorteil, daß sie zu einer rationalen Form führt, wenn $\psi(z)$ eine rationale Funktion ist.

Beispielsweise hat man

$$\int \operatorname{tg}^p u\, du = \int \frac{z^p\, dz}{1+z^2},$$

woraus die Formeln (8) und (9) hervorgehen, sobald gerade und ungerade p unterschieden werden.

Ein zweites Beispiel ist

$$\int \frac{du}{\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u} = \int \frac{dz}{\alpha^2 + \beta^2 z^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta z}{\alpha}$$
$$= \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta \operatorname{tg} u}{\alpha} + \text{const.},$$

übereinstimmend mit der Grundformel (20) in § 64.

Nach demselben Verfahren ergibt sich

$$(14) \quad \int \frac{\cos^2 u\, du}{(\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u)^2} = \frac{\cos u \sin u}{2\alpha^2(\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u)}$$
$$+ \frac{1}{2\alpha^3\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta \operatorname{tg} u}{\alpha} + \text{const.},$$

$$(15) \quad \int \frac{\sin^2 u\, du}{(\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u)^2} = -\frac{\cos u \sin u}{2\beta^2(\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u)}$$
$$+ \frac{1}{2\alpha\beta^3} \operatorname{arctg} \frac{\beta \operatorname{tg} u}{\alpha} + \text{const.},$$

und durch Addition der Formeln (14) und (15)

$$(16) \quad \int \frac{du}{(\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u)^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha^2\beta^2} \frac{\cos u \sin u}{\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u}$$
$$+ \frac{\beta^2 + \alpha^2}{2\alpha^3\beta^3} \operatorname{arctg} \frac{\beta \operatorname{tg} u}{\alpha} + \text{const.}$$

IV. Als letzte und meistens zweckmäßigste Transformation des Integrals

$$\int F(\sin u,\ \cos u,\ \operatorname{tg} u,\ \ldots)\, du$$

erwähnen wir diejenige, welche aus der Substitution

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u = t$$

hervorgeht. Zufolge derselben ist nämlich

$$\sin u = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{2t}{1-t^2}, \ldots$$

$$du = \frac{2\,dt}{1+t^2};$$

das obige Integral erhält jetzt die Form

$$\int F\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1-t^2},\ \ldots\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

und diese ist von selbst rational, wenn in der Funktion F ursprünglich keine Wurzeln vorkommen.

Hiernach ergibt sich z. B.

$$\int \frac{du}{\alpha\cos u + \beta\sin u + \gamma} = 2\int \frac{dt}{\gamma + \alpha + 2\beta t + (\gamma - \alpha)t^2};$$

die Integration in Beziehung auf t hat keine Schwierigkeit und liefert, wenn $\alpha \lesseqgtr \gamma$ vorausgesetzt und der Wert $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}u$ wieder eingesetzt wird,

(17) $$\int \frac{du}{\alpha\cos u + \beta\sin u + \gamma}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}} \operatorname{arctg} \frac{\beta + (\gamma - \alpha)\operatorname{tg}\frac{1}{2}u}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}} + \text{const.}, \quad \alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2,$$

$$= -\frac{2}{\beta + (\gamma - \alpha)\operatorname{tg}\frac{1}{2}u} + \text{const.}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}} \lg\left(\frac{\beta + (\gamma - \alpha)\operatorname{tg}\frac{1}{2}u - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}{\beta + (\gamma - \alpha)\operatorname{tg}\frac{1}{2}u + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}\right) + \text{const.},$$
$$\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2.$$

In dem Sonderfalle $\gamma = \alpha$ verlieren diese Formeln ihre Anwendbarkeit; es ist dann

$$\int \frac{du}{\alpha(1 + \cos u) + \beta\sin u} = \int \frac{dt}{\alpha + \beta t} = \frac{1}{\beta}\lg(\alpha + \beta t) + \text{const.}$$
$$= \frac{1}{\beta}\lg(\alpha + \beta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u) + \text{const.}$$

§ 77. Gemischt goniometrische Differentiale.

I. Wir betrachten zunächst den Fall, wo Sinus oder Kosinus in Verbindung mit Potenzen vorkommen, wie z. B. in dem Integrale

$$\int u^m \sin \beta u \, du.$$

Durch Anwendung der Teilintegration ergibt sich sehr leicht

$$\int u^m \sin \beta u \, du = -\frac{u^m \cos \beta u}{\beta} + \frac{m}{\beta} \int u^{m-1} \cos \beta u \, du;$$

ferner ist, wenn man dasselbe Verfahren auf das letzte Integral anwendet,

$$\int u^{m-1} \cos \beta u \, du = \frac{u^{m-1} \sin \beta u}{\beta} - \frac{m-1}{\beta} \int u^{m-2} \sin \beta u \, du,$$

mithin durch Substitution von dieser Gleichung in die vorhergehende

$$(1) \qquad \int u^m \sin \beta u \, du = -\frac{u^m \cos \beta u}{\beta} + \frac{m u^{m-1} \sin \beta u}{\beta^2} - \frac{m(m-1)}{\beta^2} \int u^{m-2} \sin \beta u \, du.$$

Hiernach kann das gesuchte Integral auf ein anderes zurückgeführt werden, welches von derselben Gattung und worin der Exponent von u um 2 kleiner ist. Wendet man die Formel (1) im Falle eines ganzen positiven m mehrmals nacheinander an, so kommt man schließlich auf eines der beiden Integrale

$$\int \sin \beta u \, du = -\frac{\cos \beta u}{\beta} + \text{const.},$$

$$\int u \sin \beta u \, du = -\frac{u \cos \beta u}{\beta} + \frac{\sin \beta u}{\beta^2} + \text{const.},$$

deren erstes unmittelbar bekannt ist, und deren zweites aus der Gleichung (1) für $m = 1$ folgt.

Setzt man in der vorigen Reduktionsformel $m = -n + 2$ und sieht das Integral rechter Hand als Unbekannte an, so erhält man

$$(2) \qquad \int \frac{\sin \beta u}{u^n} du = -\frac{\sin \beta u}{(n-1) u^{n-1}} - \frac{\beta \cos \beta u}{(n-1)(n-2) u^{n-2}} - \frac{\beta^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\sin \beta u}{u^{n-2}} du.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ ist diese Formel unbrauchbar und es bleibt dann nichts übrig, als mit Hilfe unendlicher Reihen zu integrieren. Im ersten Falle gibt die Anwendung der Sinusreihe

$$(3) \quad \int \frac{\sin \beta u}{u} d u = C + \frac{1}{1} \frac{\beta u}{1} - \frac{1}{3} \frac{\beta^3 u^3}{1.2.3} + \frac{1}{5} \frac{\beta^5 u^5}{1.2 \ldots 5} - \cdots$$

im zweiten Falle hat man zunächst durch Teilintegration

$$(4) \quad \int \frac{\sin \beta u}{u^2} d u = -\frac{\sin \beta u}{u} + \beta \int \frac{\cos \beta u}{u} d u,$$

und vermöge der Kosinusreihe

$$(5) \quad \int \frac{\cos \beta u}{u} d u = C + \lg u - \frac{1}{2} \frac{\beta^2 u^2}{1.2} + \frac{1}{4} \frac{\beta^4 u^4}{1.2 \ldots 4} - \cdots$$

Die Formel (2) dient nun, um die Integrale

$$\int \frac{\sin \beta u}{u^3} d u, \quad \int \frac{\sin \beta u}{u^4} d u \quad \text{usw.}$$

auf die Integrale (3) und (5) zurückzuführen.

Ist der Exponent von u weder eine positive noch eine negative ganze Zahl, so läßt er sich zwar mittels der Formeln (1) und (2) vergrößern oder verkleinern; am Ende wird man aber doch zur Integration durch Reihen greifen müssen.

Die nämlichen Betrachtungen gelten fast wörtlich für das Integral

$$\int u^m \cos \beta u d u$$

und liefern zunächst die Reduktionsformel

$$(6) \quad \int u^m \cos \beta u d u = \frac{u^m \sin \beta u}{\beta} + \frac{m u^{m-1} \cos \beta u}{\beta^2} - \frac{m(m-1)}{\beta^2} \int u^{m-2} \cos \beta u d u,$$

welche bei ganzen positiven m auf eines der beiden Integrale

$$\int \cos \beta u d u = \frac{\sin \beta u}{\beta} + \text{const.},$$

$$\int u \cos \beta u d u = \frac{u \sin \beta u}{\beta} + \frac{\cos \beta u}{\beta^2} + \text{const.}$$

zurückführt. Für $m = -n + 2$ ergibt sich durch Umkehrung der Formel (6)

$$(7) \quad \int \frac{\cos \beta u}{u^n} d u = -\frac{\cos \beta u}{(n-1) u^{n-1}} + \frac{\beta \sin \beta u}{(n-1)(n-2) u^{n-2}} - \frac{\beta^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\cos \beta u}{u^{n-2}} d u.$$

Auf die Sonderfälle $n = 1$ und $n = 2$ ist diese Formel nicht anwendbar; im ersten Falle benutzt man die unter (5) angegebene Reihe, im zweiten Falle hat man erst durch Teilintegration

$$\int \frac{\cos\beta u}{u^2} du = -\frac{\cos\beta u}{u} - \beta \int \frac{\sin\beta u}{u} du \tag{8}$$

und entwickelt dann das Integral rechter Hand nach (3). Im übrigen dient die Formel (7), um die Integrale

$$\int \frac{\cos\beta u}{u^3} du, \quad \int \frac{\cos\beta u}{u^4} du \quad \text{usw.}$$

auf die unter (3) und (5) betrachteten Integrale zurückzuführen. Ist der Exponent von u weder eine positive noch eine negative ganze Zahl, so kann man ihn zwar vergrößern oder verkleinern, muß aber schließlich doch Reihenentwicklungen benutzen.

Das Gesamtergebnis dieser Untersuchungen lautet dahin, daß Integrale von den Formen

$$\int f(u) \sin\beta u\, du \quad \text{und} \quad \int f(u) \cos\beta u\, du$$

in endlicher Gestalt ausführbar sind, wenn

$$f(u) = A + Bu + Cu^2 + \cdots + Ku^k$$

ist, und daß sie auf die dem Integrallogarithmus verwandten Integrale (3) und (5) zurückkommen, wenn $f(u)$ unter der Form

$$f(u) = A + \frac{B}{u} + \frac{C}{u^2} + \cdots + \frac{K}{u^k}$$

enthalten ist.

II. Wir betrachten zweitens die Kombination der Exponentialgröße mit Sinus oder Kosinus, nämlich die beiden Integrale

$$P = \int e^{\alpha u} \sin\beta u\, du \quad \text{und} \quad Q = \int e^{\alpha u} \cos\beta u\, du.$$

Durch Teilintegration ergibt sich

$$P = e^{\alpha u}\left(-\frac{\cos\beta u}{\beta}\right) + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha u} \cos\beta u\, du,$$

d. i.

$$P = \frac{-e^{\alpha u}\cos\beta u + \alpha Q}{\beta},$$

und entsprechend, wenn man ebenso mit Q verfährt,

$$Q = \frac{+e^{\alpha u}\sin\beta u - \alpha P}{\beta};$$

die zwei erhaltenen Gleichungen bestimmen die beiden Unbekannten P und Q, nämlich

$$(9)\qquad \int e^{\alpha u} \sin \beta u \, du = \frac{e^{\alpha u}(\alpha \sin \beta u - \beta \cos \beta u)}{\alpha^2 + \beta^2} + \text{const.},$$

$$(10)\qquad \int e^{\alpha u} \cos \beta u \, du = \frac{e^{\alpha u}(\alpha \cos \beta u + \beta \sin \beta u)}{\alpha^2 + \beta^2} + \text{const.}$$

III. Die beiden allgemeineren Integrale

$$\int u^m e^{\alpha u} \sin \beta u \, du \quad \text{und} \quad \int u^m e^{\alpha u} \cos \beta u \, du$$

gestatten eine ähnliche Behandlung. Bezeichnet man nämlich das erste mit P_m, das zweite mit Q_m, so findet man durch Teilintegration und unter Benutzung der Formeln (9) und (10)

$$P_m = \frac{u^m e^{\alpha u}(\alpha \sin \beta u - \beta \cos \beta u) - m\alpha P_{m-1} + m\beta Q_{m-1}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$Q_m = \frac{u^m e^{\alpha u}(\alpha \cos \beta u + \beta \sin \beta u) - m\alpha Q_{m-1} - m\beta P_{m-1}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Damit sind die gesuchten Integrale auf zwei andere derselben Art zurückgeführt, worin der Exponent von u um eine Einheit verringert ist. Bei ganzen positiven m läßt sich diese Operation m-mal anwenden und dann erhält man P_m und Q_m ausgedrückt, durch P_0 und Q_0, welche letzteren Integrale mit den unter (9) und (10) entwickelten identisch sind.

Hieraus folgt noch, daß die Werte der Integrale

$$\int f(u) e^{\alpha u} \sin \beta u \, du \quad \text{und} \quad \int f(u) e^{\alpha u} \cos \beta u \, du$$

in geschlossener Form dargestellt werden können, wenn $f(u)$ eine ganze rationale Funktion von u ist.

Dasselbe gilt von den Integralen

$$\int f(u) e^{\alpha u} \sin^p u \, du \quad \text{und} \quad \int f(u) e^{\alpha u} \cos^p u \, du,$$

falls p eine ganze positive Zahl ist. Mittels der Formeln (9) bis (12) in § 53 läßt sich nämlich jede ganze Potenz von $\sin u$ oder $\cos u$ in eine endliche Reihe der Sinus oder Kosinus von Vielfachen des Bogens u auflösen, und dann ist jedes einzelne Glied nach den vorigen Formeln integrierbar. So hat man z. B.

$$\int f(u) e^{\alpha u} \cos^6 u \, du$$

$$= \tfrac{1}{32} \int f(u) e^{\alpha u} (\cos 6u + 6 \cos 4u + 15 \cos 2u + 10) \, du,$$

wodurch man auf vier einzelne, unter der Form

$$\int f(u)\, e^{\alpha u} \cos \beta u\, du$$

enthaltene Integrale zurückkommt.

In allen Fällen, welche hier nicht erörtert wurden, ist die Hilfe unendlicher Reihen in Anspruch zu nehmen.

§ 78. Cyklometrische Differentiale.

Enthält das gegebene Differential eine cyklometrische Funktion allein, so ist es leicht auf ein goniometrisches Differential zurückzuführen; mittels der Substitution

$$\arcsin x = u, \quad x = \sin u, \quad dx = \cos u\, du$$

erhält man nämlich ohne weiteres

$$(1) \qquad \int f(\arcsin x)\, dx = \int f(u) \cos u\, du.$$

Nicht minder einfach ist die Ableitung der folgenden Formeln:

$$\int f(\arccos x)\, dx = -\int f(u) \sin u\, du, \quad u = \arccos x,$$

$$\int f(\operatorname{arctg} x)\, dx = \int f(u) \sec^2 u\, du, \quad u = \operatorname{arctg} x,$$

$$\int f(\operatorname{arccot} x)\, dx = -\int f(u) \csc^2 u\, du, \quad u = \operatorname{arccot} x.$$

So hat man z. B. nach der Formel (1) und nach der Formel (10) des vorigen Paragraphen

$$\int e^{\alpha \arcsin x}\, dx = \int e^{\alpha u} \cos u\, du = \frac{\alpha \cos u + \sin u}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha u} + \text{const.},$$

mithin rückwärts für $\sin u = x$, $\cos u = \sqrt{1 - x^2}$:

$$\int e^{\alpha \arcsin x}\, dx = \frac{\alpha \sqrt{1 - x^2} + x}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha \arcsin x} + \text{const.}$$

Auf gleiche Weise würden sich die beiden Integrale

$$\int (\arcsin x)^m\, dx \quad \text{und} \quad \int (\arccos x)^m\, dx$$

mittels der Ausdrücke P_m und Q_m des vorigen Paragraphen entwickeln lassen.

Leicht integrierbar sind auch die Differentiale von der Form $f(x)\, \psi(x)\, dx$, wenn $\psi(x)$ eine cyklometrische Funktion und $f(x)$ so beschaffen ist, daß das Integral von $f(x)\, dx$ eine algebraische Funktion bildet; in der Tat genügt unter diesen Voraussetzungen die Teilintegration des gegebenen Differentials, um sogleich auf das

Integral eines algebraischen Ausdruckes zu kommen. Man hat nämlich, wenn $\psi(x) = \arcsin x$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\int \arcsin x\, f(x)\, dx = \arcsin x \int f(x)\, dx - \int d \arcsin x \int f(x)\, dx$$

oder

$$(2) \quad \int f(x) \arcsin x\, dx = \arcsin x \int f(x)\, dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x)\, dx;$$

mit gleicher Leichtigkeit sind die folgenden Formeln entwickelbar:

$$\int f(x) \arccos x\, dx = \arccos x \int f(x)\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x)\, dx,$$

$$(3) \quad \int f(x) \operatorname{arctg} x\, dx = \operatorname{arctg} x \int f(x)\, dx - \int \frac{dx}{1-x^2} \int f(x)\, dx,$$

$$\int f(x) \operatorname{arccot} x\, dx = \operatorname{arccot} x \int f(x)\, dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \int f(x)\, dx.$$

So ist z. B. in dem Sonderfalle $f(x) = 1$ nach der Formel (2):

$$\int \arcsin x\, dx = \arcsin x \,.\, x - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, x$$
$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \text{const.},$$

und nach (3):

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = \operatorname{arctg} x \,.\, x - \int \frac{dx}{1+x^2}\, x$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2} \lg(1+x^2) + \text{const.};$$

überhaupt allgemeiner für $f(x) = x^{m-1}$:

$$\int x^{m-1} \arcsin x\, dx = \frac{x^m \arcsin x}{m} - \frac{1}{m} \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int x^{m-1} \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{m} - \frac{1}{m} \int \frac{x^m\, dx}{1-x^2},$$

wo die rechter Hand vorkommenden Integrationen bei ganzem positiven m jederzeit ausführbar sind.

Ein etwas zusammengesetzteres Beispiel ist folgendes. Man hat zunächst nach (3) die Formel

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg} x\, dx = - \operatorname{arctg} x \,.\, \sqrt{1-x^2} + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\, dx,$$

ferner

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx = \int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int \left\{ \frac{2}{1+x^2} - 1 \right\} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2 \int \frac{1}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x.$$

Schafft man das Wurzelzeichen in dem rechter Hand befindlichen Integrale weg (§ 71) und integriert nachher, so findet sich:

$$\int \frac{1}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

und durch Substitution dieses Wertes:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg} x \, dx = -\sqrt{1-x^2} \operatorname{arctg} x$$

$$+ \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + \text{const.}$$

Läßt sich keine der erwähnten Methoden anwenden, so muß man wie immer die Integration durch unendliche Reihen zu bewerkstelligen suchen.

Kapitel XIV.

Geometrische Anwendungen der einfachen Integration.

§ 79. Bestimmte Integrale und Quadraturen.

Zur häufigst vorkommenden geometrischen Anwendung der Integration, der Bestimmung des Inhalts krummlinig begrenzter ebener Flächenstücke, führt die in § 63 gegebene Näherungsformel

$$F(x) - F(x_0) = \sum \varDelta x \,.\, f(x), \tag{1}$$

in der $F'(x) = f(x)$, also

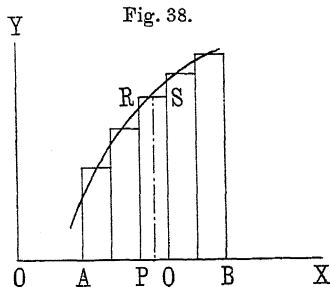
$$F(x) + C = \int f(x)\, dx$$

sei; der genaue Sinn der Formel wird durch die Gleichung

$$F(x) - F(x_0) = \lim \sum_{\nu}^{0, n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) f(\xi_\nu),$$

$$x_n = x, \quad x_\nu \leqq \xi_\nu \leqq x_{\nu+1}, \quad a \leqq x_0 < x \leqq b$$

gegeben. Ist nun $y = f(x)$ eine über der Abszissenstrecke $a \ldots b$ gegebene Kurve, $f(x)$ auf dieser Strecke stetig und positiv, so kann jeder Summand $(x_{\nu+1} - x_\nu) f(\xi_\nu)$ als ein Rechtecksinhalt gedeutet werden; das Rechteck sei etwa $PQRS$ in Fig. 38, wenn $OA = x_0$, $OB = x$, $OP = x_\nu$, $OQ = x_{\nu+1}$ gesetzt wird und $PR = f(\xi_\nu)$ die Ordinate ist, die zu einem zwischen P und Q liegenden Punkte gehört. Lassen wir nun, wie es in der Gleichung (1) nach § 63 geschieht, alle Teilstrecken, wie PQ, unendlich abnehmen, so bedecken die Rechtecke $PQRS$ mit immer größerer Annäherung die Fläche, die von der Kurve CD, den Endordinaten AC, BD und der Abszissenstrecke AB umschlossen wird. Es erscheint daher

Fig. 38.

zweckmäßig, als Inhalt dieses Gebiets die Größe $F(x) - F(x_0)$ zu definieren. Ihr gleich ist die Differenz $\Phi(x) - \Phi(x_0)$, wenn $\Phi(x) = F(x) + C$ irgend ein besonderes Integral der Funktion $f(x)$ ist. In der Annäherungsformel (1) erfüllen die Teilstrecken $\varDelta x$ die Strecke $x_0 \ldots x$; das bringen wir zum Ausdruck, indem wir schreiben

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

und hierdurch das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ einführen; die Integrationsgrenzen sind x_0 und x. Nimmt letztere den Sonderwert x_1 an, so ergibt sich mit Benutzung des Substitutionszeichens

$$(2) \qquad \Phi(x_1) - \Phi(x_0) = F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$
$$= F(x)\Big|_{x_0}^{x_1} = \Phi(x)\Big|_{x_0}^{x_1}$$

und hier wird ersichtlich, daß das bestimmte Integral eine Funktion seiner Grenzen, nicht der unter dem Integralzeichen stehenden Größe x ist: es ist ein Ausdruck, der den Buchstaben x enthält, ohne Funktion einer durch x bezeichneten Größe zu sein. Das Substitutionszeichen werde allgemein durch die Gleichungen

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(x)\Big|_a^b, \quad \varphi(a) = \varphi(x)\Big|^a, \quad -\varphi(a) = \varphi(x)\Big|_a$$

erklärt. Die ganze in der Gleichung (2) dargestellte Umwandlung nennt man den Übergang vom unbestimmten zum bestimmten Integral.

Die geometrische Deutung des bestimmten Integrals ist zunächst an die Voraussetzung positiver Werte von $f(x)$ gebunden. Wäre $f(x)$ auf der betrachteten Abszissenstrecke negativ, so wären die oben betrachteten Rechtecksinhalte durch $-f(x)\varDelta x$, genauer $-(x_{\nu+1} - x_\nu) f(\xi_\nu)$ auszudrücken; unser Ausdruck $F(x_1) - F(x_0)$ gibt dann den von der Kurve, ihren Endordinaten und der x-Achse umschlossenen Flächeninhalt mit dem Minuszeichen, und in diesem Falle liegt das betrachtete Gebiet unterhalb der x-Achse, d. h. nach der Seite negativer Ordinaten hin. Ist $f(x)$ positiv und negativ, z. B. positiv, wenn $x_0 \leqq x < x_1$, negativ, wenn $x_1 < x \leqq x_2$, so ist

$$(3) \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_0) = F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx,$$

und die Differenz $F(x_2) - F(x_1)$ ist nach dem Mittelwertsatze

$$F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta(x_2 - x_1)], \quad 0 < \theta < 1$$

negativ, $F(x_1) - F(x_0)$ ebenso positiv; das bestimmte Integral gibt also die algebraische Summe der Flächeninhalte, die den Strecken der x-Achse, auf denen $f(x)$ das Vorzeichen nicht wechselt, entsprechen; die nach oben liegenden werden positiv, die nach unten liegenden negativ in Rechnung gesetzt.

Die Gleichung (3) enthält zugleich eine allgemeine Regel für das Rechnen mit dem Zeichen der bestimmten Integration. Definieren wir etwas allgemeiner als bisher durch die Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0)$$

das bestimmte Integral, indem man unter x_0, x_1 irgend zwei Werte einer Strecke, auf der $f(x)$ und $F(x)$ stetig sind, versteht, so ist noch die Rechenregel

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx$$

zu merken. Kann man eine Teilintegration in der Form

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \quad dv = v'\,dx, \quad du = u'\,dx$$

durchführen, so ergibt der Übergang zum bestimmten Integral

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{x_1} u v'\,dx = uv \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} v u'\,dx.$$

Setzt man $x = \varphi(t)$ und führt so eine neue Unabhängige t ein, die auf eine solche Strecke beschränkt bleibt, daß der Wert $x = \varphi(t)$ nicht aus der Stetigkeitsstrecke des betrachteten unbestimmten Integrals und der Funktion $f(x)$ herausfällt, und daß $\varphi(t)$ und $\varphi'(t)$ stetig, sonst beliebig sind, so folgt

$$(6) \qquad \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

wobei $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi(t_1) = x_1$ sein muß; denn offenbar ist

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)],$$

also

$$\int^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0) = F[\varphi(t_1)] - F[\varphi(t_0)].$$

Daß endlich die bestimmte Integration mit der Addition der Integranden vertauscht werden kann, d. h.

$$(7) \qquad \int_{x_0}^{x_1} [f(x) + \varphi(x)]\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, dx,$$

ist für die den Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ gemeinsame Stetigkeitsstrecke unmittelbar ersichtlich; ebenso die Gleichung

$$(8) \qquad C\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = CF(x_1) - CF(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} Cf(x)\, dx.$$

Dies Verfahren des Überganges zum bestimmten Integral nach (2) wiederholt sich bei anderen geometrischen Anwendungen, z. B. der Rektifikation oder Streckung; hat man das Bogenintegral auf die Form

$$\int ds = \int dx\sqrt{1 + y'^2} = \int f(x)\, dx = F(x) + C$$

gebracht, so ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1 + y'^2} = F(x)\Big|_{x_0}^{x_1}$$

die bestimmte Bogenlänge, vom Punkte $x = x_0$ bis zum Punkte $x = x_1$ gemessen, wobei man auch x_1 durch die Unabhängige x ersetzen kann und nun die vom Punkte $x = x_0$ ab gemessene Bogenlänge als Funktion der Endabszisse x ohne Integrationskonstante dargestellt erhält.

Wir betrachten eine Reihe von Beispielen.

a) Die Parabel. Aus der bekannten Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p} = \frac{x^2}{q}$$

ergibt sich augenblicklich

$$U = \frac{x^3}{3q} + \text{const.}$$

Soll die Fläche vom Scheitel aus gerechnet werden, das heißt U gleich der Fläche OMP sein, so müssen x und U gleichzeitig verschwinden; dies gibt $0 = 0 + \text{const.}$, mithin (Fig. 39)

$$(9) \qquad U = \int_0^x \frac{x^2}{q}\, dx = \frac{x^3}{3q} = \frac{1}{3}xy.$$

Daraus folgt auch der bekannte Satz des Archimedes, daß die Fläche $OLP = \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}LOMP$ sein muß.

Eine elegante und später brauchbare Erweiterung des Theorems (9) ist folgende. Man ziehe noch zwei Ordinaten M_1P_1 und M_2P_2 in den Abständen $MM_1 = M_1M_2 = h$ und berechne die Fläche zwischen MP und M_2P_2, nämlich (Fig. 39)

$$MM_2P_2P = OM_2P_2 - OMP = \frac{(x+2h)^3}{3q} - \frac{x^3}{3q}$$
$$= \tfrac{1}{3}h\,\frac{6x^2 + 12xh + 8h^2}{q},$$

oder auch

$$MM_2P_2P = \tfrac{1}{3}h\left[\frac{x^2}{q} + 4\,\frac{(x+h)^2}{q} + \frac{(x+2h)^2}{q}\right].$$

Bezeichnen wir die drei Ordinaten MP, M_1P_1, M_2P_2 mit y, y_1, y_2, so wird die vorige Gleichung zur folgenden:

$$MM_2P_2P = \tfrac{1}{3}h(y + 4y_1 + y_2).$$

Fig. 39.

Um dieses Ergebnis zu verallgemeinern, legen wir durch einen beliebigen Punkt O' ein neues Bezugssystem parallel dem früheren; der Abstand der Achsen OX und $O'X'$ sei $MN = b$ und

$$NP = \eta = y + b,$$
$$N_1P_1 = \eta_1 = y_1 + b,$$
$$N_2P_2 = \eta_2 = y_2 + b.$$

Nach diesen Voraussetzungen hat man

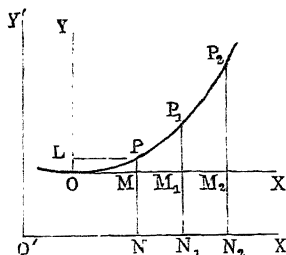
$$\text{Fläche } NN_2P_2P = \text{Rechteck } NN_2M_2M + \text{Fläche } MM_2P_2P$$
$$= 2hb + \tfrac{1}{3}h[\eta - b + 4(\eta_1 - b) + \eta_2 - b]$$

und bei gehöriger Zusammenziehung

$$\text{(10)}\qquad \text{Fläche } NN_2P_2P = \tfrac{1}{3}h(\eta + 4\eta_1 + \eta_2).$$

Legt man demnach durch drei Punkte P, P_1, P_2, deren Ordinaten gleiche Abstände halten, eine Parabel, deren Achse parallel der Ordinatenachse ist, so kann man die Fläche des entstandenen parabolischen Doppelstreifens aus den drei Ordinaten und ihrer gegenseitigen Entfernung berechnen, ohne den Scheitel und den Parameter jener Parabel aufsuchen zu müssen.

Wählt man die durch den Brennpunkt O (Fig. 40) einer Parabel auf deren Achse senkrecht gelegte Gerade zur Abszissenachse, so ist die Gleichung der Parabel

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{p} - p\right),$$

mithin

$$F = \tfrac{1}{2} x \left(\frac{x^2}{3p} - p\right) + \text{const.}, \tag{11}$$

und wenn die Fläche F von der Ordinatenachse ab gerechnet wird, ist const. $= 0$. Über der Abszisse $OC = p\sqrt{3}$ steht demnach die Fläche

$$F = \int_0^{p\sqrt{3}} \tfrac{1}{2} x \left(\frac{x^2}{3p} - p\right) dx = \tfrac{1}{2} p \sqrt{3} \left(\frac{p^2 \cdot 3}{3p} - p\right) = 0.$$

Dieses Ergebnis sagt, daß die beiden Flächen OAB und ACD gleich groß und von entgegengesetztem Zeichen sein müssen; man

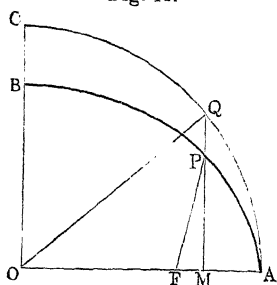
Fig. 40.

hat in der Tat für die erste Fläche wegen $OA = p$:

$$\text{Fläche } OAB = -\tfrac{1}{3} p^2 = -\tfrac{2}{3} \cdot OB \cdot OA,$$

was mit dem Archimedischen Satze übereinstimmt. Um die zweite Fläche ACD zu finden, rechnen wir in der Gleichung (11) die Fläche F vom Punkte A aus, so daß F für $x = p$ verschwindet; dies gibt zur Konstantenbestimmung $0 = -\frac{1}{3} p^2 + \text{const.}$, also

$$F = \int_p^x \tfrac{1}{2} x \left(\frac{x^2}{3p} - p\right) dx = \tfrac{1}{2} x \left(\frac{x^2}{3p} - p\right) + \tfrac{1}{3} p^2;$$

Fig. 41.

für $x = p\sqrt{3}$ erhalten wir hieraus

$$\text{Fläche } ACD = \tfrac{1}{3} p^2,$$

dem Werte nach mit OAB übereinstimmend, dem Zeichen nach entgegengesetzt. Die algebraische Summe der Flächen OAB und ACD ist also Null, die arithmetische Summe $= \frac{2}{3} p^2$.

b) Kreis und Ellipse. Die Mittelpunktsgleichung des Kreises sei

$$y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

es wird dann

$$U = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \text{const.}$$

Versteht man unter U die Fläche $COMQ$ (Fig. 41), so muß für $x = 0$ auch $U = 0$ werden; dies gibt const. $= 0$; oder, was das-

selbe bedeutet, man integriert von 0 bis x und erhält für die gesuchte Fläche

$$U = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a},$$

was geometrisch bedeutet, daß U aus dem Dreiecke OMQ und dem Kreissektor COQ besteht.

Für die Ellipse sei die Ordinate $MP = y_1$ und die Fläche $BOMP = U_1$; man hat dann

$$y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$U_1 = \frac{b}{a} \left[\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right]$$

oder

$$y_1 = \frac{b}{a} y, \quad U_1 = \frac{b}{a} U,$$

wo y und U die vorige Bedeutung haben. Die Quadratur der Ellipse läßt sich demnach auf die Quadratur des Kreises zurückführen. Die Fläche des Ellipsenquadranten ist hiernach

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{4} \pi a^2 = \frac{1}{4} \pi a b,$$

und die ganze Ellipsenfläche $= \pi a b = \pi (\sqrt{a b})^2$, worin ein leicht auszusprechender Satz liegt.

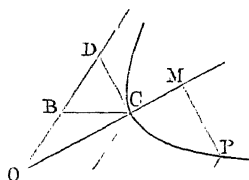
c) Die Hyperbel. Die Gleichung der Hyperbel lautet in rechtwinkligen Koordinaten, wenn der Mittelpunkt zum Koordinatenanfang und die Hauptachse zur Abszissenachse genommen wird,

Fig. 42.

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

mithin ist

$$U = \frac{b}{a} \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{a} \left[\tfrac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \tfrac{1}{2} a^2 \lg (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C\right].$$

Es liegt am nächsten, die Fläche vom Scheitel aus zu rechnen, d. h. $U =$ Fläche CMP zu setzen (Fig. 42); für $x = OC = a$ wird dann $U = 0$ und

$$0 = -\tfrac{1}{2} a^2 \lg a + C,$$

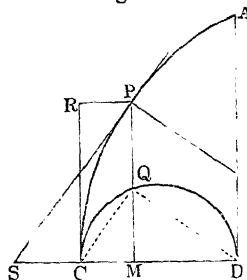
wodurch sich der Wert von C bestimmt. Oder man integriert von a bis x und erhält für U den Wert

$$\int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \lg\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right]$$

oder in eleganterer Form

$$U = \tfrac{1}{2}\left[xy - ab\lg\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\right].$$

d) Die Cykloide. Nehmen wir, wie in § 19, den Scheitel der Cykloide zum Anfangspunkt der Koordinaten, so ist die Differentialgleichung der Kurve

Fig. 43.

$$dy = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}\,dx;$$

um von derselben Gebrauch zu machen, ersetzen wir die Gleichung (9) durch die folgende

$$U = yx - \int x\,dy,$$

welche durch Teilintegration entsteht; es wird dann

$$U = xy - \int dx\sqrt{2ax-x^2}.$$

Die geometrische Bedeutung des rechter Hand befindlichen Integrals ist unmittelbar einleuchtend, wenn man sich erinnert, daß in dem Halbkreise CQD (Fig. 43) $\sqrt{2ax-x^2} = MQ$, also

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2} = \text{Fläche } CMQ + \text{const.}$$

sein muß; wir haben daher

$$U = xy - \text{Fläche } CMQ + \text{const.}$$

Verstehen wir unter U die Fläche CMP, so wird $U = 0$ und $CMP = 0$ für $x = 0$, also const. $= 0$; oder man hat von 0 bis x zu integrieren und erhält

$$U = \int_0^x y\,dx = yx\Big|_0^x - \int_0^x x\frac{dy}{dx}dx = xy - \int_0^x dx\sqrt{2ax-x^2}$$

$$= xy - \text{Fläche } CMQ, \quad xy - U = \text{Fläche } CMQ;$$

geometrisch heißt dies, daß die Flächen CPR und CMQ gleich sind, womit die Quadratur der Cykloide gegeben ist. Im Falle $x = a$, erhält man die Fläche $CDA = \frac{3}{2}\pi a^2$; die ganze Cykloidenfläche ist also das Dreifache der erzeugenden Kreisfläche.

§ 80. Der Flächeninhalt unabhängig vom Koordinatensystem.

Der Flächeninhalt erschien in den bisherigen Beispielen stets abhängig vom Bezugssystem, während er doch für eine geschlossene Kurve wie den Vollkreis eine vom Bezugssystem unabhängige Größe sein müßte, dem gewöhnlichen Gefühl nach.

I. Um hier sichere Begriffe zu schaffen, führen wir zunächst das Linienintegral ein.

Auf einer beliebigen Kurve sei etwa

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1}$$

eine Parameterdarstellung, und mögen den Endpunkten A und B etwa die Parameterwerte t_0 und t_1 entsprechen. Dann seien P und Q Funktionen von x und y; unter einem Linienintegral längs der Kurve verstehen wir den Ausdruck

$$J = J_{AB} = \int_{t_0}^{t_1} \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}\right) dt,$$

in welchem P, Q und damit der ganze Integrand den Gleichungen (1) gemäß eine Funktion von t ist.

Das Integral J behält nach der Substitutionsregel des § 66 und nach § 79 (6) seinen Wert, wenn man die betrachtete Kurve durch einen anderen Parameter τ darstellt; dann ist ja

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau},$$

und für J ist zu setzen

$$J = J_{AB} = \quad P\frac{dx}{d\tau} + Q\frac{dy}{d\tau} \quad d\tau.$$

Dabei bleibt die Integrationsrichtung aber nur dieselbe, wenn überall $dt/d\tau > 0$; nehmen wir dies an, kann man daher das unbestimmte Linienintegral in der Form

$$J = J_{AB} = \int (P\,dx + Q\,dy)$$

schreiben, die seine Invarianz gegenüber der Wahl des Parameters andeutet.

Auf dem Kreise $x^2 + y^2 = 1$ z. B. kann man setzen $x = \cos t$, $y = \sin t$, aber auch $x = \cos 2\tau$, $y = \sin 2\tau$; immer ist

$$P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}\Big) dt = \left(P\frac{dx}{d\tau} + Q\frac{dy}{d\tau}\right) d\tau = P\,dx + Q\,dy,$$

gleichviel, ob man sich x, y, P und Q durch t oder τ ausgedrückt denkt.

Kann man allgemein setzen

$$J = \int (P\,dx + Q\,dy) = \Phi(t),$$

und gehört der Punkt M zum Parameterwert t, so sei

$$J_{AM} = \Phi(t) - \Phi(t_0) = \int^{t} \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt}\right) dt$$

$$= \int_{AM} (P\,dx + Q\,dy),$$

$$J_{AB} = \Phi(t_1) - \Phi(t_0) = \int^{t_1} \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt}\right) dt,$$

womit sich nach § 79 (4) ergibt

$$J_{AB} = - J_{BA}.$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft des Linienintegrals ergibt sich, wenn

$$(2) \qquad P = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

genommen wird; dann hat man

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

also

$$\Phi(t) - f(x, y) = \text{const.},$$

wobei $f(x, y)$ als Funktion von t aufgefaßt werde. Ist nun $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $x_1 = \varphi(t_1)$, $y_1 = \psi(t_1)$, so folgt

$$(3) \qquad J_{AB} = \Phi(t_1) - \Phi(t_0) = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0);$$

dieser Wert ist von der besonderen Wahl der Kurve AB unabhängig; sie muß nur in einem Gebiet verlaufen, in welchem $f(x, y)$ und die Ableitungen dieser Funktion stetig und eindeutig bestimmt sind.

II. Jetzt bestehe eine geschlossene Linie $\mathfrak{L}$ aus einer endlichen Anzahl von Stücken wie AB; wir denken sie uns in bestimmtem Sinne durchlaufen, indem auf jedem Stück, wie AB, von den begrenzenden Punkten ein bestimmter als Anfangspunkt, der andere als Endpunkt aufgefaßt wird. Dann hat jedes Integral J_{AB} einen

bestimmten Sinn; ihre Summe heißt das Linienintegral über die ganze Kurve $\mathfrak{L}$. Wir wollen z. B. $P = -y$, $Q = 0$, also

$$J = -\int\limits_{AB} y\,dx$$

setzen und die Summe aller dieser Integrale den Flächeninhalt der Kurve L nennen. Wird der Umlaufssinn umgekehrt, so geht die Inhaltsgröße in ihr Entgegengesetztes über.

Nehmen wir als Kurve $\mathfrak{L}$, z. B. in Fig. 44, den Weg $HGMPH$, so ist auf den Strecken HG und MP offenbar $dx = 0$, auf der Achse GM ist $y = 0$, also bleibt nur das von P nach H genommene Integral

$$-\int y\,dx$$

übrig, oder dasselbe Integral ohne Minuszeichen von H nach P genommen, das genau den Flächeninhalt in der früheren Form darstellt.

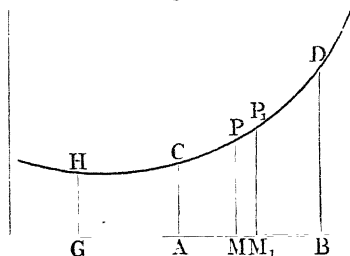
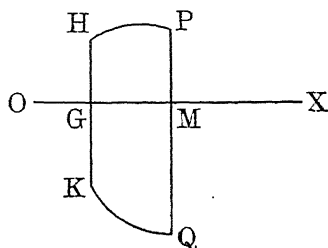



Fig. 44. Fig. 45.

Ähnliches wie bei Fig. 44 ersieht man an der allgemeineren Fig. 45, bei der zwei Kurven, $Y = F(x)$ und $y = f(x)$, durch HP und KQ dargestellt werden; GM sei die x-Strecke $a \ldots b$, in deren Innern wir $F(x) > f(x)$ voraussetzen; die Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ seien auf der Strecke $a \ldots b$ stetig. Unter diesen Voraussetzungen nennen wir die Figur $HKQP$ einen Normalbereich; sind z. B. $f(x)$ und $F(x)$ lineare Funktionen, so erhält man ein Trapez oder Dreieck. Sein Inhalt ist, da dx auf den Strecken KH und PQ verschwindet,

$$(4) \qquad -\int\limits_{KQ} y\,dx - \int\limits_{PH} Y\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b F(x)\,dx;$$

was mit der früheren besonderen, nicht auf das Linienintegral gegründeten Definition zusammenstimmt. Ist z. B. $F(x)$ positiv und $f(x)$ negativ, so ist von den Integralen

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx, \qquad \int\limits_a^b F(x)\,dx$$

das erste die negativ genommene Fläche $KGMQ$, das zweite die positiv genommene Fläche $MPHG$, die Größe (4) also der positiv genommene Inhalt der Fläche $PHKQ$. Bemerken wir noch, daß auf der Kurve $Y = F(x)$, die wir den *oberen Grenzbogen* des Normalbereichs nennen, im Sinne abnehmender x, auf dem unteren Grenzbogen im Sinne wachsender x integriert wird. Die Strecke HK, auf der $x = a$ ist, heiße die *linke Stütze*, die Strecke QP die *rechte Stütze* des Bereichs; sie können in Punkte entarten. Wird auf ersterer nach unten, auf letzterer nach oben integriert, so erhält man einen bestimmten, den positiven Umlaufssinn unseres Normalbereichs oder Durchlaufssinn seines Randes. Nennen wir alle Punkte (ξ, η) innere Punkte des Bereichs, für die $a \leqq \xi \leqq b$ und $f(\xi) \leqq \eta \leqq F(\xi)$ ist, so liegt das Innere zur Linken des Wanderers, der den Bereich im positiven Sinne umkreist.

III. Wir zeigen nun allgemein, daß das Integral

$$\int_{\mathfrak{L}} y\,dx = \sum \int_A^B y\,dx,$$

wenn $\mathfrak{L}$ eine geschlossene Linie ist, vom Koordinatensystem unabhängig ist. Zunächst verschwindet jedes Integral

$$J_{\mathfrak{L}} = \int_{\mathfrak{L}} (P\,dx + Q\,dy)$$

bei der Voraussetzung (2), also z. B., wenn $f(x, y) = xy$; denn addiert man alle Gleichungen (3), die den verschiedenen Stücken AB entsprechen, so erhält man eine Summe wie

$$[f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)] + [f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)] + \cdots + [f(x_0, y_0) \\ - f(x_n, y_n)],$$

also Null, da bei einer geschlossenen, aus mehreren Stücken AB bestehenden Linie jeder Punkt, wie A, B, einmal als Anfangspunkt und einmal als Endpunkt erscheint. So erhält man im besonderen

$$(5) \qquad \int dx = 0, \quad \int_{\mathfrak{L}} dy = 0, \quad \int_{\mathfrak{L}} (y\,dx + x\,dy) = 0.$$

Hieraus folgt

$$(6) \qquad -\int_{\mathfrak{L}} y\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{L}} (x\,dy - y\,dx) - \tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{L}} (y\,dx + x\,dy) \\ = \tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{L}} (x\,dy - y\,dx).$$

Dieses Integral bleibt zunächst ungeändert bei einer Parallelverschiebung des Koordinatensystems, die sich durch Gleichungen wie

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta, \quad dx = dx_1, \quad dy = dy_1$$

ausdrücken würde; man erhält

$$\tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{L}}(y\,dx - x\,dy) = \int_{\mathfrak{L}} y\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{L}}(y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1) + \tfrac{1}{2}\beta\int_{\mathfrak{L}} dx_1 - \tfrac{1}{2}\alpha\int_{\mathfrak{L}} dy_1,$$

also nach den ersten Gleichungen (5)

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}\int(y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1),$$

wie behauptet.

Dreht man ferner das Koordinatensystem, so hat man Gleichungen

$$x = x_1 \cos\gamma - y_1 \sin\gamma, \quad y = x_1 \sin\gamma + y_1 \cos\gamma,$$

aus denen, da $d\gamma = 0$ ist, durch leichte Rechnung folgt

$$-x\,dy + y\,dx = y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1,$$

wie behauptet.

Das Linienintegral

$$\int_{\mathfrak{L}} y\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{L}0}(x\,dy - y\,dx)$$

ist also eine vom Koordinatensystem unabhängige Größe, die in den oben betrachteten Einzelfällen in den gewöhnlichen Flächeninhalt übergeht, insbesondere beim Normalbereich.

IV. Haben zwei geschlossene Linien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ mit bestimmtem Umlaufssinn eine Strecke CD gemein, die in den Umläufen von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ mit entgegengesetztem Sinn behaftet ist, und sind A und A_1 zwei außerhalb dieses Bogens liegende Punkte auf $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$, so sind etwa die Umlaufssinne durch $ACDA$ und A_1DCA_1 zu kennzeichnen. Läßt man den Bogen CD weg und behält auf den übrigen Teilen von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ die Umlaufssinne bei, so fügen sie sich zu einer neuen Linie $\mathfrak{L}_2$ zusammen, auf der etwa durch die Reihe ACA_1DA ein bestimmter Umlaufssinn festgelegt wird, der auf jedem Teilbogen mit dem Sinne übereinstimmt, in dem dieser Teilbogen als Teil von $\mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{L}_1$ durchlaufen wurde. Für jedes Linienintegral J gelten dann die Formeln:

$$J_{\mathfrak{L}} = J_{AC} + J_{CD} + J_{DA}, \quad J_{\mathfrak{L}_1} = J_{A_1D} + J_{DC} + J_{CA_1},$$
$$J_{CD} + J_{DC} = 0, \quad J_{\mathfrak{L}_2} = J_{AC} + J_{CA_1} + J_{A_1D} + J_{DA},$$

also

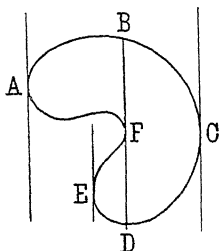
$$J_{\mathfrak{L}_2} = J_{\mathfrak{L}} + J_{\mathfrak{L}_1}.$$

Bildet man also aus zwei Linien in der angegebenen Weise eine dritte, so addieren sich die Linienintegrale und im besonderen die Inhalte beider Linien, wie es auch nach der gewöhnlichen Anschauung vom Flächeninhalt sein muß.

Schneidet keine der Linien $ACDA$ und $A_1 DCA_1$ sich selbst und haben sie nur genau die Strecke CD gemein, so wird auch durch ACA_1DA eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende Linie gekennzeichnet.

Kann man im besonderen eine Kurve $\mathfrak{L}$ von bestimmtem Durchlaufssinn auffassen als zusammengesetzt aus den Grenzbögen gewisser Normalbereiche, deren positive Durchlaufssinne überall mit dem der ganzen Kurve $\mathfrak{L}$ zugewiesenen übereinstimmen, so ist der Inhalt der Kurve $\mathfrak{L}$ die Summe der positiven Inhalte der Normalbereiche. Die Gesamtheit der Innengebiete dieser Bereiche nennen wir dann das Innengebiet der Kurve $\mathfrak{L}$; für den Wanderer, der die Kurve $\mathfrak{L}$ im festgesetzten Sinne durchläuft, liegt es immer zur Linken, wie das Innere eines positiv umlaufenen Normalbereichs. Der Inhalt der Kurve $\mathfrak{L}$ ist dann als Flächeninhalt ihres Innengebietes aufzufassen und positiv.

Fig. 46.

Von der Möglichkeit einer solchen Zerlegung überzeugt man sich an Beispielen geschlossener, sich selbst nicht schneidender Kurven leicht, indem man an sie die Tangenten parallel der y-Achse zieht; wir werden aber auch einen allgemeinen Satz aufstellen, der für die Lehre von den Doppelintegralen wichtig ist. In Fig. 46 sind die oberen Grenzbögen dreier Normalbereiche mit ihren Durchlaufssinnen BA, CB, FE, die unteren AF, DC, ED. Durchläuft man sie nacheinander, so erhält man die Folge $AFEDCBA$ als positiven Durchlaufssinn der Kurve $\mathfrak{L}$.

Was hier als Innengebiet der Kurve $\mathfrak{L}$ erklärt war, hing wesentlich ab von der x-Achse des Bezugssystems, mit deren Hilfe die Normalbereiche definiert wurden. Legt man ein anderes Bezugssystem zugrunde, und gelingt auch hier die beschriebene Zerlegung der in bestimmtem Sinne durchlaufenen Kurve $\mathfrak{L}$ in Grenzbögen von Normalbereichen, die auf Grund der neuen x-Richtung definiert sind, so ergibt sich die merkwürdige Tatsache, daß die Summe der Inhalte der neuen Normalbereiche der vorher erhaltenen gleich, also vom Bezugssystem unabhängig ist. Hierin liegt der genaue Sinn der Tatsache, die man unmittelbar anschaulich findet, daß unter gewissen

Bedingungen die Kurve $\mathfrak{C}$ ein vom Bezugssystem unabhängiges Innengebiet von ebenfalls dem Bezugssystem gegenüber unveränderlichem Inhalt besitzt. Wann diese Aussage bestimmt gemacht werden kann, erörtern wir in § 82; für die Beispiele genügt die oben angedeutete besondere Betrachtung.

Beispiele. 1. Um den Inhalt des Dreiecks OAB mit unserer allgemeinen Formel auszurechnen, wobei der Umlaufssinn OAB positiv sei, nehmen wir O als Koordinatenanfangspunkt, die x-Achse parallel zu AB. Auf jeder Geraden durch O ist dann

$$x\,dy - y\,dx = 0,$$

also

$$\int\limits_{OA}(x\,dy - y\,dx) = \int\limits_{OB}(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

es bleibt nur

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_{AB}(x\,dy - y\,dx) = -\tfrac{1}{2}\int\limits_{AB} y\,dx;$$

auf AB hat man ja $dy = 0$, ferner offenbar $y = OH$, d. h. y ist die Höhe des Dreiecks, die von der Spitze O ausgeht und in H auf AB endigt. Somit bleibt für den Inhalt, wenn $y > 0$ ist,

$$\tfrac{1}{2}\cdot OH\cdot\int\limits_{AB} dx = \tfrac{1}{2}\,OH.AB.$$

Der Ausdruck kommt aber nur positiv heraus, wenn die Richtung AO zur Richtung AB liegt wie die y-Achse zur x-Achse, oder der Umlaufssinn OAB positiv, d. h. dem Uhrzeigerlauf entgegengerichtet ist.

2. Flächeninhalt der Ellipse. Auf der Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, kann man setzen

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t;$$

läßt man t von 0 bis 2π laufen, so geht der Punkt (x, y) durch alle vier von den Achsen gebildeten Quadranten, mit dem ersten beginnend, durchläuft also alle vier Viertelellipsen, die durch die Vorzeichenkombinationen von x und y unterschieden sind; die Ellipse wird im positiven Sinne durchlaufen.

Nun findet man durch einfachste Rechnung

$$x\,dy - y\,dx = ab\,dt;$$

für den Inhalt ergibt sich also

$$\tfrac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx) = \tfrac{1}{2}\,abt\Big|_0^{2\pi} = \pi\,ab.$$

3. Quadratur der Hyperbel. Ihre Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wird erfüllt, wenn man setzt

$$x = a \operatorname{Cos} t, \quad y = b \operatorname{Sin} t.$$

Läßt man t von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, so erhält man, da x positiv bleibt, eine Hälfte der Hyperbel, für $t = 0$ ihren Scheitel C (Fig. 42). Längs des Bogens CP, auf dem bei gewöhnlicher Anordnung des Bezugssystems y und t negative Größen sind, hat man nun

$$x\,dy + y\,dx = ab\,dt,$$

längs der Geraden MP ist $dx = 0$, also

$$\int_{PM} x\,dy = x \int_{PM} dy = -xy;$$

auf der Strecke CM ist

$$y = dy = 0, \quad x\,dy - y\,dx = 0.$$

Bei positivem Umlauf CPM erhält man also als Fläche

$$\tfrac{1}{2}\int ab\,dt - \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}abt - \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}\left[ab \lg\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) - xy\right].$$

Dieser Inhalt ist positiv, auch wenn $t < 0$, da die Beziehungen

$$\frac{\operatorname{Sin} t \operatorname{Cos} t}{t} \geqq 1, \quad xy < 0$$

gelten.

4. Schiefwinklige Parallelkoordinaten seien x, y und γ der hohle Winkel ihrer Achsen; man kann dann immer ein rechtwinkliges System durch die Gleichungen

$$x_1 = x + y\cos\gamma, \quad y_1 = y\sin\gamma$$

einführen, und erhält dann für das Inhaltsintegral

$$\tfrac{1}{2}\int (x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1) = \tfrac{1}{2}\sin\gamma \int (x\,dy - y\,dx)$$

oder, da auch hier über eine geschlossene Linie integriert die Gleichung

$$\int (x\,dy + y\,dx) = 0$$

gilt,

$$-\sin\gamma \int y\,dx$$

mit positivem Umlaufssinn.

Man kann diese Bemerkung auf die Hyperbel anwenden, indem man die Asymptoten zu Bezugsachsen nimmt (Fig. 42); setzt man

$OA = OB = \sqrt{a^2 + b^2} = k$, $\measuredangle AOB = \gamma$, $ON = \xi$, $NP = \eta$ und die Fläche $CANP = \Omega$, so folgt, da Ω für $\xi = k$ verschwindet,

$$\eta = \frac{k^2}{\xi}, \quad \Omega = k^2 \sin\gamma \int_k^\xi \frac{d\xi}{\xi} = k^2 \sin\gamma \lg\left(\frac{\xi}{k}\right).$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $k = 1$, $\gamma = 90^0$, also $\Omega = \lg\xi$; daher auch die alte Bezeichnung der hyperbolischen Logarithmen.

§ 81. Quadraturen in Polarkoordinaten.

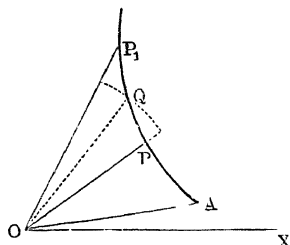
Wenn die Gleichung einer Kurve durch die Polarkoordinaten $OP = r$, $\angle POX = \theta$ (Fig. 47) ausgedrückt und etwa in der Form

$$r = f(\theta)$$

Fig. 47.

dargestellt ist, so kommt es darauf an, die Sektorfläche $AOP = S$ zu ermitteln, welche von zwei, der Lage nach bestimmten Vektoren und der Kurve begrenzt wird.

Wendet man auf diese Fläche die Inhaltsformel

$$\tfrac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx)$$

an, so geben die Strecken OA und OB keinen Beitrag, da auf ihnen das Verhältnis y/x konstant, also dem Verhältnis dy/dx gleich ist, so daß der Integrand verschwindet. Man findet also für die Sektorfläche einfach

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{AP} (x\,dy - y\,dx),$$

oder, wenn $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ gesetzt wird, womit sich

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$$

ergibt,

$$S = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\theta r^2\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\theta + C, \tag{1}$$

wobei an der Stelle A etwa $\theta = \alpha$ sei. Ersetzt man das Integral wie in § 79 annähernd durch eine der Summen

$$\tfrac{1}{2}\sum r^2 \Delta\theta, \quad \tfrac{1}{2}\sum \varrho_\nu^2 (\theta_{\nu+1} - \theta_\nu),$$

so kann etwa $\angle XOP = \theta_\nu$, $\angle XOP_1 = \theta_{\nu+1}$, $OQ = \varrho_\nu$ gesetzt werden; die Sektorfläche wird annähernd durch eine Summe

von Kreissektoren mit dem Radius OQ und dem Zentriwinkel P ersetzt.

a) Die Kegelschnitte. Als allgemeine Polargleichung d Kurven hat man (§ 22)

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta},$$

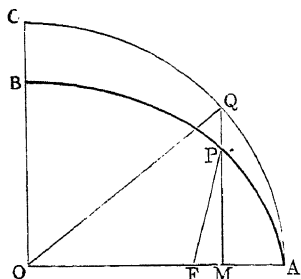
mithin

$$S = \tfrac{1}{2}p^2\int\frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + \text{const.},$$

wobei die drei Fälle $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon > 1$ zu unterscheiden

Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, mithin $\varepsilon < 1$, so gibt die führung der Integration [§ 76, Formel (16)]

$$S = \frac{p^2}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta\right) - \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)}\,\frac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

Fig. 48.

wobei es keiner Konstante bedarf, der Sektor von der großen Achs gerechnet wird ($AFP = S$), also gl zeitig mit θ verschwinden muß. integriert nach θ von 0 ab:

$$S = \int_0^\theta \frac{p^2\,d\theta}{2(1+\varepsilon\cos\theta)^2}.$$

Man kann der obigen Formel ein einfachere Gestalt verleihen, wenn p durch a und ε ausdrückt und neuen Winkel ω einführt, der dadurch entsteht, daß die Orc MP (Fig. 48) verlängert wird, bis sie den mit a beschrie Kreis in Q schneidet und QO gezogen wird. Für $\angle AOQ$ ist nämlich

$$a\cos\omega - a\varepsilon = r\cos\theta$$

oder wegen $a = p:(1-\varepsilon^2)$ und vermöge des Wertes von r

$$\frac{\cos\omega-\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = \frac{\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta};$$

daraus leitet man ohne Mühe folgende Gleichungen ab:

$$\cos\theta = \frac{\cos\omega-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\omega},\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\omega}{1-\varepsilon\cos\omega},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega,$$

mittels deren sich ergibt

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}\,(\omega - \varepsilon \sin \omega),$$

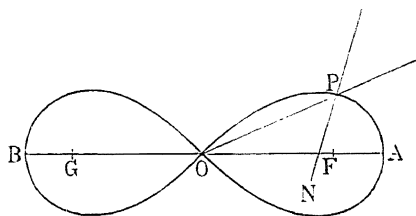
wo $a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ die kleine Halbachse der Ellipse bedeutet. Ist nun θ gegeben, so geschieht die Quadratur des Sektors S auf die Weise, daß man erst ω mittels der Formel

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$$

berechnet und nachher S mittels der Formel

$$S = \frac{1}{2} ab\,(\omega - \varepsilon \sin \omega).$$

Die Fälle $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon > 1$ gestatten eine ähnliche Behandlung, die aber zu weniger eleganten Resultaten führt.

Fig. 49.

b) Die Lemniskate. Aus der in § 22, II. gegebenen Gleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

ergibt sich sofort

$$S = \int_0^\theta a^2 \cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\theta,$$

wobei es keiner Integrationskonstante bedarf, wenn man den Sektor mit $\theta = 0$ anfangen läßt, also $= AOP$ setzt (Fig. 49). Für $\theta = \frac{1}{4}\pi$ erhält man die Fläche eines Lemniskatenquadranten $= \frac{1}{4}a^2$; die ganze Lemniskate hat demnach dieselbe Fläche wie ein über OA konstruiertes Quadrat.

c) Die Kreisevolvente. Betrachtet man den Wälzungswinkel $AOQ = \omega$ als Unabhängige, so gelten die in § 22 entwickelten Formeln

$$r^2 = a^2(1+\omega^2), \quad d\theta = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}\, d\omega,$$

und nach diesen ist, wenn man unter S den mit ω gleichzeitig verschwindenden Sektor $A\,O\,P$ versteht (Fig. 50),

$$\int_0^\omega \frac{r^2\,\omega^2\,d\,\omega}{2\,(1+\omega^2)}$$

Um diesem Ausdrucke eine geometrische Bedeutung unterzulegen, errichten wir im Endpunkte des Vektors auf diesem eine Senkrechte, welche die verlängerte $O\,Q$ in R schneidet; es ist dann $P\,Q = a\,\omega$, $Q\,R = a\,\omega^2$, mithin der Sektor $A\,O\,P$ gleich dem dritten Teile der Dreiecksfläche $P\,Q\,R$.

Fig. 50.

Ändert sich der Radiusvektor irgend einer Kurve sprungweise innerhalb des zu quadrierenden Sektors, so besteht letzterer aus zwei oder mehr getrennten Sektoren, deren Flächen einzeln zu berechnen sind.

§ 82. Inneres und Äußeres geschlossener Kurven.

Sei $\mathfrak{L}$ eine sich selbst nicht schneidende geschlossene Linie in der $x\,y$-Ebene; sie bestehe aus endlich vielen Teilbögen, längs deren man $x = \varphi\,(t)$, $y = \psi\,(t)$ setzen kann, wobei auf jedem Teilbogen t eine endliche Strecke durchläuft, die Größen $\varphi\,(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'\,(t)$, $\psi'(t)$ stetig bleiben, letztere beide auch im Innern des Teilbogens nicht zugleich verschwinden. Der Punkt, in dem zwei Teilbögen zusammenstoßen, heiße eine Ecke der Kurve $\mathfrak{L}$. Diese werde ferner, soweit sie nicht gerade Stücke enthält, von jeder Geraden der Ebene höchstens in endlich vielen Punkten geschnitten; Tangenten und gerade Stücke der Kurve $\mathfrak{L}$ mögen in jeder bestimmten Richtung nur endlich viele laufen.

Diese auf Schnitt und Richtung bezüglichen Eigenschaften der Kurve $\mathfrak{L}$ sind im besonderen gesichert, wenn auf jedem Teilbogen, der nicht gerade ist, die Krümmung, die $1/\varrho$ sei, stetig, endlich und in seinem Innern von Null verschieden, also festen Vorzeichens ist. Dann durchläuft der Richtungswinkel der Tangente, für den nach § 21 (2) die Gleichung

$$d\tau = \frac{d\,s}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\sqrt{\varphi'\,(t)^2 + \psi'\,(t)^2}\,d\,t$$

gilt, einsinnig wachsend oder abnehmend eine endliche Wertstrecke, so daß die Tangente eines Teilbogens jede Richtung nur endlich oft

erreichen kann. Daraus folgt dann, daß ein Teilbogen einer Geraden nicht unendlich oft begegnen kann; denn zwischen zwei Schnittpunkten läge nach § 6 der Berührungspunkt einer der Geraden parallelen Tangente, deren es also unendlich viele gäbe, was ausgeschlossen ist.

Die erste wichtige Folge der geltenden Voraussetzungen ist, daß die Größe $\varphi'(t)$, abgesehen von Stücken $x = \text{const.}$, die vielleicht der Kurve $\mathfrak{K}$ angehören, nur endlich oft verschwindet. Denn wo dies geschieht, ist, abgesehen von den Ecken, $\psi'(t)$ von Null verschieden, und da die Gleichung der Tangente in der Form

$$(\xi - x)\,\psi'(t) - (\eta - y)\,\varphi'(t) = 0$$

geschrieben werden kann, wäre in einem solchen Punkte $\xi - x = 0$ oder $\xi = \text{const.}$ die Gleichung der Tangente, diese also der y-Achse parallel, was nur endlich oft eintreten kann. Nullstellen der Größe $\varphi'(t)$ und ebenso natürlich der Größe $\psi'(t)$ sind also nur endlich viele, vereinzelte vorhanden.

Die Unabhängige t durchlaufe längs der ganzen Kurve $\mathfrak{K}$ eine Strecke $t_0 \ldots t_0 + T$, die wir T nennen; es ist $\varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$, $\psi(t_0 + T) = \psi(t_0)$, und die Strecke T zerfällt in Teilstrecken entsprechend den Teilbögen der Kurve $\mathfrak{K}$. Definiert man die Funktionen φ, ψ für beliebige Werte der Unabhängigen durch die Gleichungen

$$\varphi(t - T) = \varphi(t), \quad \psi(t + T) = \psi(t),$$

so entspricht ein Kurvenpunkt allen Werten $t + nT$, wo n eine ganze Zahl ist; den Anfangspunkt t_0 der Strecke T kann man mit irgend einem Punkte der Kurve $\mathfrak{K}$ zusammenfallen lassen.

I. Wir zeigen zunächst, daß eine Gerade $x = \alpha$, in deren mit $\mathfrak{K}$ gemeinsamen Punkten die Größe $\varphi'(t)$ das Vorzeichen nicht wechselt, mit $\mathfrak{K}$ eine gerade Anzahl von Punkten gemein hat.

Ein solcher Zeichenwechsel kann in Ecken und Stellen, für die $\varphi'(t) = 0$ ist, stattfinden. Sei nun etwa $\varphi(t_0) > \alpha$ und durchlaufe t die Strecke T; dann ist $\varphi(t) - \alpha$ eine stetige, schließlich zum positiven Anfangswert zurückkehrende Funktion von t, die nur endlich oft verschwindet. In jedem ihrer Nullpunkte behält $\varphi'(t)$ nach Voraussetzung das Vorzeichen bei, tritt also ein Zeichenwechsel der Größe $\varphi(t) - \alpha$ ein. Die Anzahl dieser Zeichenwechsel ist gerade, da $\varphi(t) - \alpha$ zum Anfangsvorzeichen zurückkehrt; also ist auch die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = \alpha$ gerade. Nennen wir die entsprechenden Punkte der Kurve $\mathfrak{K}$ etwa $1, 2, \ldots n$, so sollen die Punkte der Strecken $(12), (34), \ldots (n-1, n)$ innere Punkte

der Kurve $\mathfrak{L}$ heißen; die Gerade $x = \alpha$ nennen wir unter den geltenden Voraussetzungen **regulär**.

Nicht reguläre, **singuläre** Gerade $x = \text{const.}$ gibt es nur in endlicher Anzahl; sie könnten durch Ecken gehen, ein Stück der Kurve $\mathfrak{L}$ enthalten, oder in ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{L}$ könnte die Größe $\varphi'(t)$ mindestens einmal das Vorzeichen wechseln, d. h. eine Berührung mit einem Punkte eines Teilbogens vorliegen. Tangenten von der Richtung der y-Achse gibt es aber nur endlich viele; dasselbe gilt also von singulären Geraden überhaupt.

Anderseits sind mindestens zwei singuläre Gerade vorhanden; denn ist z. B. $\varphi'(t_0) \neq 0$, so nimmt x in der Umgebung der Stelle $t = t_0$ nach der einen Richtung der Kurve $\mathfrak{L}$ zu, nach der anderen ab; läßt man t von t_0 aus die Strecke T durchlaufen, so wächst die Größe x etwa zu Anfang und wieder zum Schluß, muß also mindestens zweimal den Sinn ihrer Änderung gewechselt haben, was nach unseren Festsetzungen nur auf singulären Geraden angeht.

Die bisherigen Ergebnisse und Begriffe übertragen sich ohne wesentliche Änderung auf den Fall, daß die Kurve $\mathfrak{L}$ aus einer endlichen Anzahl sich selbst und einander nicht schneidender geschlossener Kurven der bisher von $\mathfrak{L}$ geforderten Beschaffenheit besteht, und dies werde von nun an zugelassen; die geraden Zahlen von Schnittpunkten einer Geraden mit den einzelnen geschlossenen Teilen von $\mathfrak{L}$ summieren sich zu einer geraden Zahl, und der Unterschied innerer und äußerer Punkte bleibt wie bisher, wobei z. B. unerheblich ist, ob die Punkte 1 und 2 demselben oder verschiedenen Teilen der Kurve $\mathfrak{L}$ angehören.

II. Seien nun $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$, wenn $\alpha_1 < \alpha_2$, zwei aufeinanderfolgende singuläre Gerade, P_0 ein Schnittpunkt der ersteren mit $\mathfrak{L}$, aber nicht Endpunkt einer geraden Strecke der Kurve $\mathfrak{L}$, die der Geraden $x = \alpha_1$ angehört; dieser Fall kann nachträglich erledigt werden. In P_0 sei $t = t_0$, also $\alpha_1 = \varphi(t_0)$. Da nun die Nullstellen von $\varphi'(t)$ vereinzelt liegen, gibt es eine solche positive Größe g, daß bei der Annahme

$$0 < \tau \leqq g, \quad 0 > -\tau \geqq -g$$

eine der folgenden vier Vorzeichenverteilungen auftritt:

$$(1)\quad \varphi'(t_0+\tau) > 0,\ \ \varphi'(t_0-\tau) > 0,\ \ \varphi(t_0+\tau) > \alpha_1,\ \ \varphi(t_0-\tau) < \alpha_1,$$

$$(2)\quad \varphi'(t_0+\tau) > 0,\ \ \varphi'(t_0-\tau) < 0,\ \ \varphi(t_0+\tau) > \alpha_1,\ \ \varphi(t_0-\tau) > \alpha_1,$$

$$(3)\quad \varphi'(t_0+\tau) < 0,\ \ \varphi'(t_0-\tau) > 0,\ \ \varphi(t_0+\tau) < \alpha_1,\ \ \varphi(t_0-\tau) < \alpha_1,$$

$$(4)\quad \varphi'(t_0+\tau) < 0,\ \ \varphi'(t_0-\tau) < 0;\ \ \varphi(t_0+\tau) < \alpha_1,\ \ \varphi(t_0-\tau) > \alpha_1.$$

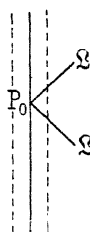
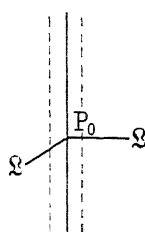
Die von P_0 ausgehenden, wachsenden und abnehmenden Werten von t entsprechenden Teile der Kurve $\mathfrak{L}$ liegen also in einer gewissen Ausdehnung beide auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Geraden $x = \alpha_1$. In den Fällen (1) und (4) wird die Kurve $\mathfrak{L}$ von der Geraden $x = \alpha_1$ durchsetzt (Fig. 52), in den Fällen (2) und (3), wie wir sagen wollen, gestreift (Fig. 51).

Der Fall (3), in welchem beide Kurventeile in das Gebiet $x < \alpha_1$ hereintreten würden, kann nicht bei allen Schnittpunkten der Geraden $x = \alpha_1$ auftreten; denn bei dieser Annahme könnte man die Werte t_0 in t-Strecken einbetten, auf denen $\varphi(t) - \alpha_1$ negativ bliebe, und diese Größe könnte im übrigen auf der Kurve $\mathfrak{L}$ nicht verschwinden, müßte also wegen ihrer Stetigkeit negativ bleiben, so daß die Gerade $x = \alpha_2$, auf der $\varphi(t) > \alpha_1$, von der Kurve $\mathfrak{L}$ überhaupt nicht erreicht würde, was der Voraussetzung widerspricht.

In mindestens einem Punkte P_0 tritt also einer der Fälle (1), (2), (4) ein, so daß eine der Ungleichungen

$$\varphi(t_0 \pm \tau) > \alpha_1$$

besteht. Je nachdem hier das obere oder untere Vorzeichen gilt, lasse man t von t_0 aus wachsen oder abnehmen, bis zum ersten Male ein Wert t' erreicht wird, für den $\varphi(t') = \alpha_2$; solcher Werte gibt es ja auf einer Strecke T nur endlich viele. Alsdann wächst x auf der Strecke $t_0 \ldots t'$, auf der $\varphi'(t)$ nur endlich oft und ohne Zeichenwechsel verschwindet, einsinnig. Nach Einl. V, 2. ist also auch umgekehrt t auf der x-Strecke $\alpha_1 \ldots \alpha_2$ eine stetige monotone Funktion von x, und demnach auch $y = \psi(t) = f(x)$ eine stetige Funktion von x. Den hierdurch definierten Teil der Kurve $\mathfrak{L}$ nennen wir einen Bogen $\mathfrak{B}$. Mindestens ein solcher kann offenbar auch bestimmt werden, wenn $\alpha_1 > \alpha_2$ oder auch von P_0 nach einer singulären Geraden $x = \alpha_3 < \alpha_1$ hin, wenn eine solche vorhanden ist; jeder von einem Punkte P_0 in den Streifen $\alpha_1 < x < \alpha_2$ hereingehende Kurventeil ist Teil eines Bogens $\mathfrak{B}$, der von $x = \alpha_1$ zu $x = \alpha_2$ hinüberführt, und dasselbe gilt von den Kurventeilen, die von Schnittpunkten der Geraden $x = \alpha_2$ mit $\mathfrak{L}$ in jenen Streifen hineinragen.

Stehen die Teilbögen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ über der x-Strecke $\alpha_1 \ldots \alpha_2$, und sind $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ auf ihnen die zur Abszisse x

gehörigen Ordinaten, so gelten, da die Kurve $\mathfrak{K}$ sich selbst nicht schneiden soll, entweder die Ungleichungen

$$(5) \qquad \alpha_1 < x < \alpha_2, \quad f_1(x) - f_2(x) > 0$$

oder die Ungleichungen

$$(6) \qquad \alpha_1 < x < \alpha_2, \quad f_1(x) - f_2(x) < 0$$

immer zusammen; allenfalls können die Differenzen $f_1(\alpha_1) - f_2(\alpha_1)$ und $f_1(\alpha_2) - f_2(\alpha_2)$ verschwinden. Im Falle (5) heiße $\mathfrak{B}_1$ der höhere der Teilbögen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, im Falle (6) sei umgekehrt $\mathfrak{B}_2$ höher als $\mathfrak{B}_1$ gelegen. Man kann daher sämtliche über der Strecke $\alpha_1 \ldots \alpha_2$ stehenden Bögen $\mathfrak{B}$ nach der Höhe ordnen, etwa so, daß $\mathfrak{B}_1$ der niedrigste ist, $\mathfrak{B}_2$ der nächst höhere, usf.; der höchste sei $\mathfrak{B}_k$; auf $\mathfrak{B}_\nu$ sei $y = f_\nu(x)$. Dann muß jeder dem Streifen $\alpha_1 < x < \alpha_2$ angehörige Punkt P_0 der Kurve $\mathfrak{K}$ einem der Bögen $\mathfrak{B}$ angehören; denn gehört er zum Werte $t = t_0$, so gibt es einen dem Werte t_0 zunächst liegenden Wert t_1, für den $\varphi(t_1) = \alpha_1$ wird; läßt man t von t_0 nach t_1 laufen, so geht der Punkt $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ in einen der Punkte P_0 stetig über, womit der Bogen $P_0 P_1$ als Teil eines von P_1 ausgehenden Bogens $\mathfrak{B}$ erkenntlich wird. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bögen $\mathfrak{B}$ liegt im Streifen $\alpha_1 < x < \alpha_2$ kein Punkt der Kurve $\mathfrak{K}$.

III. Hieraus folgt, daß jede Gerade $x = \alpha$, wenn $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, genau k Punkte mit $\mathfrak{K}$ gemein hat, nämlich je einen auf jedem der Bögen $\mathfrak{B}_\nu$; also ist k nach I. eine gerade Zahl. Wird $f_\nu(\alpha) = \beta_\nu$ gesetzt und der Punkt (α_1, β_ν) durch ν bezeichnet, so sind nach der obigen Definition (12), (34), ... $(k-1, k)$ innere Strecken der Kurve $\mathfrak{K}$. Die sämtlichen Strecken (12) erfüllen einen Normalbereich, den wir einen i n n e r e n der Kurve $\mathfrak{K}$ nennen wollen, und dessen unterer und oberer Grenzbogen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind; dessen Ecken die vier Punkte

$$(7) \qquad [\alpha_1, f_1(\alpha_1)], \quad [\alpha_1, f_2(\alpha_1)], \quad [\alpha_2, f_1(\alpha_2)], \quad [\alpha_2, f_2(\alpha_2)]$$

sind, die auch paarweise zusammenfallen können, in Fig. 45 die Punkte K, H, Q, P. Die Stützen sind Stücke der Geraden $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$, in der Figur KH und QP. Ebenso erfüllen die Strecken (34) einen inneren Normalbereich der Kurve $\mathfrak{K}$ usf.

Läßt man jetzt α von oben an den Wert α_1 heranrücken, so geht jeder Schnittpunkt der Geraden $x = \alpha$ mit $\mathfrak{K}$ in einen bestimmten Punkt P_0 der Geraden $x = \alpha_1$ über. Umgibt man jeden von diesen mit einem beliebig kleinen Kreise $\mathfrak{P}$, so liegen alle Schnittpunkte der Geraden $x = \alpha$ mit $\mathfrak{K}$ im Innern dieser Kreise, sobald $|\alpha - \alpha_1|$ hinreichend klein geworden ist; offenbar gilt dies auch,

wenn $\alpha < \alpha_1$ angenommen wird. Im Innern dieser Kreise gehen also auch alle Änderungen in der Zahl der Schnittpunkte der Geraden $x = \alpha$ mit $\mathfrak{L}$ vor sich, wenn α den Wert α_1 durchschreitet, und zwar können im Innern jedes Kreises $\mathfrak{P}$ nur zwei Schnittpunkte gewonnen oder verloren werden, wenn überhaupt eine Änderung eintritt. Das geschieht nur, wenn die von einem Punkte P_0 ausgehenden beiden Bögen $\mathfrak{B}$ nach derselben Seite der Geraden $x = \alpha$ hingehen, also in den Fällen (2) und (4), in denen die Kurve $\mathfrak{L}$ von der Geraden $x = \alpha$ gestreift wird. Zwischen den Kreisen $\mathfrak{P}$ tritt auf den erwähnten Geraden $x = \alpha$ keine Änderung der Schnittpunktszahl auf; geht die Gerade $y = \beta$ zwischen zwei Kreisen $\mathfrak{P}$ hindurch, so schneiden alle Geraden $x = \alpha$, wenn $|\alpha - \alpha_1|$ klein genug ist, im Gebiet $y < \beta$ die Kurve $\mathfrak{L}$ in Punkten, deren Anzahl dieselbe ist oder um eine gerade Zahl verschieden ausfällt. Je nachdem diese Anzahl gerade oder ungerade ist, sind die Punkte (α, β) äußere oder innere Punkte; mithin wird die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kreisen $\mathfrak{P}$ liegende Strecke der Geraden $x = \alpha_1$ entweder nur von inneren oder nur von äußeren Strecken umgeben. Da die Kreise $\mathfrak{P}$ beliebig klein sein dürfen, kann man auch sagen: jeder nicht der Kurve $\mathfrak{L}$ angehörige Punkt P der singulären Geraden $x = \alpha_1$ wird ganz von inneren oder ganz von äußeren Punkten der Kurve $\mathfrak{L}$ umgeben; je nachdem der eine oder andere Fall vorliegt, nennen wir die P enthaltende Strecke zwischen zwei Schnittpunkten der Geraden $x = \alpha$, etwa P_0 und P_1, eine innere oder äußere Strecke der Kurve $\mathfrak{L}$, was bisher nur auf regulären Geraden definiert war.

Man kann die erhaltenen Ergebnisse auch folgendermaßen aussprechen. In der Nähe eines Punktes P_0, in dem $\mathfrak{L}$ von der Geraden $x = \alpha_1$ gestreift wird, verschwinden oder erscheinen auf der Geraden $x = \alpha$ zwei Schnittpunkte, wenn α den Wert α_1 durchschreitet; wird dagegen die Kurve $\mathfrak{L}$ im Punkte P_0 von der Geraden $x = \alpha_1$ durchsetzt, so erfährt sie dasselbe in der Nähe dieses Punktes von allen Geraden $x = \alpha$, bei denen $|\alpha - \alpha_1|$ hinreichend klein ist. Ein Punkt $x = \alpha_1$, $y = \beta$, der nicht auf $\mathfrak{L}$ liegt, ist ein innerer oder äußerer, je nachdem die Gerade $x = \alpha_1$ im Gebiet $y < \beta$ die Kurve $\mathfrak{L}$ eine ungerade oder gerade Anzahl von Malen durchsetzt; oder auch, je nachdem die Anzahl der Schnittpunkte der Kurve $\mathfrak{L}$ mit der Geraden $x = \alpha_1$ im Gebiet $y < \beta$ ungerade oder gerade ist, wobei aber ein Punkt, in dem die Kurve $\mathfrak{L}$ gestreift wird, doppelt zu zählen ist.

IV. Diese Betrachtung bleibt im wesentlichen gültig, wenn z. B. in P_0 eine der Geraden $x = \alpha_1$ angehörige gerade Strecke der

Kurve $\mathfrak{K}$ beginnt und in P_3 endigt, wo $t = t_3$, und zwar etwa $t_3 > t_1$ sei. Dann wirkt die Strecke $P_0 P_3$ ebenso wie der Punkt P_0, in den wir den Punkt P_3 mit dem von ihm ausgehenden krummlinigen Teil der Kurve $\mathfrak{K}$ herangeschoben denken. Statt der Beziehungen (1), ... (4) hat man die Möglichkeiten

$$\varphi'(t_3 + \tau) > 0, \quad \varphi(t_3 + \tau) > \alpha_1,$$
$$\varphi'(t_0 - \tau) > 0, \quad \varphi(t_0 - \tau) < \alpha_1 \quad \text{usf.}$$

mit geänderten Ungleichheitszeichen. Je ein Bogen $\mathfrak{B}$ geht von P_0 und P_3 nach derselben oder entgegengesetzten Seite der Geraden $x = \alpha_1$ hin; demgemäß wird die Kurve $\mathfrak{K}$ in der Strecke $P_0 P_3$ von der Geraden $x = \alpha_1$ gestreift oder durchsetzt (Fig. 53 und 54). Die Schnittpunktszahl der Geraden $x = \alpha$ ändert sich also, wenn α den Wert α_1 durchschreitet, um zwei oder gar nicht, und ersteres tritt nur ein in den um P_0 und P_3 beschriebenen Kreisen $\mathfrak{P}$ zusammengenommen. Die Strecke $P_0 P_3$ beeinflußt also den inneren oder äußeren Charakter der Punkte der Geraden $y = \beta$, die sie nicht trifft, geradeso wie ein einzelner Schnittpunkt der Geraden $x = \alpha_1$.

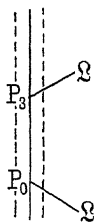
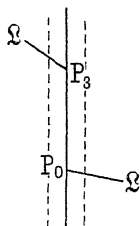



Fig. 53. Fig. 54.

Die am Ende des Abschnitts III gegebene Unterscheidung der inneren und äußeren Punkte bleibt gültig, wenn die Strecke $P_0 P_3$ für einen oder zwei Schnittpunkte gerechnet wird, je nachdem in ihr die Kurve $\mathfrak{K}$ von der Geraden $x = \alpha_1$ durchsetzt oder gestreift wird.

Ebenso bleibt auch die Zusammenfassung der inneren Strecken der Kurve $\mathfrak{K}$ zu Normalbereichen dieselbe wie vorher, nur daß möglicherweise ein Teil einer Stütze eines Normalbereichs zugleich Teil der Kurve $\mathfrak{K}$ sein kann. Rechnen wir die Punkte dieser selbst zu den inneren Punkten, so sind die Stützen der Normalbereiche in jedem Falle innere Strecken der Kurve $\mathfrak{K}$, und von inneren Punkten umgeben, soweit sie nicht Teile der Kurve $\mathfrak{K}$ sind.

V. Jetzt werde ein beliebiger der inneren Normalbereiche der Kurve $\mathfrak{K}$ ins Auge gefaßt und im positiven Sinne nach § 80 umkreist. Dann ist auf jedem Bogen $\mathfrak{B}$ ein bestimmter Fortgangssinn festgelegt, und es ist wichtig, zu zeigen, daß diese Fortgangsrichtungen sich zu einer einheitlichen Durchlaufsrichtung der gesamten Kurve $\mathfrak{K}$ zusammenfassen. Das bedeutet folgendes: Auf jedem Bogen $\mathfrak{B}$ ist durch den Fortgangssinn festgelegt, welcher seiner

Grenzpunkte der Anfangspunkt, welcher der Endpunkt ist. Stoßen zwei Bögen $\mathfrak{B}$ in einem Punkte P zusammen, so muß dieser für den einen Anfangspunkt, für den anderen Endpunkt sein; dadurch wird der einheitliche Fortgangssinn auf der Kurve $\mathfrak{L}$ definiert und gesichert; wir sagen dann, daß die Bögen den richtigen Anschluß haben.

Um einzusehen, daß dies geschieht, sei P_0 etwa der obere auf der linken Stütze $x = \alpha_1$ liegende Eckpunkt eines Normalbereichs $\mathfrak{N}$, der also in einem Gebiet $x \geqq \alpha_1$ liegt; in P_0 beginne keine gerade Strecke der Kurve $\mathfrak{L}$. Dann geht von P_0 aus der obere Grenzbogen $\mathfrak{B}_0$ des Gebietes $\mathfrak{N}$ nach rechts hin; P_0 ist also sein Endpunkt. Von P_0 geht nun noch ein zweiter Kurventeil $\mathfrak{B}_1$ aus, nach der Seite $x > \alpha_1$ hin oder nach der entgegengesetzten. Im ersten Falle muß $\mathfrak{B}_1$ unterer Grenzbogen eines Normalbereichs sein; denn zwischen $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ kann kein weiterer Bogen $\mathfrak{B}$ liegen, da dessen Ordinate, die zwischen den zu $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ gehörigen derselben Abszisse liegt, wenn diese gegen $\alpha_1 + 0$ konvergiert, sich der Ordinate des Punktes P_0 als ihrem Grenzwert nähern müßte, so daß von P_0 noch ein dritter Kurventeil ausginge, was der Voraussetzung, die Kurve $\mathfrak{L}$ schneide sich selbst nicht, widerspräche. In der Reihe der von der Geraden $x = \alpha_1$ nach rechts gehenden Bögen $\mathfrak{B}$, die nach der Höhe im Sinne des Abschnitts II geordnet seien, folgen also $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ unmittelbar aufeinander; auf einer Geraden $x = \alpha$, bei der $\alpha - \alpha_1$ hinreichend klein und positiv ist, haben die Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ aufeinanderfolgende Ordnungszahlen; in dem einen beginnt, im anderen endigt, wenn wir nach oben gehen, eine innere Strecke der Kurve $\mathfrak{L}$. Letzteres gilt für $\mathfrak{B}_0$; also beginnt in $\mathfrak{B}_1$ eine innere Strecke, $\mathfrak{B}_1$ ist unterer Grenzbogen, wird bei positivem Umlauf im Sinne wachsender x durchlaufen, also so, daß P_0 Anfangspunkt ist. Damit ist der richtige Anschluß der Bögen $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ erwiesen.

Geht der Bogen $\mathfrak{B}_1$ nach der Seite $x < \alpha_1$ von P_0 aus, so tritt in dem um P_0 nach III beschriebenen Kreise $\mathfrak{P}$ kein Wechsel in der Anzahl der Schnittpunkte der Geraden $x = \alpha$ mit $\mathfrak{L}$ ein; also haben die im Kreise $\mathfrak{P}$ liegenden Schnittpunkte der Geraden $x = \alpha$, gleichviel ob $\alpha - \alpha_1$ positiv oder negativ ist, in der Reihe der auf jeder von ihnen nach wachsenden Ordinaten geordneten Schnittpunkte Nummern, die sich um eine gerade Zahl unterscheiden. Mithin haben auch $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ denselben Charakter der Geradheit oder Ungeradheit in der Reihe der Bögen $\mathfrak{B}$, der jeder von ihnen angehört; auch $\mathfrak{B}_1$ ist daher oberer Grenzbogen eines Normalbereichs, und da dieser nach der Seite $x < \alpha_1$ hin liegt, ist der Punkt P_0 wiederum Anfangs-

punkt von $\mathfrak{B}_1$, während er Endpunkt von $\mathfrak{B}_0$ war. Damit ist der richtige Anschluß der Bögen $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ wiederum erwiesen.

Genau entsprechende Betrachtungen lassen sich natürlich durchführen, wenn P_0 unterer Eckpunkt oder auf der rechten Stütze des Normalbereichs $\mathfrak{N}$ liegt.

Beginnt in P_0 eine gerade Grenzstrecke, die zugleich der Kurve $\mathfrak{K}$ angehört, so ist der richtige Anschluß dieser Strecke mit ihrem Durchlaufssinn an $\mathfrak{B}_0$ schon dadurch gewährleistet, daß beide Bögen dem Umfang des Bereichs $\mathfrak{N}$ angehören. Schrumpft endlich die in P_0 beginnende gerade Grenzstrecke dieses Bereichs in einen Punkt zusammen, so ist $\mathfrak{B}_1$ der untere Grenzbogen, und der richtige Anschluß beider Bögen ist aus dem soeben bezeichneten Grunde wiederum gesichert.

In allen Fällen ist also ein gemeinsamer Grenzpunkt zweier Bögen $\mathfrak{B}$ auf dem einen Anfangspunkt, auf dem anderen Endpunkt; die Durchlaufssinne der Bögen $\mathfrak{B}$ geben einen einheitlichen Fortgangssinn auf jedem geschlossenen Teil der Kurve $\mathfrak{K}$.

VI. Jede durch zwei Punkte der Kurve $\mathfrak{K}$ begrenzte Strecke einer Stütze eines Normalbereichs $\mathfrak{N}$ ist nach III ganz von inneren Punkten umgeben, da dies nach der einen Seite, eben nach $\mathfrak{N}$ hin, der Fall ist; sie ist also auch noch in der Begrenzung eines zweiten, nach der anderen Seite hin liegenden Normalbereichs $\mathfrak{N}'$ enthalten; sie gehört der rechten Stütze des einen, der linken des anderen Bereichs an. Umkreist man also diese im positiven Sinne, so wird die betrachtete Strecke einmal von oben nach unten, einmal von unten nach oben durchlaufen. Umkreist man sämtliche Normalbereiche der Kurve $\mathfrak{K}$ im positiven Sinne, so wird jede Stütze, soweit sie nicht Teil der Kurve $\mathfrak{K}$ ist, genau zweimal, und zwar in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, die Kurve $\mathfrak{K}$ dagegen genau einmal in einem bestimmten Sinne, den wir den positiven nennen wollen.

Bildet man daher ein beliebiges Linienintegral

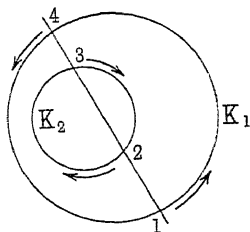
$$\int (P\,dx + Q\,dy)$$

um alle Normalbereiche positiv herum, so ist es gleich dem über die Kurve $\mathfrak{K}$ allein im positiven Sinne erstreckten Integral. Im besonderen gilt dies von dem Inhaltsintegral, in dem $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$ zu setzen ist: was wir sachgemäß den I n h a l t d e r K u r v e $\mathfrak{K}$ nennen dürfen, auch wenn sie aus mehreren Teilen besteht, ist die Summe der positiven Inhalte der Normalbereiche, also selbst positiv und, wie wir nach § 80 wissen, vom Bezugssystem unabhängig. Der Umlaufssinn der ganzen Kurve $\mathfrak{K}$ muß sich also in allen gleich

orientierten Bezugssystemen als der positive nach unserer Definition erweisen.

Hierin liegt eine wichtige geometrische Tatsache. Der positive Fortgangssinn eines geschlossenen Stückes der Kurve $\mathfrak{L}$ braucht, um völlig bestimmt zu sein, nur an einer Stelle festgelegt zu werden, etwa dadurch, daß man in einem Schnittpunkte einer regulären Geraden $x =$ const., je nachdem dieser als Schnitt mit der ganzen Kurve $\mathfrak{L}$ gerade oder ungerade Ordnungszahl hat, im Sinne abnehmender oder wachsender x fortgeht. Nun ist das Bezugssystem bis auf die Orientierung beliebig, der positive Fortgang immer derselbe; man erhält also auf der Kurve $\mathfrak{L}$ immer den positiven Fortgangssinn, wenn man auf einer sie schneidenden Geraden $\mathfrak{g}$ eine Richtung beliebig wählt, und in einem dieser Richtung nach an ungerader Stelle stehenden Schnittpunkte, in dem die Kurve $\mathfrak{L}$ durchsetzt wird, nach der Richtung fortgeht, die zu der auf der Geraden $\mathfrak{g}$ gewählten so liegt, wie die x-Achse zur y-Achse.

Fig. 55.

Besteht z. B. die Kurve $\mathfrak{L}$ aus einem Kreise $\mathfrak{K}_1$ (Fig. 55) und einem kleineren in dessen Innern liegenden Kreise $\mathfrak{K}_2$, so nehme man für $\mathfrak{g}$ eine Gerade, die mit $\mathfrak{L}$ die vier Punkte 1, . . . 4, davon die mittleren auf $\mathfrak{K}_2$, gemein hat. Der Punkt 2 hätte, wenn $\mathfrak{K}_2$ allein betrachtet, eine ungerade Ordnungszahl, auf $\mathfrak{L}$ dagegen hat er eine gerade; der Kreis $\mathfrak{K}_1$ wird als im Sinne des Uhrzeigers positiv durchlaufen, der Kreis $\mathfrak{K}_2$ entgegen der Uhrzeigerbewegung; innere Strecken der Kurve $\mathfrak{L}$ sind z. B. (12), (34). Wären außer $\mathfrak{K}_2$ noch andere Kreise im Innern von $\mathfrak{K}_1$, außerhalb des Kreises $\mathfrak{K}_2$ gegeben, so wäre auf ihnen allen der positive Umlauf der des Uhrzeigers.

VII. Bei der Bildung der Normalbereiche sowie bei der Definition der äußeren und inneren Punkte der Kurve $\mathfrak{L}$ war die x-Achse bevorzugt; wollen wir sie durch die y-Achse ersetzen, so können wir die bisher gebrauchten Begriffe durch den Zusatz „nach x“ auszeichnen, so daß wir, was bisher Inneres war, als Inneres nach x bezeichnen usf., und wir können dann auch von Normalbereichen nach y, regulären und singulären Geraden nach y, inneren und äußeren Punkten nach y sprechen, die nach Maßgabe des Abschnitts I auf den Geraden $y =$ const., die nach wachsenden x durchlaufen werden, zwischen dem ersten und zweiten Schnittpunkt mit $\mathfrak{L}$ usf. liegen.

Da die Umfangslinie eines Normalbereichs nach x, die wir ebenso wie den Bereich selbst $\mathfrak{N}$ nennen, während die Stützen wieder die Geraden $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$ seien, eine Kurve von den für $\mathfrak{L}$ geforderten Eigenschaften ist, so können wir auf sie die durchgeführten Entwicklungen anwenden. Eine Gerade $y = \beta$ schneidet den Umfang $\mathfrak{N}$, wenn überhaupt, auf einem der Grenzbögen, deren Gleichungen wieder $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ seien oder auf einer der Stützen. Die Gerade $y = \beta$ werde nach wachsenden x durchlaufen von einem Punkte (α_0, β) aus, der nach x wie nach y innerer oder nach beiden Beziehungen äußerer Punkt der Kurve $\mathfrak{N}$ sei; ein Punkt letzterer Art wird z. B. erhalten, wenn $|\alpha_0|$ groß genug und α_0 negativ ist. Dann muß der erste Schnittpunkt mit $\mathfrak{N}$, wenn er den Grenzbögen nicht angehört, auf einer Stütze des Normalbereichs liegen, die auf einer Seite an das Innengebiet nach x grenzt. In einem solchen Schnittpunkte tritt also die Gerade $y = \beta$ von nach x äußeren zu nach x inneren Punkten über oder umgekehrt. Entsprechend diesen Fällen tritt man hier von einer nach y äußeren Strecke der Geraden $y = \beta$ nach der ursprünglichen Definition des Innern im Abschnitt I zu einer inneren über oder umgekehrt.

Trifft dagegen die Gerade $y = \beta$ zuerst einen der Grenzbögen, z. B. den oberen $y = f_1(x)$, und zwar im Punkte (α, β), der nicht gerade ein Eckpunkt sei, so wird der Bogen von der Geraden durchsetzt oder gestreift, wobei auch nach IV zugelassen werden kann, daß ein Stück der Geraden dem Bogen angehört. Im ersteren Falle liegt der Bogen in der Umgebung des Schnittpunktes auf verschiedenen Seiten der Geraden $y = \beta$, so daß die Größe

$$y - \beta = f_1(x) - \beta,$$

wenn x den Wert α durchschreitet, das Vorzeichen wechselt; die Größe $f_2(x) - \beta$ ist, da $f_2(\alpha) < f_1(\alpha)$, an der Stelle $x = \alpha$ negativ, also auch in deren Umgebung, wenn $|x - \alpha|$ hinreichend klein ist; somit wechselt das Produkt

$$P = [f_1(x) - \beta]\,[f_2(x) - \beta],$$

an der Stelle $x = \alpha$ verschwindend, sein Vorzeichen.

Nun sind die nach x inneren Punkte (ξ, η) unseres Bereichs diejenigen, bei denen

$$\alpha_1 \leqq \xi \leqq \alpha_2, \quad [f_1(\xi) - \eta]\,[f_2(\xi) - \eta] \leqq 0,$$

da hierdurch die Lage zwischen den Schnittpunkten der Geraden $\xi =$ const. mit den Grenzbögen oder auf ihnen gekennzeichnet wird. Der Zeichenwechsel der Größe P beweist also, daß wir im Punkte

(α, β) vom nach x äußeren zum nach x inneren Gebiet der Kurve $\mathfrak{N}$ übergehen, gleichzeitig mit dem Übergang zu nach y inneren Punkten, oder daß wir nach x und y von inneren zu äußeren Punkten gelangen.

Wird die Kurve $\mathfrak{N}$ im Punkte (α, β) nur gestreift, so ändert die Größe $y - \beta$ ihr Vorzeichen nicht, ebensowenig wieder der zweite Faktor der Größe P; wir bleiben nach x wie nach y im Außengebiet oder Innengebiet der Kurve $\mathfrak{N}$, wie vorher.

Ist ferner (α, β) ein Eckpunkt, also $\beta = f_1(\alpha_1)$, und $f_1(\alpha_1) > f_2(\alpha_1)$, so behält der Faktor $f_2(x) - \beta$ sein negatives Vorzeichen; $f_1(x) - \beta$ wird positiv oder negativ, je nachdem der obere Grenzbogen im Eckpunkte (α_1, β) zunächst nach der oberen oder unteren Seite der geraden $y = \beta$ geht, also nach der entgegengesetzten oder derselben wie die Stütze $x = \alpha_1$, d. h. je nachdem die Gerade $y = \beta$ die Kurve $\mathfrak{N}$ durchsetzt oder streift. Im ersten Falle wird P negativ, wir kommen nach x wie nach y in das innere Gebiet; im zweiten Falle bleiben wir nach beiden Auffassungen im äußeren Gebiet, da P positiv wird.

Dasselbe ergibt sich endlich, wenn $\beta = f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha_1)$, so daß die Stütze $x = \alpha_1$ in einen Punkt einschrumpft; P wird negativ oder positiv, je nachdem der obere und untere Grenzbogen zunächst auf entgegengesetzter oder auf derselben Seite der Geraden $y = \beta$ verbleiben, also je nachdem diese die Kurve $\mathfrak{N}$ durchsetzt oder streift, vom Äußeren nach y zum Innern übergeht oder im Äußeren verbleibt.

In allen Fällen führt also der Fortgang längs der Geraden $y = \beta$ an dem Umfange $\mathfrak{N}$ gleichzeitig von nach x und y inneren zu nach x und y äußeren Punkten oder umgekehrt. Da es nun jedenfalls, wie oben bemerkt, auf der Geraden $y = \beta$ Punkte gibt, die nach x und y äußere sind, so enthalten alle durch Punkte des Umfangs $\mathfrak{N}$ auf dieser Geraden begrenzten Strecken nur Punkte, die nach x und y äußere oder nach x und y innere sind.

Inneres nach x und Inneres nach y ist also für den Normalbereich $\mathfrak{N}$ dasselbe.

VIII. Eben diese Folgerung läßt sich jetzt leicht für die ganze Kurve $\mathfrak{L}$ ziehen. Ihr Innengebiet nach x zerfällt in endlich viele Normalbereiche $\mathfrak{N}$. Wird die Gerade $y = \beta$ im Sinne wachsender x durchlaufen, beginnend bei Punkten, die nach x und nach y äußere sind, so kommt ein erster Schnittpunkt mit einem Umfang $\mathfrak{N}_0$ vor, etwa der Punkt P_0 (x_0, y_0), so daß die Punkte $x < x_0$, $y = \beta$ nach x und y äußere von allen Gebieten $\mathfrak{N}$ sind. Der Punkt P_0 kann

dann nicht einer der Kurve $\mathfrak{K}$ nicht angehörigen Stütze, abgesehen von deren Eckpunkten, angehören; denn dann wären alle Punkte seiner Umgebung nach III innere oder alle äußere Punkte von $\mathfrak{K}$, während doch ein Übergang von äußeren Punkten des Gebiets $\mathfrak{K}$ zu nach x inneren Punkten des Gebiets $\mathfrak{N}_0$ stattfindet, die zugleich innere Punkte von $\mathfrak{K}$ nach x sind. Also muß der erste Schnitt der Geraden $y = \beta$ mit dem Umfang eines Gebiets $\mathfrak{N}$ auf der Kurve $\mathfrak{K}$ liegen. Gehen wir weiter, so führt ein Schnitt mit einer Stütze eines Gebiets $\mathfrak{N}$ aus demselben Grunde zu einem Übergang von nach x inneren Punkten eines Gebiets $\mathfrak{N}$ zu ebensolchen eines anderen, also immer wieder zu nach x inneren Punkten von $\mathfrak{K}$; die Gerade $y = \beta$ kann nur, wo sie $\mathfrak{K}$ selbst schneidet und durchsetzt, von nach x inneren zu nach x äußeren Punkten von $\mathfrak{K}$ übergehen, und dieser Übergang findet nach VII wirklich statt. Damit ist aber alles Wesentliche bewiesen; denn daß die Gerade $y = \beta$ beim ersten Schnitt mit $\mathfrak{K}$ in das nach y innere Gebiet eintritt, liegt in der ursprünglichen Definition des inneren und äußeren (I). Das Innengebiet der Kurve $\mathfrak{K}$ nach x ist mit dem Innengebiet nach y völlig identisch.

Nun ist noch zu bedenken, daß von der Rechtwinkligkeit des Bezugssystems kein Gebrauch gemacht ist. Die Grundlage unserer Betrachtungen war, daß auf der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ die Tangente der y-Achse parallel wird, wenn $\varphi'(t) = 0$ ist, und daß Ähnliches bezüglich der x-Achse gilt. Die Gleichung der Geraden ist aber auch in schiefwinkligen Koordinaten linear; die Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta \\ 1 & \varphi(t) & \psi(t) \\ 1 & \varphi(t+h) & \psi(t+h) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta \\ 1 & \varphi(t) & \psi(t) \\ 0 & \varphi(t+h) - \varphi(t) & \psi(t+h) - \psi(t) \end{vmatrix}$$

oder

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta \\ 1 & \varphi(t) & \psi(t) \\ 0 & \varphi'(t+\theta h), & \psi'(t+\theta_1 h) \end{vmatrix} \qquad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta_1 < 1$$

ist offenbar erfüllt, wenn man für ξ und η die Koordinaten der zu t und $t + h$ gehörigen Punkte setzt, ist also die Gleichung der Sekante; wenn $\lim h = 0$, erhält man als Gleichung der Tangente

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta \\ 1 & \varphi(t) & \psi(t) \\ 0 & \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = 0,$$

und wenn $\varphi'(t) = 0$ sein sollte, folgt auch hier, wie oben einfach $[\xi - \varphi(t)]\psi'(t) = 0$, und $\psi'(t)$ verschwindet nicht zugleich mit $\varphi'(t)$. Hieraus und aus der entsprechenden, für die Gleichung $\psi'(t) = 0$ geltenden Betrachtung folgt bei den geltenden Voraussetzungen, daß die Nullstellen der Funktionen $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ nur vereinzelt vorkommen, und darauf haben alle weiteren Folgerungen beruht.

Somit ergeben die vorher durchgeführten Schlüsse, daß das innere Gebiet nach x identisch ist nicht nur mit dem nach y gebildeten, sondern auch mit dem Innengebiet nach jeder beliebigen Richtung, die man als schiefwinklig gegen die x-Achse geneigte y-Achse auffassen kann.

IX. Endlich zerlegen wir noch einen Normalbereich nach x, etwa $\mathfrak{N}$, in Normalbereiche nach y; zu diesem Zweck zerlege man, was nach den geltenden Voraussetzungen angeht, die beiden Grenzbögen des Bereichs $\mathfrak{N}$ in eine endliche Anzahl solcher Teile, daß zwischen zwei Teilpunkten entweder eine gerade Strecke der Kurve $\mathfrak{L}$ liegt, oder y als Funktion von x einsinnig ist. Die durch diese Teilpunkte gezogenen Geraden $x = \text{const.}$ zerlegen den Bereich $\mathfrak{N}$ in kleinere Normalbereiche nach x, und diese sind, wie man leicht sieht, zugleich Normalbereiche nach y. Sei ein solcher Teilbereich, den wir $\mathfrak{N}'$ nennen, von den Geraden $x = \alpha_3$ und $x = \alpha_4$ und den Bögen $y = f_3(x)$ und $y = f_4(x)$ begrenzt, f_3 und f_4 einsinnige Funktionen oder auch Konstante; sei dabei $\beta_3 = f_3(\alpha_3)$, $\beta_3' = f_4(\alpha_3)$, $\beta_4 = f_3(\alpha_4)$, $\beta_4' = f_4(\alpha_4)$, und wenn $\alpha_3 < x < \alpha_4$, sei $f_3(x) < f_4(x)$.

Dann sind die Eckpunkte des Gebietes $\mathfrak{N}_0$

$$P_3(\alpha_3, \beta_3), \quad P_3'(\alpha_3, \beta_3'), \quad P_4(\alpha_4, \beta_4), \quad P_4'(\alpha_4, \beta_4'),$$

und es bestehen die Beziehungen

$$\beta_3' \geqq \beta_3, \quad \beta_4' \geqq \beta_4.$$

Übrigens können in der Reihenfolge der Größen β vier Fälle eintreten, von denen wir nur zwei zu erörtern brauchen:

$$1. \ \beta_3 \geqq \beta_4, \quad \beta_3' \geqq \beta_4',$$
$$2. \ \beta_3 \geqq \beta_4, \quad \beta_3' \leqq \beta_4';$$

in zwei weiteren Fällen sind die Zeiger 3 und 4 vertauscht.

Im Falle 1 hat man die Ungleichungen

$$\beta_4 \leqq \beta_4' \leqq \beta_3', \quad \beta_4 \leqq \beta_3 \leqq \beta_3';$$

auf den Strecken $P_4 P_4' P_3'$ und $P_4 P_3 P_3'$ nimmt die Größe y als Funktion von x einsinnig zu oder bleibt konstant, so daß, abgesehen von den Strecken $y = \text{const.}$, die der Umfang des Bereichs $\mathfrak{N}'$ vielleicht

enthält, jeder Gerade $y = \beta$, bei der $\beta_4 < \beta < \beta'_3$ ist, dem Umfang in genau zwei Punkten begegnet. Als Stützen nach y können nur die Strecken $P'_3 P'_4$ und $P_3 P_4$ vorkommen; übrigens ist auf den Strecken $P_4 P'_4 P'_3$ und $P_4 P_3 P'_3$ die Abszisse x einsinnige und stetige Funktion von y, womit $\mathfrak{N}'$ als Normalbereich nach y erkannt ist.

Im Falle 2 hat man die Ungleichung

$$\beta_4 \leqq \beta_3 \leqq \beta'_3 \leqq \beta'_4;$$

auf den Strecken $P_4 P_3 P'_3 P'_4$ und $P_4 P'_4$ wächst y als Funktion von x einsinnig oder bleibt vielleicht auf den Strecken $P_3 P_4$ und $P'_3 P'_4$ oder einer von ihnen konstant; $\mathfrak{N}'$ ist also wieder als ein Normalbereich nach y erwiesen, dessen Stützen $P_3 P_4$ und $P'_3 P'_4$ sein oder in die Punkte P_4 und P'_4 einschrumpfen können. Im besonderen kann $\mathfrak{N}'$ auch ein Rechteck sein, wie auch im Falle 1.

Die aus 1 und 2 durch Vertauschung der Zeiger 3 und 4 hervorgehenden Fälle sind offenbar ebenso zu behandeln, und es ist somit gezeigt, daß das Innengebiet der Kurve $\mathfrak{K}$ in Teilbereiche zerlegt werden kann, deren jeder als Normalbereich nach x wie nach y betrachtet werden kann, d. h. nach irgend zwei gegebenen Richtungen, die wie die ursprünglichen Bezugsachsen gegeneinander orientiert sind. Solche Normalbereiche nennen wir zweiseitig.

Von diesen Ergebnissen wird bei den Doppelintegralen Gebrauch zu machen sein.

§ 83. Angenäherte Quadraturen.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten sei (in Fig. 56) AB die Grundlinie einer Fläche $ABDC$, $OM = x$ irgend eine Abszisse und $MP = y = f(x)$ die zugehörige Ordinate; existiert das Integral dieser Funktion, so stellt es nach § 80 die Fläche dar. Wir teilen nun AB in n gleiche Teile und ziehen durch jeden Teilpunkt eine Ordinate, so zerfällt die Fläche $ABDC = U$ in n Streifen, die sich auf verschiedene Weise näherungsweise quadrieren lassen.

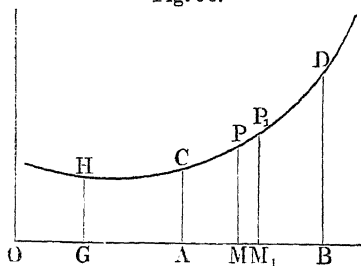



Fig. 56.

Das einfachste ist, die genannten Streifen als Rechtecke zu betrachten, welche den n^{ten} Teil von AB zur Grundlinie und die

und bezeichnen die Ordinaten, welche den Abszissen OA, $OA + h$, $OA + 2h$ usw. entsprechen, der Reihe nach mit y_0, y_1, y_2 usw., so erhalten wir folgende Näherungsformel

$$U = h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}). \tag{1}$$

Eine etwas größere Genauigkeit wird dadurch erreicht, daß man die einzelnen Streifen als Trapeze berechnet, was darauf hinauskommt, die n einzelnen Stücke des Bogens CPD als gerade Linien, mithin den Bogen selbst als gebrochene Linie anzusehen; dies gibt

$$U = h\frac{y_0 + y_1}{2} + h\frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + h\frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

und bei gehöriger Zusammenziehung

$$U = h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n). \tag{2}$$

Bedeutend größer wird die Annäherung, wenn man die einzelnen Stücke des Bogens CPD als krumme Linien, und zwar am einfachsten als parabolische Bögen ansieht. Zu diesem Zwecke nimmt man für n eine gerade Zahl und denkt sich die Endpunkte je drei aufeinanderfolgender Ordinaten

$$y_0, y_1, y_2; \quad y_2, y_3, y_4; \quad y_4, y_5, y_6 \quad \text{usw.}$$

durch Parabeln verbunden, deren Achsen parallel zur y-Achse liegen.

Die Möglichkeit dieser Konstruktion erhellt auf folgende Weise. Die Gleichung einer Parabel, deren Achse parallel zu OY liegt, ist im allgemeinen

$$\eta - \beta = \frac{(\xi - \alpha)^2}{q},$$

wobei α, β die Koordinaten des Scheitels sind, und q den Parameter bezeichnet. Soll diese Parabel durch drei gegebene Punkte $\xi_0\eta_0$, $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$ gehen, so müssen α, β, q den drei Gleichungen

$$\eta_0 - \beta = \frac{(\xi_0 - \alpha)^2}{q}, \quad \eta_1 - \beta = \frac{(\xi_1 - \alpha)^2}{q}, \quad \eta_2 - \beta = \frac{(\xi_2 - \alpha)^2}{q}$$

genügen; diese liefern aber jederzeit reelle Werte für α, β und q.

Die Fläche U besteht, wenn diese Konstruktion ausgeführt ist, aus $\frac{1}{2}n$ parabolischen Doppelstreifen, welche nach Formel (10) in § 79 leicht zu quadrieren sind; man erhält

$$U = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) + \tfrac{1}{3}h(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots$$
$$\cdots + \tfrac{1}{3}h(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

oder

$$(3)\qquad U = \tfrac{1}{3}h\,[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) + y_n],$$

welche Formel unter dem Namen der Simpsonschen Regel bekannt ist.

Um den Genauigkeitsgrad der Formeln (1), (2) und (3) beurteilen zu können, untersuchen wir noch, zwischen welchen Grenzen der Fehler liegt, den man bei Anwendung der genannten Formeln begeht. Nennen wir $F(x)$ die Fläche, welche von der festen Ordinate GH bis zu irgend einer Ordinate $MP = y = f(x)$ reicht, so ist der Flächeninhalt des zwischen den Ordinaten $f(x)$ und $f(x+h)$ liegenden Streifens $= F(x+h) - F(x)$; nach dem Taylorschen Satze hat man ferner bei einstweiliger Weglassung des Restes

$$F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \tfrac{1}{2}h^2F''(x) + \tfrac{1}{6}h^3F'''(x) + \cdots$$

oder, weil $F'(x) = f(x)$ ist,

$$F(x+h) - F(x) = hf(x) + \tfrac{1}{2}h^2f'(x) + \tfrac{1}{6}h^3f''(x) + \cdots$$

Als Inhalt des Trapezes, dessen parallele Seiten $f(x)$ und $f(x+h)$ sind, und welches h zur Höhe hat, ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}h\,[f(x) + f(x+h)] = hf(x) + \tfrac{1}{2}h^2f'(x) + \tfrac{1}{4}h^3f''(x) + \cdots,$$

mithin als Differenz beider Flächen

$$F(x+h) - F(x) - \tfrac{1}{2}h\,[f(x) + f(x+h)] = -\tfrac{1}{12}h^2\,[hf''(x) + \tfrac{1}{2}h^2f'''(x) + \tfrac{3}{20}h^3f^{\mathrm{IV}}(x) + \cdots].$$

Die eingeklammerte Reihe stimmt in ihren beiden ersten Gliedern überein mit der Entwicklung

$$f'(x+h) - f'(x) = hf''(x) + \tfrac{1}{2}h^2f'''(x) + \tfrac{1}{6}h^3f^{\mathrm{IV}}(x) + \cdots,$$

daher folgt durch Addition

$$F(x+h) - F(x) - \tfrac{1}{2}h\,[f(x) + f(x+h)] + \tfrac{1}{12}h^2\,[f'(x+h) - f'(x)] = \tfrac{1}{720}h^5f^{\mathrm{IV}}(x) + \tfrac{1}{1440}h^6f^{\mathrm{V}}(x) + \cdots$$

Um die Summe der noch übrigen Reihe direkt zu finden, setzen wir

$$(4)\qquad \varphi(h) = F(x+h) - F(x) - \tfrac{1}{2}h\,[f(x) + f(x+h)] + \tfrac{1}{12}h^2\,[f'(x+h) - f'(x)]$$

und differenzieren diese Gleichung mehrmals in Beziehung auf h; dies gibt

$$\varphi'(h) = \tfrac{1}{2}[f(x+h) - f(x)] - \tfrac{1}{6}h\,[2f'(x+h) + f'(x)] + \tfrac{1}{12}h^2f''(x+h),$$

$$\varphi''(h) = \tfrac{1}{6}[f'(x+h) - f'(x)] - \tfrac{1}{6}hf''(x+h) + \tfrac{1}{12}h^2f'''(x+h),$$

$$\varphi'''(h) = \tfrac{1}{12}h^2f^{\mathrm{IV}}(x+h).$$

Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $F(z)$, $F'(z) = f(z)$, $f'(z), \dots f^{IV}(z)$ stetig und endlich bleiben von $z = x$ bis $z = x + h$, sind $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$ und $\varphi'''(h)$ gleichfalls stetig und endlich von $h = 0$ bis $h = h$, und dann lassen sich die Formeln (2) und (3) des § 43 in der Weise anwenden, daß man $a = 0$, $n = 3$ setzt und φ statt f schreibt, wodurch entsteht

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\,\varphi'(0) + \tfrac{1}{2}h^2\,\varphi''(0) \\ + \frac{\psi(h) - \psi(0)}{\psi'(\vartheta h)} \cdot \frac{(1-\vartheta)^2\,\varphi'''(\vartheta h)}{2}\,h^2.$$

Nimmt man die willkürliche Funktion $\psi(h) = f'''(x + h)$, wo nun $f''''(x + h)$ keinen Zeichenwechsel erleiden darf, während h von 0 bis h wächst, und beachtet man ferner, daß $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ verschwinden, so erhält man

$$\varphi(h) = \frac{(1-\vartheta)^2\,\vartheta^2}{24}\,[f'''(x+h) - f'''(x)]\,h^4.$$

Das Maximum von $(1 - \vartheta)^2\,\vartheta^2$ ist $\dfrac{1}{16}$, daher kann

$$\varphi(h) = \frac{\varepsilon}{384}\,[f'''(x+h) - f'''(x)]\,h^4 \tag{5}$$

gesetzt werden, wo ε einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch bezeichnet. Durch Vergleich der Gleichungen (4) und (5) ergibt sich nun folgendes Resultat:

$$F(x+h) - F(x) = \tfrac{1}{2}h\,[f(x) + f(x+h)] \\ - \tfrac{1}{12}h^2\,[f'(x+h) - f'(x)] \\ + \tfrac{1}{384}\,\varepsilon\,h^4\,[f'''(x+h) - f'''(x)],$$

worin die beiden letzten Summanden rechter Hand die Differenz zwischen dem Flächenstreifen und dem Trapez angeben.

Wir nehmen der Reihe nach $x = a$, $a + h$, $a + 2h$, ... $a + (n-1)h$ und addieren alle entstehenden Gleichungen; die Summe ist

$$F(a+nh) - F(a) = h\,[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,h) \\ + \tfrac{1}{2}f(a+nh)] - \tfrac{1}{12}h^2\,[f'(a+nh) - f'(a)] + \tfrac{1}{384}h^4 S; \tag{6}$$

dabei wurde zur Abkürzung gesetzt

$$S = \varepsilon_0\,[f'''(a+h) - f'''(a)] + \varepsilon_1\,[f'''(a+2h) - f'''(a+h)] + \cdots \\ \cdots + \varepsilon_{n-1}\,[f'''(a+nh) - f'''(a+\overline{n-1}\,h)],$$

und es bedeuten hierin $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_{n-1}$ nicht näher bestimmte positive echte Brüche. Zur Gültigkeit der Formel gehört ferner, daß $f^{IV}(x)$

von $x = a$ bis $x = a + nh$ keinen Vorzeichenwechsel erleidet, also $f'''(x)$ entweder nur wächst oder nur abnimmt. Ebendeshalb beträgt S absolut weniger als dasjenige, was aus $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \cdots = \varepsilon_{n-1} = 1$ hervorgeht, d. h. man kann

$$S = \varrho\,[f'''(a + nh) - f'''(a)]$$

setzen, wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Ist nun $a + nh = b$, mithin $h = \frac{b-a}{n}$, so repräsentiert die linke Seite der Gleichung (6) den genauen Wert der Fläche U, welche zwischen den Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ liegt; rechter Hand ist $f(a) = y_0$, $f(a + h) = y_1$ usw., also

$$U = h(\tfrac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2} y_n)$$
$$- \tfrac{1}{12} h^2 [f'(b) - f'(a)] + \tfrac{1}{384}\, \varrho\, h^4 [f'''(b) - f'''(a)].$$

Der Vergleich mit (2) zeigt, welche Korrektion für eine genauere Rechnung nötig ist. Sollte die Bedingung, daß $f^{\mathrm{IV}}(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ sein Vorzeichen behalten muß, nicht erfüllt sein, so kann man die Fläche leicht in kleinere Stücke so zerlegen, daß innerhalb jedes einzelnen Stückes die genannte Bedingung erfüllt ist.

Um den Genauigkeitsgrad der Simpsonschen Regel kennen zu lernen, benutzen wir wieder die Formel (6), und zwar auf zweierlei Weise. Zuerst nehmen wir $n = 2m$ und bezeichnen den entsprechenden Wert von ϱ mit ϱ_1; nachher lassen wir m in (6) an die Stelle von n und zugleich $2h$ an die Stelle von h treten, wobei ϱ_2 der zugehörige Wert von ϱ sein möge; die zweite Gleichung ziehen wir von dem Vierfachen der ersten Gleichung ab und teilen den Rest durch 3; es ist dann

$$F(a + 2mh) - F(a)$$
$$= \tfrac{1}{3} h [f(a) + 4f(a+h) + 4f(a+3h) + \cdots + 4f(a + \overline{2m-1}\,h)$$
$$+ 2f(a+2h) + 2f(a+4h) + \cdots + 2f(a + \overline{2m-2}\,h)$$
$$+ f(a + 2mh)]$$
$$+ \tfrac{1}{288} (\varrho_1 - \varrho_2) h^4 [f'''(a + 2mh) - f'''(a)]$$

oder auch, wenn n für $2m$ geschrieben wird,

$$U = \tfrac{1}{3} h [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1})$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) + y_n]$$
$$+ \tfrac{1}{288}\, \varrho\, h^4 [f'''(b) - f'''(a)],$$

worin ϱ einen positiven oder negativen echten Bruch bezeichnet. Der letzte Ausdruck liefert für $\varrho = -1$ und $\varrho = +1$ die Grenzen,

zwischen denen der bei der Simpsonschen Regel begangene Fehler liegt.

Die Formeln zur angenäherten Quadratur enthalten zugleich die Mittel zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale, weil nach § 63 die Fläche $ABDC = U$ durch das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ausgedrückt wird; dabei ist die Existenz dieses bestimmten Integrals noch nicht allgemein bewiesen, was in § 90 geschehen soll.

§ 84. Streckung ebener Kurven in Parallelkoordinaten.

Bereits in § 20 wurde gezeigt, daß das Bogenelement bei rechtwinkligen Koordinaten

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{1}$$

ist; bei einem schiefwinkligen System, dessen Koordinatenwinkel γ heißen möge, sind $x + y\cos\gamma$ und $y\sin\gamma$ nach § 80 rechtwinklige Koordinaten, so daß man jetzt setzen kann

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx + \cos\gamma\,dy)^2 + \sin^2\gamma\,dy^2} \\ &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\gamma}. \end{aligned} \tag{2}$$

Betrachtet man x als Unabhängige, y als Funktion und schreibt demgemäß $dy = y'dx$, so gibt die Formel (2) durch Integration

$$s = \int\sqrt{1 + y'^2 + 2\,y'\cos\gamma}\,dx. \tag{3}$$

Die willkürliche Konstante bestimmt sich dadurch, daß man festsetzt, von welchem Anfangspunkte C aus der Bogen s gerechnet werden soll; es muß nämlich $s = 0$ werden, wenn für x die Abszisse des Punktes C genommen wird; ist sie a, so ergibt sich

$$s = \int_a^x\sqrt{1 + y'^2 + 2\,y'\cos\gamma}\,dx.$$

a) Die Parabel. In Beziehung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfang der Scheitel und dessen x-Achse die Scheiteltangente ist, lautet die Gleichung der Parabel

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad \text{mithin} \quad y' = \frac{x}{p},$$

und nach Formel (3)

$$s = \int\sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2}\,dx = \frac{1}{p}\int\sqrt{p^2 + x^2}\,dx,$$

oder bei Ausführung der Integration

$$s = \frac{1}{p}\left\{\tfrac{1}{2}x\sqrt{p^2+x^2} + \tfrac{1}{2}p^2 \lg\left(x+\sqrt{p^2+x^2}\right) + \text{const.}\right\}.$$

Wenn der Bogen im Scheitel anfangen soll, so muß $s = 0$ werden für $x = 0$; dies gibt

$$0 = \frac{1}{p}\left\{\tfrac{1}{2}p^2 \lg p + \text{const.}\right\}$$

und durch Elimination der Konstante oder bestimmte Integration

$$(4)\quad s = \int_0^x \sqrt{p^2+x^2}\,\frac{dx}{p} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{x\sqrt{p^2+x^2}}{p} + p\lg\left(\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p}\right)\right\}.$$

b) Die Ellipse. Unter Benutzung des gewöhnlichen Koordinatensystems hat man

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad y' = -\frac{b\,x}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

und wenn zur Abkürzung die numerische Exzentrizität

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \varepsilon$$

gesetzt wird, so findet sich leicht

$$(5)\qquad s = \int \sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2 x^2}{a^2-x^2}}\,dx.$$

In geschlossener Form läßt sich diese Integration nicht ausführen, und daher muß man s durch eine unendliche Reihe darstellen. Benutzt man zur Vereinfachung die Substitution $x = a\,\xi$, so wird

$$s = a\int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2\xi^2}{1-\xi^2}}\,d\xi,$$

und hier lassen sich alle die Transformationen anwenden, welche in § 73, b) gezeigt wurden. So ist nach der dortigen Formel (1)

$$\frac{s}{a} = \text{const.} + U_0 - \frac{U_2}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\frac{U_4}{4}\varepsilon^4 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{U_6}{6}\varepsilon^6 - \cdots,$$

$$U_0 = \arcsin\xi, \qquad U_m = \frac{(m-1)\,U_{m-2} - \xi^{m-1}\sqrt{1-\xi^2}}{m},$$

oder vermöge des Wertes von ξ

$$U_0 = \arcsin\frac{x}{a}, \quad U_m = \frac{m-1}{m}\,U_{m-2} - \frac{x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}}{m\,a^{m+1}}.$$

Versteht man unter s den vom Endpunkte der kleinen Halbachse an gerechneten Bogen BP (Fig. 57), so müssen x und s gleichzeitig verschwinden; nun ist für $x = 0$

$$U_0 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_4 = 0, \ldots,$$

mithin const. $= 0$, daher

$$(6) \qquad s = a\left[U_0 - \frac{U_2}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\frac{U_4}{4}\varepsilon^4 - \frac{1.3}{2.4}\frac{U_6}{6}\varepsilon^6 - \cdots\right].$$

Zur praktischen Berechnung werden die Formeln für U_2, U_4 usw. bequemer, wenn man den Winkel $COQ = \varphi$, die sogenannte Amplitude, einführt; es ist dann $x = a\sin\varphi$, $\xi = \sin\varphi$, mithin

$$(7) \qquad \sin\varphi = \frac{x}{a}, \qquad s = a\int\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$U_0 = \varphi, \quad U_m = \frac{(m-1)\,U_{m-2} - \sin^{m-1}\varphi\cos\varphi}{m}.$$

Für $x = a$, $\xi = 1$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die Länge des Ellipsenquadranten, welche E heißen möge. Die Werte von U_0, U_2, U_4 usw. gestalten sich dann sehr einfach, nämlich

Fig. 57.

$$U_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

$$U_2^1 = \frac{1}{2}\,U_0^1 = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2},$$

$$U_4^1 = \frac{3}{4}\,U_2^1 = \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\pi}{2}, \qquad U_6^1 = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\pi}{2} \text{ usw.,}$$

man erwartet also nach (6) die Gleichung

$$(8) \quad E = \tfrac{1}{2}\pi a\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\right\}.$$

Dieser Schluß ist aber nicht ohne weiteres erlaubt, weil die Potenzreihe in x, durch deren Integration die Reihe (6) gliedweise entsteht, nur auf solchen Strecken gleichmäßig konvergiert, die an den Wert $x = +1$ nicht heranreichen. Jedenfalls ist aber die Reihe E konvergent und stellt einen bestimmten Wert dar, und wir können zeigen, daß

$$(9) \qquad \lim_{x=1-0}(E - s) = 0;$$

d. h. lassen wir P an A heranrücken, so nähert die Bogenlänge s sich der Grenze E an, die also die Länge des Quadranten BA mißt.

Zu diesem Zweck benutzen wir, daß die Größen U_n, deren Ableitungen nach § 73, b) positiv sind, an der Stelle $x = 0$ verschwinden, mit wachsendem x also wachsen und positiv sind; daß ferner aus der zweiten Formel (7) folgt, da sie auch für die Größen U^1 gilt,

$$U_0^1 - U_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad U_m^1 - U_m = \frac{m-1}{m}(U_{m-2}^1 - U_{m-2}),$$

daß also

$$U_0^1 - U_0 > U_2^1 - U_2 > U_4^1 - U_4 > \cdots;$$

weiter ist

$$E - s = a\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - (U_2^1 - U_2)\frac{\varepsilon^2}{1} - (U_4^1 - U)\frac{\varepsilon^4}{3} - \cdots\right\},$$

und alle Glieder rechts sind absolut kleiner als die entsprechenden der Reihe

$$a\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{1} + \frac{\varepsilon^4}{3} + \cdots\right).$$

Da ε ein echter Bruch ist, konvergiert diese Potenzreihe, und wenn $\lim \varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\lim x = a$ wird, so ist der Wert dieser Größe, mithin auch der positiven Größe $E - s$, so klein, wie man will. Das bedeutet aber die Gleichung (9), und damit ist auch die Formel (8) bewiesen.

Fig. 58.

c) Die Hyperbel. Geht man von den Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$$

aus und setzt

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \varepsilon,$$

so erhält man

$$s = \int \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\, dx.$$

Diese Gleichung transformieren wir durch Einführung eines Hilfswinkels, der auch bei der Konstruktion der Hyperbel gute Dienste leistet (Fig. 58). Beschreibt man nämlich um den Mittelpunkt der Kurve zwei konzentrische Kreise mit den Radien $OA = a$, $OB = AC = b$, zieht ferner irgend einen gemeinschaftlichen Radius

OUV unter dem Winkel $AOU = \psi$ und legt ferner in U und V an jene Kreise die Tangenten UM, VN, so ist $OM = x = a \sec \psi$, und die Gleichung der Hyperbel gibt $y = b \operatorname{tg} \psi$, d. h. $MP = NV$; ferner wird

$$s = a \int \sqrt{\varepsilon^2 - \cos^2 \psi} \sec^2 \psi \, d\psi = a \varepsilon \int \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon^2}}.$$

Wegen $\varepsilon > 1$ ist der Quotient $\cos \psi / \varepsilon < 1$ und daher kann folgende Reihenentwicklung vorgenommen werden:

$$s = a \varepsilon \int \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon^2} - \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \frac{\cos^4 \psi}{\varepsilon^4} - \cdots \right\}.$$

Diese konvergiert gleichmäßig auf jeder ψ-Strecke, auf der $\cos \psi < \varepsilon$ bleibt, was immer der Fall ist als Potenzreihe der Größe $\cos \psi / \varepsilon$, kann also nach § 66 gliedweise integriert werden. Setzt man zur Abkürzung

$$V_m = \int_0^{\psi} \cos^m \psi \, d\psi,$$

so wird durch Integration der einzelnen Glieder

$$s = a \left\{ \text{const.} + \varepsilon \operatorname{tg} \psi - \frac{V_0}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{V_2}{4\varepsilon^3} - \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \frac{V_4}{6\varepsilon^5} - \cdots \right\},$$

und zwar geschieht die Berechnung der Integrale V_0, V_2, V_4 usw. nach folgenden Formeln:

$$V_0 = \psi, \quad V_m = \frac{\sin \psi \cos^{m-1} \psi + (m-1) V_{m-2}}{m},$$

wie man mittels der fünften Gleichung in § 76 (3) leicht findet. Rechnen wir den Bogen s vom Scheitel der Hyperbel aus, so wird $s = 0$ für $x = a$, d. h. für $\psi = 0$; in diesem Falle verschwinden alle V und es wird const. $= 0$, mithin

$$s = a \left\{ \varepsilon \operatorname{tg} \psi - \frac{V_0}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{V_2}{4\varepsilon^3} - \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \frac{V_4}{6\varepsilon^5} - \cdots \right\}.$$

Die Verlängerung der Ordinate MP schneidet von der Asymptote eine Strecke $OQ = z$ ab, deren Größe ist

$$z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} x = \varepsilon x = a \varepsilon \sec \psi;$$

vermöge der goniometrischen Formel

$$\sec \psi - \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \left(\tfrac{1}{4} \pi - \tfrac{1}{2} \psi \right)$$

erhält man als Differenz zwischen OQ und arc AP

$$z - s = a\varepsilon \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\psi) + \frac{a}{2\varepsilon}\left\{V_0 + \frac{1}{2}\frac{V_2}{2\varepsilon^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{V_4}{3\varepsilon^4} + \cdots\right\}.$$

Bei unendlich wachsenden x konvergiert ψ gegen die Grenze $\frac{1}{2}\pi$, zugleich wird

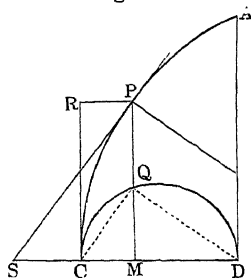
$$V_0 = \frac{\pi}{2}, \quad V_2 = \frac{1}{2}V_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \quad V_4 = \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2} \text{ usw.,}$$

mithin

$$\lim(z - s) = \frac{\pi a}{4\varepsilon}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2\varepsilon^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{1}{3\varepsilon^4} + \cdots\right\}.$$

Ungenau ausgedrückt, ist demnach der Unterschied zwischen der ganzen Asymptote und der ganzen Hyperbel eine Linie von endlicher Größe.

d) Die Cykloide. Wie in § 21 sei der Scheitel C der Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten (Fig. 59); es ist dann

Fig. 59.

$$y' = \sqrt{\frac{2a - x}{x}},$$

$$s = \int \sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx = 2\sqrt{2ax} + \text{const.}$$

Rechnet man auch den Bogen s vom Scheitel aus, so müssen s und x gleichzeitig verschwinden; man integriert von $x = 0$ an; dies gibt const. $= 0$ und

$$s = 2\sqrt{2ax},$$

was sehr leicht zu konstruieren ist. Für $x = 2a$ folgt, daß die obere Hälfte der Cykloide dem vierfachen Halbmesser, also die ganze Cykloide dem vierfachen Durchmesser des erzeugenden Kreises an Länge gleichkommt.

§ 85. Streckung ebener Kurven in Polarkoordinaten.

Nach Formel (2) in § 22 wird das Bogendifferential einer auf Polarkoordinaten r und θ bezogenen Kurve durch die Formel

$$ds = \sqrt{(r\,d\theta)^2 + dr^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta$$

ausgedrückt. Durch Integration ergibt sich hieraus

$$s = \int_{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta;$$

α denjenigen Sonderwert von θ ($\angle AOX$ in Fig. 60), welcher dem Anfangspunkte des Bogens entspricht.

a) Die Spirale des Archimedes hat zur Gleichung

$$r = a\theta, \quad r' = a,$$

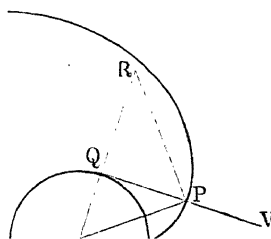
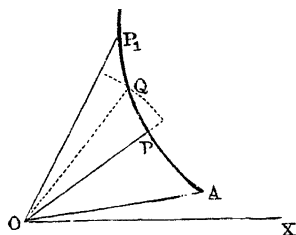
mithin ist

$$s = a \int \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta$$

oder

$$s = \tfrac{1}{2} a \{\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \lg(\theta + \sqrt{1 + \theta^2})\},$$

Fig. 60.

Fig. 61.

wobei es keiner Konstanten bedarf, wenn θ, r und s gleichzeitig verschwinden sollen.

b) Die Kardioide wird durch folgende, geometrisch leicht zu konstruierende Gleichung ausgedrückt:

$$r = b(1 + \cos\theta), \quad r' = -b \sin\theta;$$

es ist daher

$$s = b \int \sqrt{2(1 + \cos\theta)}\, d\theta = 2b \int \cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta$$

oder

$$s = 4b \sin\tfrac{1}{2}\theta;$$

eine Konstante ist nicht hinzuzufügen, wenn $s = 0$ werden soll für $\theta = 0$. Für $\theta = \pi$ ergibt sich die Länge der halben Kardioide $= 4b$, mithin die Länge der ganzen Kurve $= 8b$.

c) Die Kreisevolvente hat nach § 23, VII. eine Parameterdarstellung, aus welcher folgt

$$dr = \frac{a\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} d\omega, \quad r\, d\theta = \frac{a\omega^2}{\sqrt{1 + \omega^2}} d\omega, \quad ds = a\omega\, d\omega;$$

läßt man den Bogen s im Punkte A anfangen, in welchem $\omega = 0$ ist, so wird

$$s = \int_0^\omega a\,\omega\,d\,\omega\,\tfrac{1}{2}\,a\,\omega^2,$$

d. h. arc $AP = \frac{1}{2}\,QR$ in Fig. 61.

§ 86. Streckung doppelt gekrümmter Linien.

I. In Beziehung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem ist nach § 20

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}; \tag{1}$$

denkt man sich die Kurve durch ihre Projektionen auf die Ebenen xy und xz dargestellt, so wird sie durch zwei Gleichungen von den Formen

Fig. 62.

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x)$$

ausgedrückt, worin x die unabhängige Variable ist, und dann geht die Gleichung (1) über in

$$ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx.$$

Hier folgt augenblicklich

$$s = \int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx; \tag{2}$$

die Integrationskonstante bestimmt sich durch die Bedingung, daß $s = 0$ werden muß, wenn für x die Abszisse des Bogenanfanges gesetzt wird.

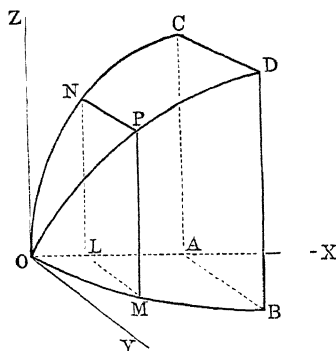
Beispielsweise betrachten wir den Durchschnitt eines aufrecht stehenden parabolischen und eines senkrecht dagegen liegenden cykloidischen Zylinders (Fig. 62). Für $OL = x$, $LM = y$, $LN = MP = z$ ist nämlich

$$y = 2\sqrt{bx}, \quad y' = \sqrt{\frac{b}{x}}, \quad z' = \sqrt{\frac{2a - x}{x}},$$

wobei b den Abstand des Brennpunktes vom Scheitel der Parabel bezeichnet; daraus folgt nach (2)

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{2a - x}{x}}\,dx = \sqrt{2a + b}\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

oder

$$s = 2\sqrt{(2a + b)x},$$

und hier ist keine Konstante hinzuzufügen, wenn unter s der Bogen OP verstanden und von 0 bis x nach x integriert wird. Die goniometrische Bedeutung des Wertes von s erkennt man leicht.

II. Nicht selten ist der Gebrauch eines gemischten Koordinatensystems vorteilhaft, welches dadurch entsteht, daß man zwei der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z in Polarkoordinaten umsetzt und die dritte Koordinate ungeändert läßt. Denken wir uns (Fig. 63) den Radiusvektor OP auf die xy-Ebene projiziert und bezeichnen diese Projektion ON mit u und den Winkel NOX mit χ, so haben wir

$$(3) \qquad x = u\cos\chi, \quad y = u\sin\chi, \quad dx^2 + dy^2 = (u\,d\chi)^2 + du^2,$$

während z ungestört bleibt; die Formel (1) wird dann zur folgenden

$$(4) \qquad ds = \sqrt{(u\,d\chi)^2 + du^2 + dz^2}.$$

Substituiert man die unter (3) angegebenen Werte von x und y auch in die Gleichungen der Kurve, so erhält man zwei neue Gleichungen zwischen u, χ, z; eine dieser neuen Koordinaten wählt man zur Unabhängigen und drückt die anderen durch diese aus, so daß die Formel (4) rechter Hand nur eine Veränderliche enthält und nachher integriert werden kann.

Fig. 63.

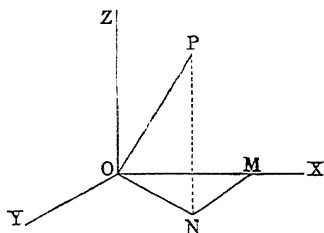
Als Beispiel diene der Durchschnitt eines Rotationskegels mit einer Schraubenfläche, wobei vorausgesetzt wird, daß die Achsen beider Flächen mit der z-Achse zusammenfallen. Nennen wir γ den Winkel zwischen der Kegelseite und z-Achse, c den Parameter der Schraubenfläche, so haben wir in rechtwinkligen Koordinaten

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\gamma, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{c}$$

und in gemischten Koordinaten

$$u = z\operatorname{tg}\gamma, \qquad \chi = \frac{z}{c} \pm m\pi,$$

wo m eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet. Hieraus folgt, wenn z als Unabhängige betrachtet wird,

$$ds = \sqrt{\left(\frac{z\operatorname{tg}\gamma}{c}\right)^2 + \operatorname{tg}^2\gamma + 1}\,.\,dz$$

oder kürzer

$$ds = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{c}\sqrt{z^2 + k^2}\,dz, \quad k = \frac{c}{\sin\gamma},$$

und durch Integration, indem man nach z von 0 ab integriert, also festsetzt, daß s und z gleichzeitig verschwinden sollen,

$$s = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{c}\int_0^z \sqrt{z^2 + k^2}\,dz = \frac{1}{2}\left\{\frac{z\sqrt{k^2+z^2}}{k} + k \lg\left(\frac{z + \sqrt{k^2+z^2}}{k}\right)\right\}\sec\gamma.$$

Wie man aus § 83, (4) sieht, läßt sich s mit dem Bogen einer gewissen Parabel vergleichen.

III. Um endlich eine Formel zu gewinnen, worin die gewöhnlichen sphärischen Polarkoordinaten vorkommen, setzen wir den Radiusvektor $OP = r$ und bezeichnen mit τ seinen Neigungswinkel gegen die xy-Ebene ($\angle PON = \tau$); wir haben dann

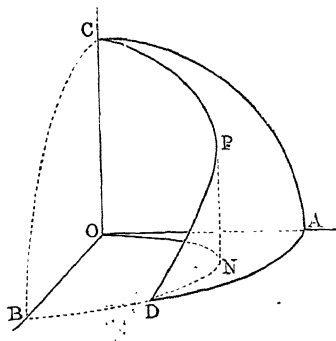



Fig. 64.

$$u = r\cos\tau, \quad z = r\sin\tau,$$
$$du^2 + dz^2 = (r\,d\tau)^2 + dr^2,$$

mithin statt der Gleichung (4)

$$ds = \sqrt{(r\cos\tau\,d\chi)^2 + (r\,d\tau)^2 + dr^2},$$

wie sich auch direkt aus der Bemerkung ergibt, daß ds als die Diagonale eines Quaders gelten kann, dessen Kanten $r\cos\tau\,d\chi$, $r\,d\tau$ und dr sind. Zum Übergange von x, y, z zu r, χ, τ dienen die Formeln

$$x = r\cos\tau\cos\chi, \quad y = r\cos\tau\sin\chi, \quad z = r\sin\tau;$$

aus den Gleichungen der Kurve in rechtwinkligen Koordinaten erhält man mittels derselben zwei Gleichungen zwischen r, τ, χ, wobei man eine der letzteren Größen als Unabhängige betrachtet.

Als Beispiel nehmen wir den Durchschnitt einer Kugel mit einem aufrecht stehenden Zylinder, dessen Leitlinie eine Archimedische Spirale ist (Fig. 64). Die ursprünglichen Gleichungen mögen sein

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad u = b\chi;$$

in räumlichen Polarkoordinaten ist dann

$$r = a, \quad a\cos\tau = b\chi,$$

folglich, wenn τ als Unabhängige angesehen wird,

$$ds = a\sqrt{\left(\frac{a \cos\tau \sin\tau}{b}\right)^2 + 1} \cdot d\tau$$

und

$$s = a\int\sqrt{\left(\frac{a \sin 2\tau}{2b}\right)^2 + 1} \cdot d\tau.$$

Rechnet man den Bogen vom letzten Kurvenpunkte D aus, so muß die Integrationskonstante so bestimmt werden, daß $s = 0$ wird für $\tau = 0$. Das Integral ist übrigens leicht in eine Reihe zu verwandeln; mittels der Substitution $\tau = \frac{1}{2}\omega$ erhält man nämlich

$$s = \frac{1}{2}a\int\sqrt{\left(\frac{a \sin\omega}{2b}\right)^2 + 1}\, d\omega = \frac{a^2}{4b\lambda}\int\sqrt{1 - \lambda^2\cos^2\omega}\, d\omega,$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} = \lambda$$

gesetzt wurde. Da $\lambda \cos\omega$ immer ein echter Bruch ist, so läßt sich die unter dem Integralzeichen vorkommende Wurzel mittels des binomischen Satzes gleichmäßig konvergent entwickeln; indem man die Bezeichnung

$$\Omega_n = \int_0^\omega \cos^n\omega\, d\omega$$

einführt, erhält man nach § 66 gliedweise integrierend

$$s = \frac{a^2}{4b\lambda}\left\{\Omega_0 - \frac{\lambda^2}{2}\Omega_2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^4}{4}\Omega_4 - \frac{1.3}{2.4}\frac{\lambda^6}{6}\Omega_6 - \cdots\right\},$$

$$\Omega_0 = \omega, \qquad \Omega_n = \frac{(n-1)\,\Omega_{n-2} + \sin\omega\cos^{n-1}\omega}{n}.$$

Für $\tau = \frac{1}{2}\pi$, mithin $\omega = \pi$ findet man die Länge des ganzen Durchschnittes DC, und zwar ist sie einerlei mit der Länge des Ellipsenquadranten, welcher aus den Halbachsen

$$\frac{a\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2b} \text{ und } a$$

konstruiert werden kann.

§ 87. Bestimmung des Rauminhalts.

I. Der Rauminhalt eines Körpers werde in einem beliebig festgelegten Bezugssystem vorläufig in folgender Weise definiert: Der Körper liege innerhalb des Bereichs von $x = a$ bis $x = b$; diese

Strecke teilen wir in Teilstrecken $x \ldots x + \Delta x$; die irgend einer Abszisse x entsprechende Ebene $x = \text{const.}$, die also auf der x-Achse senkrecht steht, schneide den Körper in einer Figur vom Inhalt $U = U(x)$, der eine stetige Funktion von x sei; das Volumen oder der Rauminhalt ist der Grenzwert der Summe

$$S = \sum U \Delta x,$$

dem diese zustrebt, wenn alle Δx zugleich der Null unendlich nahe kommen. Existieren nun die Integrale

$$(1) \qquad W = \int U\,dx, \quad V = \int_a^b U\,dx = W\Big|_a^b,$$

so gibt letzteres nach § 79 das gesuchte Volumen, da es dem Grenzwert der Summe S gleich ist.

Die Definition ist zunächst nicht invariant gegen Änderung der Koordinaten. Daß hier trotzdem eine invariante Größe vorliegt, zeigen wir im Kap. XVI.

Die Integrationskonstante bestimmt sich dadurch, daß man festsetzt, von welchem auf der x-Achse senkrechten Schnitte an das Volumen gerechnet werden soll; es muß nämlich V verschwinden, wenn für x die Abszisse des Anfangsquerschnittes genommen wird. Ist a die Abszisse dieses Schnittes, so ist

$$V\Big|_a^x = \int_a^x U\,dx$$

das Volumen bis zum Schnitte mit der Abszisse x hin. Als Beispiele mögen die Flächen zweiten Grades dienen.

a) Das Ellipsoid hat bekanntlich die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1;$$

der Querschnitt am Ende von x, senkrecht zur x-Achse gelegt, ist hier eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ und $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, daher

$$U = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Nach (1) findet sich

$$(2) \qquad V = \pi \frac{bc}{a^2}\left(a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3\right),$$

wobei es keiner Konstante bedarf, wenn das Volumen von der yz-Ebene an gerechnet wird, d. h. für $x = 0$ verschwindet. Die Formel (2)

gibt dann das Volumen einer Zone, welche in der Richtung der x die Dicke x besitzt. Für $x = a$ wird daraus das halbe Ellipsoid $= \frac{2}{3}\pi abc$; der Inhalt des ganzen Ellipsoids ist demnach $= \frac{4}{3}\pi abc$, d. h. gleich dem Inhalt einer Kugel, welche das geometrische Mittel aus den Halbachsen a, b, c zum Radius hat.

b) Das einschalige Hyperboloid drücken wir durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

aus und suchen den Rauminhalt der Zone von der Höhe z. Der Querschnitt $z =$ const. ist eine Ellipse aus den Halbachsen $\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + z^2}$ und $\frac{b}{c}\sqrt{c^2 + z^2}$, daher

$$U = \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 + z^2)$$

und nach Formel (1), wenn x durch z ersetzt wird,

$$V = \int_0^z U\,dz = \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 z + \tfrac{1}{3} z^3). \tag{3}$$

Für $z = c$ ergibt sich, daß die Zone von der Höhe c den Rauminhalt $\frac{4}{3}\pi abc$ besitzt. Konstruiert man überhaupt aus den drei Halbachsen a, b, c einen elliptischen Kegel K, einen elliptischen Zylinder C, ein Halbellipsoid E und die vorhin erwähnte hyperboloidische Zone H, so gilt für die Volumina dieser Körper die Proportion

$$K : E : C : H = 1 : 2 : 3 : 4;$$

der bekannte Satz des Archimedes bildet hiervon den Sonderfall $a = b = c$ mit Weglassung von H.

c) Das zweischalige Hyperboloid hat zur Gleichung

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

und sein Querschnitt $z =$ const. in der Höhe $z > c$ ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a}{c}\sqrt{z^2 - c^2}$ und $\frac{b}{c}\sqrt{z^2 - c^2}$, daher

$$U = \pi \frac{ab}{c^2}(z^2 - c^2),$$

und nach Formel (1), wenn z für x geschrieben wird,

$$V = \pi \frac{ab}{c^2}(\tfrac{1}{3} z^3 - c^2 z + \text{const.}).$$

Rechnen wir das Volumen vom Scheitel der Fläche aus, so muß $V = 0$ werden für $z = c$; daraus folgt const. $= \frac{2}{3}c^3$,

$$(4) \qquad V = \int_c^z U\,dz = \pi\frac{ab}{c^2}\left(\tfrac{1}{3}z^3 - c^2 z + \tfrac{2}{3}c^3\right),$$

und nun bedeutet V das Volumen einer Kappe von der Höhe $z - c$. Für $z = 2c$ ergibt sich, daß die Kappe von der Höhe c den Inhalt $\frac{4}{3}\pi abc$ besitzt.

d) Das elliptische Paraboloid hat zur Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \qquad 2z;$$

sein Querschnitt $z =$ const. ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{2az}$ und $\sqrt{2bz}$, daher $U = 2\pi\sqrt{ab}\,.\,z$ und

$$(5) \qquad V = \pi\sqrt{ab}\,.\,z^2 = \tfrac{1}{2}Uz,$$

wobei es keiner Konstante bedarf, wenn unter V der Inhalt einer Kappe von der Höhe z verstanden wird. Dieses Volumen kommt der Hälfte des umschriebenen elliptischen Zylinders gleich; hierin liegt das stereometrische Seitenstück zu der von Archimedes gegebenen Quadratur der Parabel.

e) Das hyperbolische Paraboloid mag durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

charakterisiert werden; sein Querschnitt, in der Entfernung x senkrecht zur x-Achse gelegt, ist eine Parabel, von welcher die xy-Ebene ein begrenztes Stück abschneidet. Betrachten wir nur das über der xy-Ebene liegende Raumgebiet, so ist U jenes Stück und

$$U = 2 \quad \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{2a}\cdot x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

mithin

$$(6) \qquad V = \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{b}}{a\sqrt{a}}\,x^4 = \quad \cdot Ux.$$

Das oberhalb der xy-Ebene vom Scheitel bis zum Querschnitt U reichende Volumen beträgt hiernach ein Vierteil des umschriebenen parabolischen Zylinders.

II. Sehr einfach gestaltet sich die Formel (1) in dem Falle, wo die Begrenzungsfläche des Körpers durch Umdrehung einer ebenen Kurve um die x-Achse entstanden ist. Der Querschnitt U bildet

dann einen Kreis, der die Ordinate der Kurve zum Radius hat, und wenn wir diese zur Abszisse x gehörende Ordinate wie gewöhnlich mit y bezeichnen. so haben wir $U = \pi y^2$ und

$$V = \pi \int y^2 \, dx. \tag{7}$$

Im Fall der Abszisse x zwei Ordinaten y_1 und $y_2 > y_1$ entsprechen, welche entweder zu derselben Kurve oder zu zwei verschiedenen Kurven gehören können, so beschreibt bei der Umdrehung die Strecke $y_2 - y_1$ einen Kreisring, dessen Inhalt $U = \pi (y_2^2 - y_1^2)$ ist; das Volumen des ringförmigen Rotationskörpers bestimmt sich dann durch die Formel

$$V = \pi \int (y_2^2 - y_1^2) \, dx. \tag{8}$$

Als Beispiel diene der Rauminhalt des Körpers, welcher entsteht, wenn ein mit dem Radius a beschriebener Kreis um eine Gerade gedreht wird, deren Entfernung vom Kreismittelpunkt $= c$ ist. Nehmen wir die Drehungsachse zur x-Achse und lassen die y-Achse durch den Kreismittelpunkt gehen, so haben wir als Gleichung der rotierenden Kurve

Fig. 65.

$$y = c \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Dabei sind die Fälle zu unterscheiden, ob die Drehungsachse ganz außerhalb des Kreises liegt oder ihn schneidet, d. h. ob $c > a$ oder $c < a$ ist. Im ersten Falle (Fig. 65) sind alle Querschnitte Kreisringe mit den Halbmessern

$$y_2 = c + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_1 = c - \sqrt{a^2 - x^2},$$

mithin ist nach Formel (8)

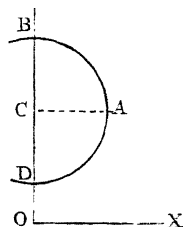
$$V = 4 \pi c \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

oder

$$V = 2 \pi c \Big(x \sqrt{a^2 \cdot \quad x^2} + a^2 \arcsin \cdot$$

Einer Konstanten bedarf es nicht, wenn man das Volumen von $x = 0$ ab rechnet. Für $x = a$ ergibt sich der Inhalt des halben Ringes $= \pi^2 a^2 c$, mithin als Inhalt des ganzen Ringes

$$R = 2 \pi^2 a^2 c. \tag{9}$$

Im zweiten Falle, den Fig. 66 zeigt, sind die Querschnitte teils Vollkreise, teils Kreisringe, je nachdem x weniger oder mehr als OD

beträgt; der ganze Rotationskörper besteht daher aus zwei Teilen, welche einzeln zu berechnen sind. Für den ersten Teil ist

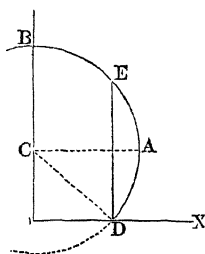
$$y = c + \sqrt{a^2 - x^2},$$

mithin nach Formel (7)

$$V = \pi \int_0^x \left(a^2 + c^2 - x^2 + 2c\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$$

oder durch Ausführung der Integration, wobei V und x gleichzeitig verschwinden,

$$V = \pi \left\{(a^2 + c^2)x - \tfrac{1}{3}x^3 + cx\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 c \arcsin \frac{x}{a}\right\}.$$

Fig. 66.

Hieraus ergibt sich der Rauminhalt der von der Fläche $BODE$ beschriebenen Zone Z, wenn man für x seinen größten Wert

$$OD = \sqrt{a^2 - c^2}$$

setzt; nach gehöriger Zusammenziehung findet man

$$Z = \pi \left\{ \frac{a(2a^2 + 7c^2)\sqrt{a^2 - c^2}}{3a} + a^2 c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right\}$$

Um zweitens das vom Abschnitt $DEAD$ beschriebene Volumen zu ermitteln, haben wir in Formel (8)

$$y_2 = c + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_1 = c - \sqrt{a^2 - x^2}$$

zu nehmen, wodurch

$$V = 2\pi c \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \text{const.}\right)$$

wird, und die Konstante so zu bestimmen, daß V verschwindet, wenn x seinen kleinsten Wert $OD = \sqrt{a^2 - c^2}$ erhält; man integriert von diesem Werte an und erhält

$$V = 2\pi c \left\{ c\sqrt{a^2 - c^2} + a^2 \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} + \text{const.} \right\} \Bigg|_{\sqrt{a^2 - c^2}}^{x}$$

$$= 2\pi\left(cx\sqrt{a^2 - x^2} - c^2\sqrt{a^2 - c^2}\right)$$

$$+ 2\pi a^2 c \left(\arcsin \frac{x}{a} - \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}\right).$$

Für $x = a$ erhält man das vom Segment $DEAD$ beschriebene Volumen

$$V_1 = \pi^2 a^2 c - \pi \left\{ 2\, c^2 \sqrt{a^2 - c^2} + a^2 c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right\}.$$

Das Doppelte von $Z + V_1$ gibt den Inhalt des ganzen Wulstes; führt man noch den Winkel $OCD = \gamma$ ein, indem man

$$\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sin \gamma$$

setzt, so findet man

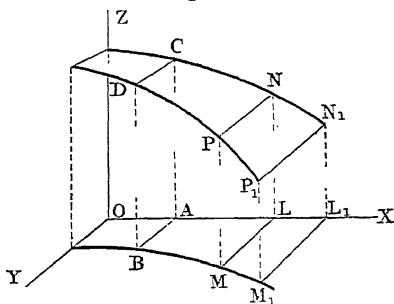
$$W = 2\,\pi\, a^2 c\,(\pi - \gamma) + \tfrac{2}{3}\pi\, a\,(2\, a^2 + c^2) \sin \gamma. \tag{10}$$

In dem noch übrigen Falle, wo die Drehungachse den Kreis berührt, mithin $c = a$ ist, liefern die Formeln (9) und (10) denselben Wert, nämlich $2\,\pi^2 a^3$.

Allgemein betrachtet, verlangt die Bestimmung eines Rauminhalts zwei Integrationen, deren erste den Querschnitt U, und deren zweite den Inhalt V bestimmt.

§ 88. Der Flächeninhalt von Zylinderflächen.

In Fig. 67 sei $OL = x$, $LM = y$, $LN = MP = z$, ferner $y = \varphi(x)$ die Gleichung der Leitlinie BM eines lotrecht stehenden Zylinders, und $z = \psi(x)$ die Gleichung der Leitlinie eines wagerecht und parallel zur y-Achse liegenden Zylinders; beide Zylinder schneiden sich in der doppelt gekrümmten Linie DP, und wenn man sich außer der beweglichen Ebene LMN noch eine dazu parallele feste Ebene ABC denkt, so entsteht auf dem wagerechten Zylinder eine begrenzte Fläche $CDPN$, deren Inhalt S ermittelt werden soll. Die Bestimmung dieser Fläche läuft auf die einer ebenen Fläche hinaus, die entsteht, wenn wir den Zylinder ohne Dehnung auf eine Ebene ausbreiten, und das vom Zylinderstück $CDPN$ bedeckte ebene Stück ins Auge fassen. Dabei gehen die Erzeugenden des Zylinders in parallele Gerade über, die Winkel irgend zweier Richtungen bleiben

Fig. 67.

ungeändert; die Kurve CN geht also in eine Gerade über, die jene Parallelen senkrecht schneidet, und deren Bogenelement ds mit dem der Kurve CN identisch ist.

Die Fläche $CNPD$ wird also, da $NP = y$, nach der gewöhnlichen ebenen Quadraturformel, in der dx durch ds ersetzt ist,

$$S = \int y\,ds = \int y\sqrt{dx^2 + dz^2} = \int y\sqrt{1 + z'^2}\,dx,$$

oder genauer, wenn $OA = a$,

$$(1) \qquad S = \int^{x} y\sqrt{1 + z'^2}\,dx.$$

Für y und z' sind ihre aus den Gleichungen der Kurven BM und CM gezogenen Werte $\varphi(x)$ und $\psi'(x)$ einzusetzen.

Fig. 68.

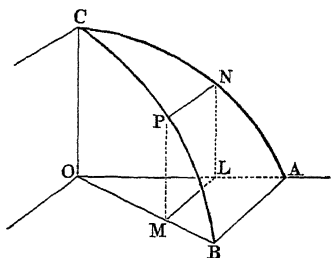
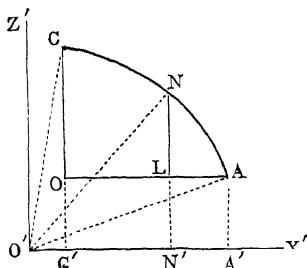



Fig. 69.

a) Kreisförmiges Klostergewölbe. Die halbe Spannweite des Gewölbes sei $OA = a$ (Fig. 68), der Pfeil $OC = h$, $AB = b$, und c der Radius der kreisförmigen Wölbungskurve CNA; ist ferner in Fig. 69 O' der Mittelpunkt des Bogens ANC, $O'C' = k$, $OC' = l$, so gelten folgende Gleichungen:

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad z = \sqrt{c^2 - (x + k)^2} - l,$$

$$\sqrt{1 + z'^2} = \frac{}{\sqrt{c^2 - (x + k)^2}},$$

$$\text{arc } CN = s = \int \sqrt{1 + z'^2}\,dx = \int \frac{c\,dx}{\sqrt{c^2 - (x + k)^2}},$$

und nach Formel (1), wenn die Fläche $CNP = S$ gesetzt wird,

$$S = \frac{bc}{a}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{c^2 - (x + k)^2}}$$

Das letzte Integral läßt sich auf die Form bringen

$$S = \frac{b}{a}\left\{c\int\frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{c^2-(x+k)^2}} - k\int\frac{c\,dx}{\sqrt{c^2-(x+k)^2}}\right\},$$

und daraus folgt, da S wie s für $x = 0$ verschwindet oder von 0 ab zu integrieren ist,

$$S = \frac{b}{a}\left\{-c\sqrt{c^2-(x+k)^2} - ks + \text{const.}\right\}_0^x$$

$$= \frac{b}{a}\left[c\left\{\sqrt{c^2-k^2} - \sqrt{c^2-(x+k)^2}\right\} - ks\right].$$

Da es hauptsächlich auf die ganze Fläche $ABC = F$ ankommt, so nehmen wir $x = a$ und beachten, daß

$$\sqrt{c^2-k^2} - \sqrt{c^2-(a+k)^2} = h + l - l = h$$

ist und daß gleichzeitig s in den Bogen CA übergeht, dessen Zentriwinkel $AO'C$ mit γ bezeichnet werden möge; dies gibt

$$F = \frac{bc}{a}(h - k\gamma).$$

Für Stichbögen wird die Formel einfacher, weil dann $k = 0$ ist.

b) Elliptisches Klostergewölbe. Besteht die Wölbungskurve aus einem Ellipsenquadranten mit den Halbachsen $OA = a$, $OC = c$, so ist

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Im Falle $a > c$, d. h. wenn das Gewölbe ein gedrücktes ist, ergibt sich

$$\sqrt{1+z'^2} = \sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},$$

$$S = \frac{b}{a}\int x\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx;$$

die Substitution $a^2 - x^2 = a^2u^2$ verwandelt das vorstehende Integral in folgendes:

$$S = -ab\int\sqrt{1-\varepsilon^2+\varepsilon^2u^2}\,du,$$

dessen Entwicklung sehr leicht ist. Bestimmt man die Konstante so, daß S für $x = 0$ verschwindet und setzt nachher $x = a$, d. h. integriert man nach x von 0 bis a, so erhält man für die Fläche ABC

$$F = \tfrac{1}{2}ab\left\{1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\lg\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right\}, \qquad a > c.$$

Im Falle $a < c$, d. h. wenn das Gewölbe ein überhöhtes ist, ergibt sich

$$\sqrt{1 + z'^2} = \sqrt{\frac{a^2 + \lambda^2 x^2}{a^2 - x^2}}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a},$$

$$S = \frac{b}{a} \int x \sqrt{\frac{a^2 + \lambda^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx.$$

Dieses Integral kann ebenso wie das vorige behandelt werden wodurch man erhält

$$F = \tfrac{1}{2} a b \left\{ 1 + \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \lambda \right\}, \quad a < c.$$

c) Kreuzgewölbe bestehen aus den Stücken, welche übrig bleiben, wenn die Flächen der Klostergewölbe von den Flächen vollständiger Tonnengewölbe abgezogen werden; ist z. B. in Fig. 70 ABC ein Teil eines Klostergewölbes und $ABDC$ ein Tonnengewölbe, so bildet der Rest BCD ein Stück von einem Kreuzgewölbe, dessen übrige Stücke diesem entweder kongruent oder auf ähnliche Weise entstanden sind. Mit Hilfe der Bezeichnungen $ABC = F$, $BCD = F^+$, arc AC = arc BD $= s$ ergibt sich

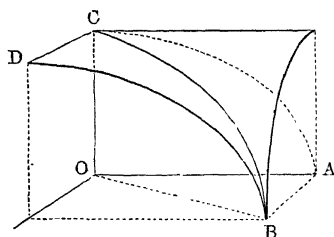



Fig. 70.

$$F^+ = bs - F,$$

wo F einen der früher angegebenen Werte hat.

§ 89. Der Flächeninhalt der Umdrehungsflächen.

Eine in der Ebene xz liegende Kurve CN (Fig. 71), deren Gleichung $z = \psi(x)$ heißen möge, werde um die x-Achse gedreht und die entstandene Drehfläche von einem aufrechten Zylinder geschnitten, dessen Leitlinie BM durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ bestimmt ist; der feste Parallelkreis CD, der bewegliche Parallelkreis NP, die Kurve CN und der Durchschnitt DP begrenzen ein Flächenstück $CDPN$, von welchem wir den Inhalt S aufsuchen wollen.

Wenn $OL = x$ um $LL_1 = dx$ zunimmt, so wächst S um den Streifen NPP_1N_1, den wir durch ein Stück des Mantels eines Kegelstumpfes annähernd ersetzen wollen; die Grundkreisradien des Stumpfes seien LN und L_1N_1, die Achse LL_1 oder die x-Achse; das

Stück werde durch die Halbebenen LL_1N und LL_1P abgegrenzt. Die Oberfläche dieses Stückes ist, wenn

$$\measuredangle NLP = \alpha = \arcsin\frac{y}{z}$$

eingeführt wird, nach einer elementaren stereometrischen Formel

$$\sigma = \alpha \cdot \overline{NN_1} \cdot \tfrac{1}{2}(LN + L_1N_1)$$

oder, wenn $LL_1 = \varDelta x$, $L_1N_1 = z + \varDelta z$, $L_1M_1 = y + \varDelta y$ gesetzt wird,

$$\sigma = \alpha\sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta z)^2}\,(z + \tfrac{1}{2}\varDelta z).$$

Die Oberfläche des Flächenstückes $CDPN$ definieren wir als Grenzwert der Summe aller Stücke σ, entsprechend der Zerlegung

Fig. 71.

des Flächenstückes in Gürtel, wie NPP_1N_1, bei denen man die Länge LL_1 unendlich abnehmen läßt. Dieser Grenzwert läßt sich als Integral darstellen, wenn es eine Funktion $F(x)$ gibt, die die Gleichung

$$dF(x) = z\arcsin\frac{y}{z}\sqrt{dx^2 + dz^2}$$

erfüllt. Alsdann kann auf sie der oben definierte Grenzwert nach einer in § 20 bei der Streckung gebrauchten Beweismethode zurückgeführt werden.

Man kann zunächst, wenn $\alpha z = \varphi(x)$ und θ_1, θ_2 echte positive Brüche sind, nach dem Mittelwertsatze setzen

$$\sigma = \varphi(x)\sqrt{1 + [\varphi'(x + \theta_1\varDelta x)]^2}\,\varDelta x \,.\left[1 + \frac{\varDelta x}{2}\,\varphi'(x + \theta_1\varDelta x)\right];$$

anderseits ist nach demselben Satze

$$\varDelta F(x) = \varphi(x + \theta_2\varDelta x)\sqrt{1 + [\varphi'(x + \theta_2\varDelta x)]^2}\,\varDelta x,$$

woraus, wenn $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ stetige Funktionen sind, folgt

$$-\varepsilon\varDelta x < \varDelta F(x) - \sigma < \varepsilon\varDelta x,$$

wobei ε beliebig klein positiv gegeben ist, δ entsprechend unabhängig von x bestimmt und $\Delta x < \delta$ genommen wird. Bildet man diese Ungleichung für alle Teilstrecken Δx, in die man die Strecke $AL = x - a$ zerlegt, so erhält man, wie in § 20 bei der Streckung,

$$- \varepsilon (x - a) < F(x) - F(a) - \sum \sigma < \varepsilon (x - a),$$

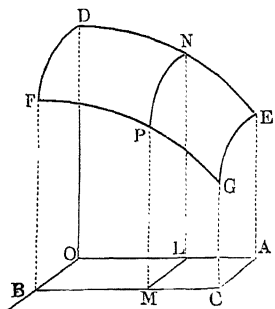
also

$$F(x) - F(a) = \lim \sum \sigma;$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist aber der definierte Flächeninhalt; er hat also den Wert

$$(1) \qquad F(x) - F(a) = \int_a^x z \arcsin \frac{y}{z} \sqrt{1 + z'^2}\, dx.$$

Die Werte von y und z sind aus den Gleichungen der gegebenen Kurven zu nehmen, und die Integrationskonstante ist so bestimmt, daß $S = 0$ wird für $x = OA$.

Fig. 72.

Als Beispiel diene der Flächeninhalt eines Kugelgewölbes (Fig. 72). Die Kurve BM ist hier eine Gerade parallel zur x-Achse, die gedrehte Kurve ein Kreis, in dessen Mittelpunkt wir den Koordinatenanfang legen; für $OB = b$, $OD = c$ sind demnach die gegebenen Gleichungen

$$y = b, \quad z = \sqrt{c^2 - x^2}, \quad z\sqrt{1 + z'^2} = c,$$

mithin nach Formel (1), wenn S die Fläche $DFPN$ bedeutet, die an der Stelle $x = 0$ beginnt,

$$S = c \int_0^x \arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx.$$

Integriert man zunächst unbestimmt und teilweise, so ergibt sich

$$S = cx \arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}} - bc \int \frac{x^2\, dx}{(c^2 - x^2)\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}}$$

$$= cx \arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}} - bc \int \left[\frac{c^2}{c^2 - x^2} - 1\right] \frac{dx}{\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}}$$

oder, wenn man wieder eine Integration ausführt,

$$S = c x \arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}} + b c \arcsin \frac{x}{\sqrt{c^2 - b^2}}$$
$$- b c^3 \int \frac{dx}{(c^2 - x^2)\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}}.$$

Setzt man in dem noch übrigen Integral $x = \sqrt{c^2 - b^2} \sin u$, so wird

$$\int \frac{dx}{(c^2 - x^2)\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}} = \int \frac{du}{c^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}$$
$$= \frac{1}{bc} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c} \operatorname{tg} u\right) = \frac{1}{bc} \operatorname{arctg} \frac{bx}{c\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}},$$

und daher ist durch Substitution in die vorige Gleichung

$$S = c x \arcsin \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2}} + b c \arcsin \frac{x}{\sqrt{c^2 - b^2}}$$
$$- c^2 \operatorname{arctg} \frac{bx}{c\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}},$$

wobei es keiner Integrationskonstante bedarf, weil S und x gleichzeitig verschwinden sollen. Geben wir dem x einen größten Wert $OA = a$ und bezeichnen die Fläche $DEGF$ mit F, so wird

$$F = \int_0^a c \arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx = a c \arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}}$$
$$+ b c \arcsin \frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}} - c^2 \operatorname{arctg} \frac{ab}{c\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}.$$

Die allgemeine Formel (1) vereinfacht sich wesentlich in dem Falle, wo es auf den zwischen den positiven Teilen der Koordinatenebenen enthaltenen Oktanten der Drehfläche ankommt, wo mithin die Kurven BM und CN kongruent sind. Für $y = z$ wird nämlich

$$\arcsin \frac{y}{z} = \frac{\pi}{2}, \qquad S = \tfrac{1}{2}\pi \int y \sqrt{1 + y'^2}\, dx;$$

demnach ist die Oberfläche einer durch vollständige Umdrehung entstandenen Zone

$$Z = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Als Beispiel diene das **abgeplattete Ellipsoid**, dessen Meridian zur Gleichung hat

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \lambda,$$

so erhält man zunächst

$$Z = \pi\frac{a}{b}\int\sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2}\,dx$$

und durch Ausführung der angedeuteten Integration

$$Z = \pi\frac{a}{b}\left\{x\sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2} + \frac{b^2}{\lambda}\lg(\lambda x + \sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2}) + \text{const.}\right\}.$$

Rechnet man die Zone von der Äquatorebene an, so muß $Z = 0$ werden, wenn $x = 0$; dies gibt

$$Z = \pi\frac{a}{b}\left\{x\sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2} + \frac{b^2}{\lambda}\lg\left(\frac{\lambda x + \sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2}}{b}\right)\right\}.$$

Für $x = b$ erhält man die Oberfläche des halben abgeplatteten Ellipsoids; die gesamte Oberfläche ist

$$\Omega = 2\pi ab\left\{\sqrt{1 + \lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\lg(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})\right\}.$$

Wenn die gedrehte Kurve so beschaffen ist, daß der Abszisse x zwei verschiedene y, etwa y_1 und y_2, entsprechen, so entstehen zwei Umdrehungsflächen, deren Größen einzeln bestimmt werden müssen. Wie man diese Bemerkung anzuwenden hat, mag folgendes Beispiel zeigen.

Die gedrehte Kurve sei ein mit dem Halbmesser $AC = a$ beschriebener Kreis (Fig. 73), dessen Mittelpunkt um $CO = c$ von der Drehungsachse entfernt liegt. Im Falle $c > a$ ist für alle Punkte des Quadranten AB:

$$y_2 = c + \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$Z_2 = 2\pi\int\limits_a^x (c + \sqrt{a^2 - x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\left\{ac\arcsin\frac{x}{a} + ax\right\},$$

wobei es keiner willkürlichen Konstanten bedarf; für $x = a$ erhält man die vom Quadranten AB beschriebene Fläche

$$R_2 = 2\pi a\left(\tfrac{1}{2}\pi c + a\right).$$

Die Punkte auf dem Quadranten AD bestimmen sich durch die Gleichung

$$y_1 = c - \sqrt{a^2 + x^2},$$

und daraus findet man für die von jenem Quadranten beschriebene Fläche

$$R_1 = 2\pi a\left(\tfrac{1}{2}\pi c - a\right).$$

Das Doppelte von $R_1 + R_2$ gibt die Gesamtoberfläche des entstandenen Ringes, nämlich

$$(2)\qquad R = 4\pi^2 a c.$$

Fig. 73.

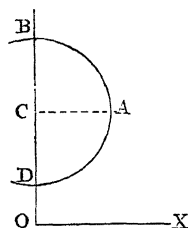
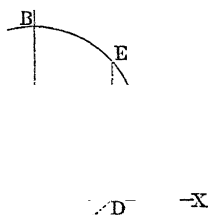



Fig. 74.

Im Falle $c < a$ (Fig. 74) besteht die Oberfläche, welche der Kreisbogen $BEAD$ beschreibt, aus den drei von BE, EA und AD erzeugten Flächen. Um die erste zu erhalten, geben wir in der Formel

$$Z_2 = 2\pi a\left\{c \arcsin\frac{x}{a} + x\right\}$$

dem x seinen größten Wert $OD = \sqrt{a^2 - c^2}$, woraus folgt

$$Z_2 = 2\pi a\left\{c \arcsin\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} + \sqrt{a^2 - c^2}\right\}.$$

Für alle Punkte des zweiten Bogens EA ist

$$y = c + \sqrt{a^2 - x^2},$$

mithin

$$Z = 2\pi\int\left(c + \sqrt{a^2 - x^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi a\left\{c \arcsin\frac{x}{a} + x + \text{const.}\right\},$$

wobei die Konstante so bestimmt werden muß, daß $Z = 0$ wird, wenn x seinen kleinsten Wert OD erhält. Dies gibt

$$Z = 2\pi a \left\{ c \arcsin \frac{x}{a} - c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} + x - \sqrt{a^2 - c^2} \right\}$$

und für $x = a$ erhält man für die vom Bogen EA beschriebene Fläche

$$Z_1 = 2\pi a \left\{ \tfrac{1}{2}\pi c + a - \sqrt{a^2 - c^2} - c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right\}.$$

Endlich werden alle Punkte auf AD durch die Gleichung

$$y = c - \sqrt{a^2 - x^2}$$

bestimmt, mithin ist hier

$$Z = 2\pi \int (c - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= 2\pi a \left\{ c \arcsin \frac{x}{a} - x + \text{const.} \right\};$$

gibt man der Konstanten einen solchen Wert, daß Z verschwindet für $x = OD$ und nimmt dann $x = a$, so erhält man für die vom Bogen AD beschriebene Fläche

$$Z_0 = 2\pi a \left\{ \tfrac{1}{2}\pi c - a + \sqrt{a^2 - c^2} - c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right\}.$$

Die Oberfläche des ganzen Wulstes ist das Doppelte von $Z_0 + Z_1 + Z_2$; durch Einführung des Winkels $OCD = \gamma$ wird hieraus

$$W = 4\pi a \{ c(\pi - \gamma) + a \sin \gamma \}. \tag{3}$$

Im letzten Falle $c = a$, $\gamma = 0$ liefern die Formeln (2) und (3) denselben Wert $4\pi^2 a^2$.

Kapitel XV.

Die einfachen bestimmten Integrale.

§ 90. Bestimmte Integrale als Summen.

Nach §§ 63 und 79 kann, wenn $F'(x) = f(x)$ ist, das bestimmte Integral von $f(x)$ als Grenzwert einer Summe dargestellt werden:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum (x_{\nu+1} - x_\nu) f(\xi_\nu);$$

dabei ist

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad a \leqq x_\nu \leqq b, \quad x_\nu \leqq \xi_\nu \leqq x_{\nu+1},$$

und die Beträge $x_{\nu+1} - x_\nu$ werden gleichzeitig beliebig klein. Hierbei war die Existenz der Funktion $F(x)$ vorausgesetzt. Jetzt beweisen wir, angeregt durch diese Formel, daß, wenn $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion ist, stets eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung jene ist, existiert, d. h. durch ein Grenzverfahren definiert werden kann. Dies gelingt in der Weise, daß zunächst die Existenz des bestimmten Integrals, und dann die des unbestimmten erwiesen wird.

Sei also $f(x)$ eine beliebige auf der Strecke $a \ldots b$ stetige Funktion. Wir bilden dann die soeben angeführte Summe unter etwas allgemeineren Bedingungen als bisher; wenn ε beliebig klein und positiv ist und $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ gesetzt wird, sei allgemein

$$0 < x_{\nu+1} - x_\nu < \varepsilon, \quad a \leqq x_\nu \leqq b, \quad x_\nu - \varepsilon \leqq \xi_\nu \leqq x_{\nu+1} + \varepsilon,$$

$$a \leqq \xi_\nu \leqq b, \qquad S_\xi = \sum_\nu^{0,\,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) f(\xi_\nu),$$

ebenso, wenn

$$x_\nu - \varepsilon \leqq \eta_\nu \leqq x_{\nu+1} + \varepsilon, \qquad a \leqq \eta_\nu \leqq b$$

angenommen wird,

$$S_\eta = \sum_\nu^{0,\,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) f(\eta_\nu).$$

Dann ist die Differenz $\xi_\nu - \eta_\nu$ der Ungleichung

$$|\xi_\nu - \eta_\nu| < 3\,\varepsilon$$

unterworfen, da ξ_ν und η_ν einer Strecke $x_\nu - \varepsilon \ldots, x_{\nu+1} + \varepsilon$ angehören, deren Länge höchstens $3\,\varepsilon$ ist; außerdem liegen ξ_ν und η_ν beide in der Strecke $a \ldots b$. Nehmen wir also ε hinreichend klein, so folgt aus der für die Strecke $a \ldots b$ vorausgesetzten Stetigkeit die Ungleichung

$$|f(\xi_\nu) - f(\eta_\nu)| < \varepsilon_0,$$

in der ε_0 beliebig klein vorgeschrieben sein kann. Daraus folgt

$$(1) \qquad |S_\xi - S_\eta| \leqq \sum (x_{\nu+1} - x_\nu)\,|f(\xi_\nu) - f(\eta_\nu)|,$$
$$|S_\xi - S_\eta| < \varepsilon_0\,(b - a);$$

die Differenz $S_\xi - S_\eta$ ist also beliebig klein, wenn die sämtlichen Teilstrecken $x_{\nu+1} - x_\nu$ hinreichend klein, d. h. kleiner als eine hinreichend kleine Größe ε gewählt werden.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir zwei Summen S mit besonderen Eigenschaften. Seien irgend zwei Einteilungen der Strecke $a \ldots b$ gegeben, deren Teilstrecken kleiner als ε sind, etwa

$$a = u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots u_{p-1},\ u_p = b,$$
$$a = v_0,\ v_1,\ v_2 \ldots v_{q-1},\ v_q = b;$$

werde ferner angenommen

$$u_\nu \leqq u'_\nu \leqq u_{\nu+1}, \qquad v_\nu \leqq v'_\nu \leqq v_{\nu+1}, \qquad u_{\nu+1} - u_\nu < \varepsilon,$$
$$v_{\nu+1} - v_\nu < \varepsilon,$$

und gesetzt

$$T_u = \sum_\nu^{0,\,p-1} (u_{\nu+1} - u_\nu)\,f(u'_\nu), \qquad T_v = \sum_\nu^{0,\,q-1} (v_{\nu+1} - v_\nu)\,f(v'_\nu).$$

Man ordne nun die Größen u_ν und v_ν zusammengenommen nach der Größe und bezeichne sie so durch $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},\ x_n = b$. Dann liegt jede Strecke $x_\nu \ldots x_{\nu+1}$ im Innern einer Strecke $u_\varrho \ldots u_{\varrho+1}$, und ebenso einer Strecke $v_\sigma \ldots v_{\sigma+1}$, also ist zunächst natürlich

$$(2) \qquad x_{\nu+1} - x_\nu < \varepsilon.$$

Aus demselben Grunde kann die der Strecke $u_\varrho \ldots u_{\varrho+1}$ angehörige Stelle u'_ϱ sich nicht um mehr als ε nach links von x_ν oder nach rechts von $x_{\nu+1}$ entfernen; somit folgt

$$(3) \qquad x_\nu - \varepsilon \leqq u'_\varrho \leqq x_{\nu+1} + \varepsilon.$$

Jetzt können wir die Strecke $u_\varrho \ldots u_{\varrho+1}$ aus einer Anzahl von Strecken $x_\nu \ldots x_{\nu+1}$ zusammensetzen, etwa den Strecken $x_\tau \ldots x_{\tau+1}$,

in denen $\tau = s, s+1, \cdots s+t-1$. Setzt man für diese Strecken immer

$$\xi_\tau = u'_\varrho,$$

so hat man die Gleichung

$$(u_{\varrho+1} - u_\varrho) f(u'_\varrho) = \sum_\tau^{s, s+t-1} (x_{\tau+1} - x_\tau) \cdot f(u'_\varrho)$$

$$= \sum_\tau^{s, s+t-1} (x_{\tau+1} - x_\tau) f(\xi_\tau)$$

und die Ungleichung (3) ergibt

$$x_\nu - \varepsilon \leqq \xi_\nu \leqq x_{\nu+1} + \varepsilon. \tag{4}$$

Das allgemeine Glied der Summe T_u ist also gleich der Summe einer Anzahl benachbarter Glieder der oben betrachteten Summe

$$S_\xi = \sum_\nu^{0, n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) f(\xi_\nu);$$

die bei dieser wesentlichen Ungleichungen sind hier unter (3) und (4) erhalten. Da ferner jede Strecke $x_\nu \ldots x_{\nu+1}$ in einer einzigen Strecke $u_\varrho \ldots u_{\varrho+1}$ enthalten ist und Strecken letzterer Art alle in Strecken $x_\nu \ldots x_{\nu+1}$ zerfallen, so ist genau

$$T_u = S_\xi.$$

Genau dieselbe Betrachtung gilt für das Teilstreckensystem $v_\sigma \ldots v_{\sigma+1}$, wobei die Größen v'_σ an Stelle der u'_ϱ treten, die Teilstrecken $x_\nu \ldots x_{\nu+1}$ aber dieselben bleiben wie vorher. Für jede der letzteren bestimmt man einen zugehörigen Wert η_ν nach der Regel

$$\eta_\nu = v'_\sigma,$$

wenn $v_\sigma \ldots v_{\sigma+1}$ diejenige Strecke der v-Teilung ist, der die Strecke $x_\nu \ldots x_{\nu+1}$ angehört; die Ungleichung (4), in der η_ν für ξ_ν gesetzt wird, bleibt gültig und wir finden so

$$T_v = S_\eta.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung (1) folgt jetzt, daß die Differenz $T_u - T_v$ beliebig klein ist, sobald ε hinreichend klein gewählt wird, d. h. sobald die u-Teilung wie die v-Teilung der Strecke $a \ldots b$ hinreichend eng ist:

$$|T_u - T_v| < \varepsilon_0 (b - a),$$

wenn ε_0 beliebig klein vorgeschrieben, und ε in passender Weise gewählt ist; es ist dabei

$$\varepsilon > u_{\varrho+1} - u_\varrho, \quad \varepsilon > v_{\sigma+1} - v_\sigma.$$

Jetzt sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ eine Reihe positiver, unendlich abnehmender Größen, also $\lim \varepsilon_n = 0$; ersetzt man durch sie ε in den letzten

Ungleichungen, und bezeichnet die entsprechenden Summen T_u durch $T_u^{(1)}$, $T_u^{(2)}$ usf., so kann man für die v-Teilung irgend eine der u-Teilungen nehmen, die einer Größe ε_n mit höherem Zeiger als die u-Teilung entspricht, und findet

$$|T_u^{(n)} - T_u^{(n+k)}| < \varepsilon_0 (b - a),$$

d. h. die Differenz $|T_u^{(n)} - T_u^{(n+k)}|$ liegt unter einer vorgeschriebenen beliebig niedrigen Schranke, sobald n hinreichend groß geworden ist. Daraus folgt nach dem allgemeineren Kernsatze (Einl. II, 5.), den wir hier zum ersten Male benutzen, daß ein Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} T_u^{(n)} = T$$

existiert. Die Größen $T_u^{(n)}$ sind in hohem Grade unbestimmt, da ja die u-Teilung sehr willkürlich gewählt werden kann; trotzdem ist es leicht zu sehen, daß immer derselbe Grenzwert herauskommt. Dann sei eine andere Reihe solcher Größen $T^{(n)}$ durch $T_v^{(1)}$, $T_v^{(2)}$, ... bezeichnet, indem bei jeder Größe $T_v^{(n)}$ die v-Teilung derselben Ungleichung unterliegt, wie die u-Teilung bei der Größe $T_u^{(n)}$, d. h. es sei

$$v_{\nu+1} - v_\nu < \varepsilon_n, \qquad u_{\nu+1} - u_\nu < \varepsilon_n.$$

Dann existiert nach dem Obigen ein Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} T_v^{(n)} = T',$$

zugleich aber sind die Differenzen $T_u^{(n)} - T_v^{(n)}$ mit abnehmenden Werten von ε_n, also bei hinreichend großen Werten von n so klein, wie man will, d. h.

$$\lim_{n=\infty} (T_u^{(n)} - T_v^{(n)}) = 0,$$

woraus sich nach dem Exhaustionssatze (Einl. II, 6.) sofort $T = T'$ ergibt.

Diese gemeinsame Grenze T nennen wir das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ und schreiben in einer schon benutzten Bezeichnung

$$T = \int_a^b f(x)\, dx;$$

daß das Integralzeichen seinen früheren Sinn behält, wird sich bald herausstellen.

Das einfachste bestimmte Integral von ersichtlichem Wert erhalten wir durch die Annahme $f(x) = 1$; dann ist

$$T_u = \sum (u_{\nu+1} - u_\nu) = b - a, \qquad \int^b dx = b - a.$$

§ 91. Rechenregeln des bestimmten Integrals und das unbestimmte Integral.

I. Bildet man die Annäherungssumme T_u für zwei stetige Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ und nennt sie dann $S_\xi^{(1)}$ und $S_\xi^{(2)}$, so ist offenbar $S_\xi^{(1)} + S_\xi^{(2)}$ eine ebenso gebildete Summe, in der $f(x)$ durch $f_1(x) + f_2(x)$ ersetzt ist; da nun bei den in § 90 immer vollzogenen Grenzübergängen

$$\lim S_\xi^{(1)} = \int_a^b f_1(x)\,dx, \qquad \lim S_\xi^{(2)} = \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

$$\lim (S_\xi^{(1)} + S_\xi^{(2)}) = \int_a^b [(f_1(x) + f_2(x)\,dx],$$

so ergibt sich aus der einfachsten der Limesregeln die erste und einfachste Rechenregel des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx.$$

Ebenso leicht finden wir, wenn C ein beliebiger Festwert ist,

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx;$$

denn bildet man die Summen S_ξ, indem man $f(x)$ durch $Cf(x)$ ersetzt, so erhält man CS_ξ, und offenbar ist

$$\lim CS_\xi = C \lim S_\xi.$$

Wir fügen hier eine leicht ersichtliche Ungleichung bei. Wenn auf der Strecke $a \ldots b$ die Beziehung

$$A > f(x) > B$$

gilt, so liegt

$$S_\xi = \sum (x_{\nu+1} - x_\nu)\,f(\xi_\nu)$$

zwischen den Grenzen $A(b-a)$ und $B(b-a)$, da offenbar

$$b - a = \sum (x_{\nu+1} - x_\nu)$$

ist. Der Schrankensatz (Einl. II, 6.) ergibt daher

$$A(b-a) \geqq \lim S_\xi \geqq B(b-a)$$

oder

$$A(b-a) \geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq B(b-a).$$

II. Sei $a < b < c$ und sei $f(x)$ auch auf der ganzen Strecke $a \dots c$ stetig; die auf letzterer mit S_ξ ähnlich gebildeten Summen T_u seien S''_ξ, die auf der Strecke $b \dots c$ gebildeten S'_ξ. Dann gilt die Gleichung

$$S''_\xi = S_\xi + S'_\xi \tag{1}$$

in dem Sinne, daß zwei willkürlich gebildete Summen S_ξ und S'_ξ zusammenaddiert eine bestimmte Summe S''_ξ ergeben. Denn teilt man die Strecken $a \dots b$ und $b \dots c$, so erhält man damit eine bestimmte Teilung der Strecke $a \dots c$; sind die Teilstrecken der ersteren beiden Teilungen kleiner als ε, so gilt dasselbe von der Teilung der Gesamtstrecke $a \dots c$. Nimmt man ε kleiner und kleiner, so nähert sich jede der Summen S_ξ, S'_ξ, S''_ξ ihrem Grenzwert und die Gleichung (1) ergibt

$$\lim S''_\xi = \lim S_\xi + \lim S'_\xi$$

oder

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

womit eine neue Rechenregel erhalten ist.

III. Setzt man

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx, \quad a \leqq \xi \leqq b, \quad a \leqq \xi + h \leqq b, \quad h > 0,$$

so folgt nach II, indem man a, b, c durch a, ξ, $\xi + h$ ersetzt,

$$F(\xi + h) - F(\xi) = \int_\xi^{\xi+h} f(x)\,dx, \tag{2}$$

also nach I

$$|F(\xi + h) - F(\xi)| \leqq Ch,$$

womit $F(\xi)$ auf der Strecke $a \dots b$ als stetige Funktion erwiesen ist.

Die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ ergibt ferner, wenn ε beliebig klein und positiv gegeben ist und δ passend gewählt wird,

$$|f(\xi + h) - f(\xi)| < \varepsilon,$$

sobald $h < \delta$; also liegt $f(x)$ auf der Strecke $\xi \dots \xi + h$ zwischen den Schranken $f(\xi) + \varepsilon$ und $f(\xi) - \varepsilon$; daraus folgt nach I

$$h[f(\xi) + \varepsilon] \geqq \int_\xi^{\xi+h} f(x)\,dx \geqq h[f(\xi) - \varepsilon]$$

oder

$$\frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h} f(x)\,dx = f(\xi) + \varrho,$$

wobei ϱ mit h verschwindet:

$$\lim_{h=+0} \varrho = 0,$$

also nach (2)

$$(3) \qquad \lim_{h=+0} \frac{1}{h} \int\limits_{\xi}^{\xi+h} f(x)\,dx = \lim_{h=+0} \frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h} = f(\xi).$$

Ersetzt man ξ und $\xi+h$ durch $\xi-h$ und ξ, so findet man ebenso

$$\lim_{h=+0} \frac{1}{h} \int\limits_{\xi-h}^{\xi} f(x)\,dx = \lim_{h=+0} \frac{F(\xi)-F(\xi-h)}{h} = f(\xi)$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$\lim_{h=-0} \frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h} = f(\xi).$$

Dies sagt mit der Gleichung (3) zusammen aus, daß die Funktion $F(\xi)$ auf der Strecke $a \ldots b$ an jeder Stelle eine Ableitung besitzt, und zwar ist

$$F'(\xi) = f(\xi), \qquad F'(x) = f(x).$$

Die bestimmte Integration, durch die wir $F(x)$ hergestellt haben, löst also allgemein die in § 63 ausgesprochene Aufgabe der Integralrechnung, eine Funktion zu finden, deren Ableitung die gegebene stetige Funktion $f(x)$ ist.

Aus $F(x)$ erhält man nach § 63 alle anderen stetigen Funktionen, deren Ableitung $f(x)$ ist, in der Form $F(x)+C$.

Zugleich ist aus der unter II erhaltenen Additionsformel, wenn α und β der Strecke $a \ldots b$ angehören und $\alpha < \beta$ ist, ersichtlich

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx,$$

womit die Übereinstimmung des jetzt gebildeten bestimmten Integrals mit dem in § 79 betrachteten erwiesen ist.

Die allgemeinste stetige Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist, hat also die Form

$$C + \int\limits_{a}^{x} f(\alpha)\,d\alpha,$$

wobei C von x unabhängig ist.

IV. Man kann das Ergebnis des Absatzes III auch dahin aussprechen, daß ein bestimmtes Integral, nach der oberen Grenze differenziert, den an dieser Grenze gebildeten Wert der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion, des Integranden, ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)\,dx = f(b).$$

Aus der Gleichung (II)

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

schließt man dann, indem man a und c festhält, b als Unabhängige betrachtet,

$$0 = \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\partial}{\partial b}\int_b^c f(x)\,dx,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_b^c f(x)\,dx = -f(b);$$

die Ableitung nach der unteren Grenze ist also entgegengesetzt dem an dieser genommenen Werte des Integranden. Diese Rechenregeln stellen die Verbindung mit dem Differentialzeichen her.

V. Eine leichte Erweiterung des Begriffs des bestimmten Integrals liegt nahe, die wieder mit seiner Fassung in § 79, (4) übereinstimmt. Zunächst war bisher immer $a < b$; man behält aber alle bisherigen Formeln, insbesondere die unter IV gegebenen, bei, wenn man setzt

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4}$$

ebenso auch die Ergebnisse des Absatzes II; ist z. B. $a < b < c$, so kann man schreiben

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

da diese Gleichung mit der unter II aufgestellten nach der Definition (4) gleichbedeutend ist.

VI. Wir schließen einige Beispiele unmittelbarer Berechnung bestimmter Integrale an.

a) Sei

$$f(x) = x^k,\quad x_\nu = a\alpha^\nu,\quad x_n = b = a\alpha^n,\quad \alpha = \sqrt[n]{b\,a},\quad b > a > 0;$$

dann ist

$$S = \sum_\nu^{0,\,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) f(x_\nu) = \sum_\nu^{0,\,n-1} a\alpha^\nu (\alpha - 1) a^k \alpha^{\nu k}$$

$$= a^{k+1}(\alpha - 1) \sum_\nu^{0,\,n-1} \alpha^{\nu(k+1)} = a^{k+1} \frac{(\alpha^{n(k+1)} - 1)}{\alpha^{k+1} - 1} (\alpha - 1)$$

$$= (b^{k+1} - a^{k+1}) \frac{\alpha - 1}{\alpha^{k+1} - 1};$$

ist k eine positive ganze Zahl, so ist

$$\frac{\alpha^{k+1} - 1}{\alpha - 1} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k.$$

Nun ist nach Einl. III, 2.

$$\lim_{n=\infty} \alpha = 1,$$

also

$$\lim \frac{\alpha^{k+1} - 1}{\alpha - 1} = k + 1,$$

und demnach

$$\lim_{n=\infty} S = \int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Bigg|_a^b,$$

was mit bekannten Formeln (§ 64) übereinstimmt.

Ist $k = -1$, so folgt

$$S = n(\alpha - 1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right);$$

nimmt man für n eine Potenz von 2, so folgt nach Einl. III, 2. sofort

$$\lim S = \lg \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{dx}{x}.$$

b) Sei ferner

$$f(x) = c^x,\qquad c > 1,\qquad x_\nu = a + \nu\delta,\qquad x_n = b,\qquad x_0 = a;$$

dann ist

$$S = \delta \sum_\nu^{0,\,n-1} c^{a+\nu\delta} = c^a \delta \frac{c^{n\delta} - 1}{c^\delta - 1} = (c^b - c^a) \frac{\delta}{c^\delta - 1}.$$

Nun ist nach Einl. V, 3. (3)

$$\lim_{\delta=0} \frac{c^\delta - 1}{\delta} = \lg c;$$

also folgt

$$\lim S = \int_a^b c^x\,dx = \frac{c^b - c^a}{\lg c} = \frac{c^x}{\lg c}\Big|_a^b.$$

c) Sei endlich

$$f(x) = \cos x, \qquad a = 0, \qquad x_\nu = \nu h, \qquad x_n = b = nh;$$

dann ist

$$S = \{1 + \cos h + \cos 2h + \cdots + \cos(n-1)h\}\,h,$$

also nach der elementaren Formel § 39 (1)

$$S = h\left\{\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n - \frac{1}{2})h}{2\sin\frac{1}{2}h}\right\} = \tfrac{1}{2}h + \frac{\sin nh \cos\frac{1}{2}h - \cos nh \sin\frac{1}{2}h}{\sin\frac{1}{2}h/\frac{1}{2}h};$$

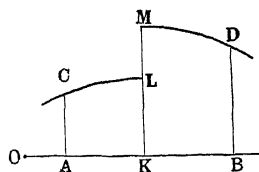
daraus folgt auf Grund der Formel Einl. III, 3. (7)

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

sofort

$$\lim_{n=\infty} S = \lim_{h=0} S = \sin b, \qquad \int_0^b \cos x\,dx = \sin b.$$

Man sieht aus diesen Beispielen, daß man die besonderen Grundformeln der Analysis auch vom bestimmten Integral aus erhält, und so auch mit diesem beginnend die Analysis entwickeln könnte.

Fig. 75.

VII. Der Hauptsatz, der in der Gleichung

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

liegt, setzt $F(x)$ als stetig auf der Strecke $a \dots b$ voraus. Man hat bisweilen aber auch unstetige Funktionen zu betrachten, z. B. solche (Fig. 75), die auf der Strecke $a \dots \xi$ und wieder auf der Strecke $\xi \dots b$ stetig sind, wobei $OA = a$, $OK = \xi$, $OB = b$ sei. Dann liegen an der Stelle $x = \xi$ die verschiedenen Grenzwerte $F(\xi - 0) = KL$ und $F(\xi + 0) = KM$ vor; ist $F'(x) = f(x)$, so findet man

$$F(\xi - 0) - F(a) = \int_a^\xi f(x)\,dx, \qquad \int_\xi^b f(x)\,dx = F(b) - F(\xi - 0),$$

zusammenfassend also, gleichviel ob $f(x)$ an der Stelle ξ stetig oder unstetig ist,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + F(x)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0},$$

womit sich eine gewisse Abänderung des Übergangs vom unbestimmten zum bestimmten Integral zeigt, falls ersteres unstetig angesetzt ist. Sind mehrere Unstetigkeitsstellen auf der Strecke $a \dots b$ vorhanden, so hat man rechts in der letzten Gleichung mehrere Summanden von der Form des letzten anzusetzen.

§ 92. Mittelwertsätze, Teilintegration, Wechsel der Unabhängigen.

I. Nehmen wir wie in § 90 an

$$a = x_0, \quad b = x_n, \quad x_\nu < x_{\nu+1}$$

und bezeichnen durch lim den Grenzwert irgend einer Größe, wenn die größte der Differenzen $x_{\nu+1} - x_\nu$ unendlich abnimmt, so gilt nach § 90 die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_\nu^{0,\,n-1} (x_{\nu-1} - x_\nu) f(x_\nu);$$

aus ihr folgt sofort, wenn $f(x) \geqq 0$ auf der Strecke $a \dots b$, die Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0. \tag{1}$$

Ist ferner auf der Integrationsstrecke

$$A \geqq f(x) \geqq B, \quad |f(x)| \leqq C,$$

so ergibt sich, da $A - f(x)$ und $f(x) - B$ nicht negativ sind,

$$\int_a^b [A - f(x)]\,dx \geqq 0, \quad \int_a^b [B - f(x)]\,dx \geqq 0;$$

hieraus folgt nach § 91, I.

$$A(b-a) \geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq B(b-a),$$

und wenn man A und B durch C und $-C$ ersetzt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq C(b-a).$$

Diese Ergebnisse wollen wir verschärfen. In der Gleichung (1) sei $f(x)$ an mindestens einer Stelle der Strecke $a \dots b$ positiv; dann gilt dasselbe wegen der Stetigkeit für eine Teilstrecke $\alpha \dots \beta$; ist

diese hinreichend klein, so liegt in ihr $f(x)$ über einer positiven Schranke, z. B. über $\frac{1}{2}f(\alpha)$, und man hat nach (1) die Beziehung

$$(2)\quad \int_\alpha^\beta [f(x) - \tfrac{1}{2}f(\alpha)\,dx \geqq 0, \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqq \tfrac{1}{2}f(\alpha)(\beta-\alpha) > 0.$$

Jetzt ist nach § 91, II.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx,$$

und nach (1) ist

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx \geqq 0, \qquad \int_\beta^b f(x)\,dx \geqq 0;$$

die Beziehung (2) ergibt somit

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Wenn also der Integrand auf der Integrationsstrecke nicht negativ ist, ohne jedoch überall zu verschwinden, ist das bestimmte Integral positiv; entsprechendes gilt natürlich, wenn die Worte negativ und positiv vertauscht werden.

II. Jetzt sei M eine solche Größe, daß

$$\int_a^b f(x)\,dx = M(b-a) = M\int_a^b dx;$$

dann kann man schreiben

$$\int^b [f(x) - M]\,dx = 0.$$

Diese Gleichung wäre nach I. unmöglich, wenn $f(x) - M$ auf der Strecke $a \ldots b$ nicht das Vorzeichen wechselte, d. h. wenn sie durchweg nicht negativ oder durchweg nicht positiv wäre, ohne überall zu verschwinden. Die Gleichung ist also nur möglich, wenn $f(x) - M$ das Vorzeichen wechselt, oder wenn durchweg $f(x) = M$ ist. In ersterem Falle muß es im Innern der Integrationsstrecke einen Wert ξ geben, für den $f(\xi) - M = 0$ ist; im zweiten Falle könnte sogar für ξ jeder Wert der Strecke $a \ldots b$ genommen werden. Man findet also

$$M = f(\xi), \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),$$

wobei $a < \xi < b$.

Sei ferner auf der Integrationsstrecke $\varphi(x) \geqq 0$, $\varphi(x)$ eine stetige nicht durchweg verschwindende Funktion, $f(x)$ wie bisher beliebig stetig. Dann ist nach I.

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0;$$

sei demgemäß gesetzt

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = N\int_a^b \varphi(x)\,dx;$$

dann ist

$$\int^b [f(x) - N]\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Wechselt nun $f(x) - N$ das Vorzeichen nicht, so gilt dasselbe von dem Produkt $[f(x) - N]\,\varphi(x)$, und die letzte Gleichung ist nach I. unmöglich, es sei denn, daß der Integrand auf der Strecke $a \ldots b$ durchweg verschwände, was überall, wo $\varphi(x)$ von Null verschieden ist, die Gleichung $f(x) = N$ ergäbe. Von diesem Falle abgesehen, muß also $f(x) - N$ das Vorzeichen wechseln und es gibt wiederum wegen der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ zwischen a und b einen Wert ξ, für den $f(\xi) = N$ ist. Die letzte Gleichung gibt also immer

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad a < \xi < b.$$

Diese Gleichung nennt man den **ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung.**

Indem man beide Seiten der erhaltenen Gleichung negativ nimmt und die Grenzen vertauscht, sieht man sofort, daß man etwas allgemeiner setzen kann

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad \xi = a + \theta\,(b - a), \quad 0 < \theta < 1,$$

und dabei nur vorauszusetzen braucht, $\varphi(x)$ wechsle das Vorzeichen auf der Strecke $a \ldots b$ nicht.

III. Halten wir diese Voraussetzung zunächst fest und setzen

$$\psi(x) = \alpha + \int_a^x \varphi(x)\,dx, \quad f(x_\nu) = u_\nu, \quad \psi(x_\nu) = v_\nu,$$

$$x_\nu < \xi_\nu < x_{\nu+1}, \quad v_0 = \alpha, \quad v_n = \psi(b) = \beta,$$

so kann man schreiben

$$(3)\quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_\nu^{0,\,n-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_\nu^{0,\,n-1} f(\xi_\nu)\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi(x)\,dx$$

$$= \sum_\nu^{0,\,n-1} f(\xi_\nu)\,(v_{\nu+1} - v_\nu) = \sum_\nu^{0,\,n-1} u_\nu\,(v_{\nu+1} - v_\nu) + \varrho,$$

und bei dem in Absatz I bezeichneten Grenzübergang, der alle Strecken $x_{\nu+1} - x_\nu$ der Null beliebig annähert, ist $\lim \varrho = 0$; denn offenbar ist

$$(4)\qquad \varrho = \sum [f(\xi_\nu) - f(x_\nu)]\,(v_{\nu+1} - v_\nu)$$

und hier werden wegen der Stetigkeit der Funktion $f(x)$, wenn ε beliebig klein positiv gegeben ist, die Ungleichungen

$$(5)\qquad |f(\xi_\nu) - f(x_\nu)| < \varepsilon$$

durch Verkleinerung der Strecken $x_{\nu+1} - x_\nu$ erreicht. Die Größen $v_{\nu+1} - v_\nu$ sind aber nach I. alle positiv oder alle negativ; somit folgt jetzt

$$< \varepsilon \left|\sum (v_{\nu+1} - v_\nu)\right| \qquad < \varepsilon \int^b \varphi(x)\,dx,$$

also ist wirklich $\lim \varrho = 0$.

Die Funktion $v = \psi(x)$ ist nun auf der Integrationsstrecke einsinnig, man kann also $x = \lambda(v)$ setzen, wobei auch λ stetig und einsinnig ist, und findet so

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\psi'(x)\,dx = \lim \sum_\nu^{0,\,n-1} f[\lambda(v_\nu)]\,(v_{\nu+1} - v_\nu).$$

Hier erscheint aber rechts die Annäherungssumme des bestimmten Integrals

$$\int_a f[\lambda(v)]\,dv,$$

in dem

$$v_n = \int^b \varphi(x)\,dx = \psi(b)$$

gesetzt ist.

Somit gilt die Substitutionsformel

$$\int^b f(x)\,\psi'(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\lambda(v)]\,dv = \int^\beta f[\lambda(v)]\,dv,$$

in der $v = \psi(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ als einsinnige Funktion vorausgesetzt wird, deren Umkehrung $x = \lambda(v)$ ist, so daß noch die Gleichungen

$$\alpha = \psi(a), \quad \beta = \psi(b), \quad a = \lambda(\alpha), \quad b = \lambda(\beta)$$

gelten. Die Formel stimmt natürlich mit der in § 79 angeführten, in § 65, III. vorbereiteten überein, ergibt sich aber hier aus dem Begriff des bestimmten Integrals.

IV. Die Formel (3) gilt auch, wenn über das Vorzeichen der Größe $\varphi(x)$ nichts vorausgesetzt wird. Denn setzt man in ihr $\varphi(x) = 1$ und ersetzt $f(x)$ durch $f(x)\varphi(x)$, so erscheint das Integral (3) bei passender Wahl der Größen ξ_ν als die Summe $T_0 + T_1 + \cdots + T_{n-1}$, in der

$$T_\nu = f(\xi_\nu)\,\varphi(\xi_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu) = f(\xi_\nu)\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi(x)\,dx + f(\xi_\nu)\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} R_\nu\,dx$$

und $R_\nu = \varphi(\xi_\nu) - \varphi(x)$ gesetzt wird. Letztere Größen liegen aber wegen der Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$ absolut unter einer vorgeschriebenen Größe ε, wenn die Differenzen $x_{\nu+1} - x_\nu$ hinreichend klein geworden sind; die Summe der letzten Glieder in T_ν ist dann absolut kleiner als $C\varepsilon(b-a)$, wobei $C > |f(x)|$ auf der Strecke $a \ldots b$ sei. Um einen solchen Ausdruck vermehrt sich die obige Größe ϱ; die Gleichung $\lim \varrho = 0$ bleibt also auch jetzt erhalten, wenn man den ersten und letzten der Ausdrücke (3) gleichsetzt.

Nun ist offenbar

$$u_\nu(v_{\nu+1} - v_\nu) = u_{\nu+1}v_{\nu+1} - u_\nu v_\nu - v_{\nu+1}(u_{\nu+1} - u_\nu),$$

also

$$\sum_\nu^{0,n-1} u_\nu(v_{\nu+1} - v_\nu) = u_n v_n - u_0 v_0 - \sum_\nu^{0,n-1} v_{\nu+1}(u_{\nu+1} - u_\nu).$$

Führen wir also die Annahme ein, $f(x)$ habe auf der Strecke $a \ldots b$ eine stetige Ableitung, so daß nach I.

$$u_{\nu+1} - u_\nu = \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f'(x)\,dx = f'(\eta_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu)$$

gesetzt werden kann, und $x_\nu < \eta_\nu < x_{\nu+1}$ ist, so folgt

$$(6) \quad \sum_\nu^{0,n-1} u_\nu(v_{\nu+1} - v_\nu) = f(b)\,\psi(b) - f(a)\,\psi(a) - \sum_\nu^{0,n-1} \psi(x_{\nu+1}) f'(x_{\nu+1})(x_{\nu+1} - x_\nu) + \varrho_1,$$

$$\varrho_1 = \sum^{0,n-1} \psi(x_{\nu+1})\,[f'(x_{\nu+1}) - f'(\eta_\nu)]\,(x_{\nu+1} - x_\nu),$$

und da $f'(x)$ stetig sein soll, folgt, sobald die Ungleichungen

$$|f'(x_{\nu+1}) - f'(\eta_\nu)| < \varepsilon$$

erzielt sind, bei der Annahme $|\psi(x)| < A$ die Beziehung

$$|\varrho_1| < A\,\varepsilon \sum_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu) = A\,\varepsilon\,(b-a),$$

also $\lim \varrho_1 = 0$.

Die Summe auf der rechten Seite der Gleichung (6) ist nun eine Annäherungssumme eines bestimmten Integrals:

$$\int_a^b \psi(x) f'(x)\,dx = \lim \sum_\nu^{0,\,n-1} \psi(x_{\nu+1}) f'(x_{\nu+1})(x_{\nu+1} - x_\nu);$$

da nun auch jetzt noch nach (3) die Gleichung

$$(7)\qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\psi'(x)\,dx = \lim \sum_\nu^{0,\,n-1} u_\nu (v_{\nu+1} - v_\nu)$$

gilt, so folgt die Teilintegrationsformel

$$\int_a^b f(x)\,\psi'(x)\,dx = f(x)\,\psi(x)\Big|_a^b - \int_a^b \psi(x) f'(x)\,dx,$$

in der die Größen f, ψ, f', ψ' nur auf der Strecke $a \ldots b$ stetig vorausgesetzt werden.

V. Die Formel (3) oder (7), in der $\varphi(x)$ beliebig, nur stetig sei, kann nun noch in folgender Weise umgestaltet werden. Offenbar ist

$$\sum_\nu^{0,\,n-1} u_\nu (v_{\nu+1} - v_\nu) = \sum_\nu^{0,\,n-1} u_\nu v_{\nu+1} - \sum_\nu^{0,\,n-1} u_\nu v_\nu = \sum_\nu^{0,\,n-1} u_\nu v_{\nu+1}$$
$$- \sum_\nu^{0,\,n-1} u_{\nu+1} v_{\nu+1} + u_n v_n - u_0 v_0$$
$$(8)\qquad = - \sum_\nu^{0,\,n-1} v_{\nu+1}(u_{\nu+1} - u_\nu) + f(b) \int_a^b \varphi(x)\,dx;$$

dabei ist $\alpha = 0$ gesetzt, so daß v_0 verschwindet. Jetzt sei $f(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ einsinnig, so daß man $y = f(x)$ auf der Strecke von $\alpha_1 = f(a)$ bis $\beta_1 = f(b)$ als Unabhängige einführen und

$$\psi(x) = \Psi(y)$$

setzen darf, wobei $\Psi(y)$ eine auf der Strecke $\alpha_1 \ldots \beta_1$ stetige Funktion ist. Dann ist $v_\nu = \Psi[f(x_\nu)] = \psi(x_\nu)$, $u_0 = \alpha_1$, $u_n = \beta_1$, und die Substitutionsformel gibt nach III.

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \Psi(y)\,dy = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \psi(x)\,dy = \lim \sum_\nu^{0,\,n-1} (u_{\nu+1} - u_\nu)\,v_{\nu+1}.$$

Die Gleichungen (7) und (8) ergeben daher

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \Psi(y)\,dy + f(b)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

und wenn auf das erste Glied rechts der erste Mittelwertsatz angewandt wird, folgt

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = -\Psi(\eta)(\beta_1-\alpha_1) + f(b)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Dabei ist $\Psi(\eta)$ ein Wert, den die Größe $\Psi(y) = \psi(x)$ einmal annimmt, wenn y die Strecke $\alpha_1 \ldots \beta_1$, also x die Strecke $a \ldots b$ durchläuft, und zwar im Innern dieser Strecken. Man kann also setzen

$$\Psi(\eta) = \int_a^\xi \varphi(x)\,dx, \quad a < \xi < b,$$

und findet so, indem man die Rechenregel § 91, II. benutzt,

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = [f(a)-f(b)]\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$
$$= f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

Das ist der **zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung**; er gilt, wenn $f(x)$ auf der Integrationsstrecke einsinnig ist.

VI. Wir wenden den ersten Mittelwertsatz an, um eine auf der Strecke $a \ldots b$ gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

zu integrieren; sei $a < b$. Nach § 41 ist $F(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ stetig, ebenso die Reihe R_n, die aus $F(x)$ entsteht, wenn die ersten n Glieder weggelassen werden. Man kann also, wenn x dieser Strecke angehört, bilden

$$\int_a^x F(x)\,dx = \sum_\nu^{1,n} \int_a^x f_\nu(x)\,dx + \int_a^x R_n\,dx. \tag{9}$$

Nun ist, da die Reihe $F(x)$ gleichmäßig konvergiert,

$$\left|\sum_\nu^{n+1,n+k} f_\nu(x)\right| < \varepsilon, \tag{10}$$

wenn ε beliebig klein gegeben und erstens n, unabhängig von x, hinreichend groß gewählt, zweitens unter k eine beliebige ganze Zahl verstanden wird. Hieraus folgt nach dem ersten Mittelwertsatz

$$\left|\sum_{\nu}^{n+1, n+k} \int_a^x f_\nu(x)\, dx\right| < \varepsilon(b-a);$$

die Reihe

$$\int_a^x f_1(x)\, dx + \int_a^x f_2(x)\, dx + \cdots$$

konvergiert also auf der Strecke $a \ldots b$ gleichmäßig.

Aus der Beziehung (10) ergeben sich ferner, indem man k unendlich wachsen läßt, nach dem Schrankensatze für die konvergente Reihe R_n die Ungleichungen

$$|R_n| \leqq \varepsilon, \qquad \left|\int_a^x R_n\, dx\right| < \varepsilon(b-a);$$

danach bedeutet die Gleichung (9) nichts anderes als

$$\int_a^x F(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu}^{1, n} \int_a^x f_\nu(x)\, dx = \int_a^x f_1(x)\, dx + \int_a^x f_2(x)\, dx + \cdots,$$

d. h. eine gleichmäßig konvergente Reihe darf gliedweise integriert werden und ergibt dann wieder eine Reihe, die auf derselben Strecke gleichmäßig konvergiert.

Damit sind die Ergebnisse des § 41 in gewissem Sinne ergänzt; hinsichtlich der §§ 66 und 73 ist gezeigt, weshalb man mit dem dortigen Verfahren zum Ziel kommen mußte.

VII. Eine letzte Anwendung des ersten Mittelwertsatzes führt auf die wichtige Schwarzsche Ungleichung. Seien $f(x)$ und $F(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ stetig, und seien p, q beliebige reelle Zahlen, die nicht beide verschwinden. Dann gilt nach I. die Ungleichung

$$\int_a^b [p f(x) + q F(x)]^2\, dx \geqq 0 \tag{11}$$

und das Gleichheitszeichen kann nur dann für ein bestimmtes Wertepaar p, q erreicht werden, wenn auf der ganzen Strecke $a \ldots b$ die Gleichung

$$p f(x) + q F(x) = 0 \tag{12}$$

besteht. Setzt man nun

$$A = \int_a^b f(x)^2\, dx, \quad B = \int_a^b f(x) F(x)\, dx, \quad C = \int_a^b F(x)^2\, dx,$$

so sind A und C positive Größen, da sonst eine der Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ auf der Strecke $a \dots b$ überall verschwände, was wir natürlich ausschließen; die Beziehung (11) wird

$$Ap^2 + 2\,Bpq + Cq^2 \geqq 0;$$

die quadratische Gleichung $Ax^2 + 2\,Bx + C = 0$ kann also nicht zwei verschiedene reelle Wurzeln besitzen, da ihre linke Seite in diesem Falle sowohl positiv wie negativ werden könnte. Die Gleichung hat also entweder eine reelle Doppelwurzel und dann ist $AC - B^2 = 0$, oder imaginäre Wurzeln, und das gibt $AC - B^2 > 0$. Im ersteren Falle kommt in der Gleichung (11) einmal das Gleichheitszeichen vor; also folgt die Gleichung (12) bei passender Wahl von p und q. Hiermit ist die Schwarzsche Ungleichung

$$AC - B^2 \geqq 0, \qquad \int_a^b f(x)^2\,dx \int_a^b F(x)^2\,dx \geqq \Big[\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx\Big]^2$$

bewiesen, und das Gleichheitszeichen tritt nur auf, wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ auf der ganzen Integrationsstrecke in festem Verhältnis zueinander stehen.

§ 93. Uneigentliche bestimmte Integrale.

Ist die Funktion $f(x)$ nicht auf der ganzen Strecke $a \dots b$, aber auf jeder Strecke $a \dots b - \varepsilon$ stetig, wobei ε eine beliebig kleine positive Größe sei, so definieren wir ein uneigentliches bestimmtes Integral durch die Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon = +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

vorausgesetzt, daß der Grenzwert existiert. Insbesondere setzen wir, wenn $f(x)$ auf der Strecke $a \cdots + \infty$ stetig ist,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b = +\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

wieder unter der Voraussetzung, daß der Grenzwert existiert; andernfalls hat das links stehende Zeichen keinen Sinn. Auch bei diesen uneigentlichen bestimmten Integralen bleiben die Sätze § 91, II, V gültig, die Sätze § 91, III und IV, soweit es sich nicht um Differentiation nach der oberen singulären Grenze handelt.

Als Beispiele führen wir an

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x=1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \lim_{b=\infty} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2a}.$$

I. Zur Anwendung des ersten Mittelwertsatzes führt die Frage nach der Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_a^b (b-x)^\alpha f(x)\,dx,$$

in dem $f(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ stetig sei und α negativ. Der Mittelwertsatz gibt, wenn $a < b_n < b$, $m < n$ und $\lim b_n = b$ gesetzt wird,

$$\int_{b_m}^{b_n} (b-x)^\alpha f(x)\,dx = f(\xi) \int_{b_m}^{b_n} (b-x)^\alpha\,dx, \quad b_m < \xi < b_n,$$

$$\int_{b_m}^{b_n} (b-x)^\alpha f(x)\,dx = f(\xi)\,\frac{(b-b_n)^{\alpha+1}-(b-b_m)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

und diese Größe ist, wenn $\alpha + 1 > 0$, beliebig klein, sobald m hinreichend groß, n dann beliebig genommen wird. Die Reihe

$$S = \int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \cdots,$$

in der der Integrand immer $(b-x)^\alpha f(x)$ ist, konvergiert also; die Summe ihrer Glieder vom $(m+1)^{\text{ten}}$ bis zum $(m+n)^{\text{ten}}$ ist offenbar

$$\int_{b_m}^{b_{m+1}} + \int_{b_{m+1}}^{b_{m+2}} + \cdots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} = \int_{b_m}^{b_n},$$

und die behauptete Konvergenz folgt aus dem allgemeineren Kernsatze der Analysis (Einl. II, 5.). Die Reihe S ist aber offenbar auch

$$S = \lim_{n=\infty} \int_a^{b_n} = \int_a^b (b-x)^\alpha f(x)\,dx.$$

Dieses Integral existiert also, wenn $f(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ stetig ist und $\alpha > -1$; ebenso natürlich das Integral

$$\int_a^b (x-a)^\alpha f(x)\,dx.$$

II. Wir fragen ferner nach der Existenz des Integrals

$$J = \int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx,$$

in dem $f(x)$ auf der unendlichen Strecke $a \cdots +\infty$ stetig und beschränkt sei. Man findet, wenn $b > a$,

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx = \frac{f(\xi)}{\alpha-1}\left\{\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{b^{\alpha-1}}\right\}, \quad a < \xi < b,$$

und wenn $\lim b_n = +\infty$, allgemein

$$\int_{b_m}^{b_n} \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx = \frac{f(\xi')}{\alpha-1}\left(\frac{1}{b_m^{\alpha-1}} - \frac{1}{b_n^{\alpha-1}}\right);$$

hieraus folgt wie oben die Existenz des Integrals J, sobald $\alpha > 1$.

III. Die Funktion $f(x)$ heißt ins positiv Unendliche hinein integrierbar, wenn

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

existiert, sobald a eine gewisse Schranke überschritten hat; absolut integrierbar, wenn dasselbe für das Integral

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

gilt. Das Integral

$$\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$$

existiert schon, wenn $\alpha > 0$ und $f(x)$ auf der Strecke $a \cdots +\infty$ beschränkt ist, wie eine Mittelwertbetrachtung nach Art der unter II. gegebenen zeigt. Weiter hat man nach dem zweiten Mittelwertsatze, wenn $g > a$,

$$\int^g e^{-\alpha x} f(x)\,dx = e^{-\alpha a}\int^\xi f(x)\,dx + e^{-\alpha g}\int_\xi^g f(x)\,dx;$$

wenn also $f(x)$ absolut integrierbar ist, folgt hieraus, daß

$$e^{\alpha a}\int_a^g e^{-\alpha x} f(x)\,dx$$

bei hinreichend großem a für alle g so klein ist, wie man will; also auch

$$\lim_{a=+\infty} e^{\alpha a}\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx = 0,$$

wovon Gebrauch gemacht werden kann.

IV. Zu einer Anwendung der uneigentlichen Integrale führt die Frage, wie in das bestimmte Integral

$$J = \int_a^b f[\varphi(x)]\,dx$$

die Unabhängige $y = \varphi(x)$ eingeführt werden kann, wenn $\varphi(x)$ nicht einsinnig ist, sondern z. B. von a bis c wächst, von c bis b abnimmt; auf ersterer sei $x = \psi_1(y)$, auf der zweiten $x = \psi_2(y)$. Ist $\varphi'(x)$ auf der Strecke $a \ldots b$ stetig, so wird, der gewöhnlichen Extremumsbedingung gemäß, $\varphi'(c) = 0$, $\varphi''(c) \neq 0$ vorausgesetzt werden dürfen. Wenn dann $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$, $\varphi(c) = \gamma$ gesetzt wird, so ist

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)}, \quad \psi'(\gamma) = \infty.$$

Die Integrale

$$\int_\alpha^\gamma f(y)\,\psi_1'(y)\,dy, \quad \int_\gamma^\beta f(y)\,\psi_2'(y)\,dy$$

sind also uneigentliche, die aber endliche Werte haben, da, wenn ε positiv und beliebig klein, $\varphi(c-\varepsilon) = \gamma - \varepsilon_1$, $\varphi(c+\varepsilon) = \gamma + \varepsilon_2$ angenommen wird, die Gleichungen

$$\int_a^{c-\varepsilon} f[\varphi(x)]\,dx = \int_\alpha^{\gamma-\varepsilon_1} f(y)\,\psi'(y)\,dy, \quad \int_{c+\varepsilon}^b f[\varphi(x)]\,dx = \int_{\gamma+\varepsilon_2}^\beta f(y)\,\psi_2'(y)\,dy$$

gelten, deren linke Seiten, wenn ε unendlich abnimmt, endlichen Grenzen zustreben.

Hieraus folgt die Gleichung

$$J = \int_a^b f[\varphi(x)]\,dx = \int_\alpha^\gamma f(y)\,\psi_1'(y)\,dy + \int_\gamma^\beta f(y)\,\psi_2'(y)\,dy$$

in der gewünschten Form.

Sei z. B.

$$y = \varphi(x) = x^2 - 2cx, \quad a < c < b,$$

$$J = \int_a^c f(x^2 - 2cx)\,dx + \int_c^b f(x^2 - 2cx)\,dx,$$

dann ist im ersten Integral

$$x = \psi_1(y) = c - \sqrt{c^2 + y}, \quad dx = \psi_1'(y)\,dy = \frac{-\,dy}{2\sqrt{c^2 + y}}$$

zu setzen, im zweiten

$$x = \psi_2(y) = c + \sqrt{c^2 + y}, \quad dx = \psi_2'(y)\,dy = \frac{+\,dy}{2\sqrt{c^2 + y}};$$

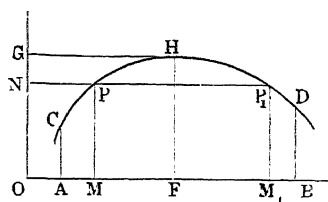
ferner ist

$$\alpha = a^2 - 2ac, \quad \gamma = -c^2, \quad \beta = b^2 - 2bc;$$

man erhält so

$$J = \int_\alpha^{-c^2} \frac{-f(y)\,dy}{2\sqrt{c^2 + y}} + \int_{-c^2}^{\beta} \frac{f(y)\,dy}{2\sqrt{c^2 + y}}.$$

Fig. 76.

Beide Integrale sind uneigentlich an der Grenze $y = -c^2$, haben aber endliche Werte nach I., da die Integranden die Faktoren $(c^2 + y)^{-\frac{1}{2}}$ enthalten. — Der Sachverhalt wird durch Fig. 76 dargestellt, in der $OA = a$, $OF = c$, $OB = b$, $ON = y$, $NP = \psi_1(y)$, $NP_1 = \psi_2(y)$ zu setzen ist.

§ 94. Weitere Beispiele und Anwendungen.

Aus der Reduktionsformel (1) in § 72 ergibt sich für $a = 1$, $b = -1$, $n = 1$

$$\int x^{m-1}(1-x)^s\,dx = -\frac{x^{m-1}(1-x)^{s+1}}{s+m} + \frac{m-1}{s+m}\int x^{m-2}(1-x)^s\,dx;$$

führt man die Grenzen $x = 1$, $x = 0$ ein und setzt voraus, daß $m - 1$ und $s + 1$ positiv sind, so erhält man einfacher

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^s\,dx = \frac{m-1}{s+m}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^s\,dx;$$

die Integrale existieren nach § 93, I. Bei ganzen positiven m läßt sich diese Formel $(m-1)$mal nacheinander anwenden; dies gibt

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^s\,dx = \frac{m-1}{s+m}\cdot\frac{m-2}{s+m-1}\cdots\frac{2}{s+3}\cdot\frac{1}{s+2}\int_0^1 (1-x)^s\,dx.$$

Der Wert des noch übrigen Integrals ist, unbestimmt genommen,

$$= -\frac{1}{s+1}(1-x)^{s+1} + \text{const.};$$

daraus folgt, weil $s+1$ als positiv vorausgesetzt wurde,

$$\int_0^1 (1-x)^s\,dx = \frac{1}{s+1}.$$

Substituiert man dies und nimmt $s+1=a$, so gelangt man zu dem Ergebnis

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{a-1}\,dx = \frac{1.2.3\ldots(m-1)}{a(a+1)\ldots(a+m-1)}, \qquad a > 0.$$

Aus der vorhin benutzten Reduktionsformel erhält man ferner für $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $s=-\frac{1}{2}$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{m-3}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Schreibt man m für $m-1$ und führt die Grenzen $x=1$ und $x=0$ ein, so wird einfacher

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m}\int_0^1 \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

vorausgesetzt, daß das Integral rechts endlich ist. Durch mehrmalige Anwendung dieser Formel kommt man, je nachdem m gerade oder ungerade ist, auf eines der beiden endlichen Integrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1,$$

und damit gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m}\,\frac{\pi}{2} \quad (m \text{ gerade}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots m} \quad (m \text{ ungerade}).$$

Wir machen ferner Gebrauch von der Reduktionsformel

$$\int x^m e^{-ax}\,dx = -\frac{x^m e^{-ax}}{a} + \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{-ax}\,dx$$

und führen die Grenzen $x = \infty$ und $x = 0$ ein. Unter der Voraussetzung, daß m und a positive Größen sind, verschwindet das Produkt $x^m e^{-ax}$ nach Einl. V, 4. für $x = \infty$ wie für $x = 0$, und daher wird

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m}{a}\int_0^\infty x^{m-1} e^{-ax}\,dx,$$

wenn das Integral rechts einen endlichen Wert hat. Bei ganzen positiven m führt die wiederholte Anwendung dieser Formel auf das endliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx \doteq \lim_{x=\infty}\frac{1-e^{-ax}}{a}\ \frac{1}{a}, \qquad a > 0$$

und daher wird

$$(1) \qquad \int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{1.2.3\ldots m}{a^{m+1}}, \qquad a > 0.$$

Die Fundamentalformel (20) in § 64 liefert durch Einführung der Grenzen $u = \frac{1}{2}\pi$ und $u = 0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\alpha^2\cos^2 u + \beta^2\sin^2 u} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}.$$

Endlich benutzen wir noch die beiden Formeln § 77, (9), (10)

$$\int e^{-au}\cos\beta u\,du = -\frac{\alpha\cos\beta u - \beta\sin\beta u}{\alpha^2+\beta^2}e^{-au} + C,$$

$$\int e^{-au}\sin\beta u\,du = -\frac{\alpha\sin\beta u + \beta\cos\beta u}{\alpha^2+\beta^2}e^{-au} + C,$$

und nehmen erst $u = \infty$, dann $u = 0$. Unter der Voraussetzung, daß α eine positive Größe ist, verschwinden die Produkte $e^{-au}\cos\beta u$ und $e^{-au}\sin\beta u$ für $u = \infty$, und es bleibt

$$\int_0^\infty e^{-au}\cos\beta u\,du = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad \alpha > 0,$$

$$\int_0^\infty e^{-au}\sin\beta u\,du = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad \alpha > 0.$$

Setzt man ferner in dem Integral

$$\int_0^1 \left[\lg\left(\frac{1}{z}\right)\right]^m z^{a-1}\,dz$$

$-\lg z = x$, mithin $z = e^{-x}$, $dz = -e^{-x}\,dx$, so geht dasselbe über in

$$-\int_\infty^0 x^m e^{-ax}\,dx = +\int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx;$$

den Wert des letzteren Integrals kennt man aus der Gleichung (1) für den Fall, daß m eine ganze positive Zahl und $a > 0$ ist, daher

$$\int_0^1 \left[\lg\left(\frac{1}{z}\right)\right]^m z^{a-1}\,dz = \frac{1.2\ldots m}{a^{m+1}}, \quad a > 0.$$

§ 95. Die Ableitungen bestimmter Integrale nach Parametern.

Das Integral

$$\int_a^b f(x, r)\,dx = \Phi(a, b, r),$$

dessen Integrand einen veränderlichen Parameter r enthält, ist Funktion von a, b und r; die Teilableitungen nach den ersten beiden Größen sind nach der Theorie des bestimmten Integrals (§ 91)

$$(1) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = f(b, r), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = -f(a, r).$$

Um die Ableitung nach r zu finden, nehmen wir an, die Teilableitung $f'_r(x, r)$ sei stetig in einem Gebiet der Unabhängigen x und r, in welchem x die Strecke $a_0 \ldots a_1$, in der $a_0 < a < b < a_1$ sei, und r eine gewisse Strecke $r_0 \ldots r_1$ durchläuft, der der betrachtete Wert dieser Größe angehört. Wenn dann h' unter einer passend gewählten Schranke δ liegt, gilt die Ungleichung

$$(2) \qquad |f'_r(x, r + h') - f'_r(x, r)| < \varepsilon,$$

in der ε beliebig klein und positiv gegeben sein kann; δ ist von x unabhängig, da wir die Stetigkeit in dem betrachteten x, r-Gebiet nach § 7, I. verstehen, und in der erhaltenen Ungleichung kann h' von x abhängen.

Jetzt finden wir nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung

$$(3)\quad \frac{\Phi(a, b, r+h) - \Phi(a, b, r)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, r+h) - f(x, r)}{h} dx$$

$$= \int_a^b f_r'(x, r+\theta h)\, dx = \int_a^b f_r'(x, r)\, dx + \int_a^b M\, dx,$$

wobei $0 < \theta < 1$ und

$$M = f_r'(x, r+\theta h) - f'(x, r)$$

eine Größe ist, die, sobald $|h| < \delta$, nach (2) absolut unter ε liegt, so daß dann

$$\left|\int_a^b M\, dx\right| < \varepsilon(b-a).$$

Nimmt man also δ hinreichend klein, so ergibt die Gleichung (3)

$$\lim_{h=0} \frac{\Phi(a, b, r+h) - \Phi(a, b, r)}{h} = \int_a^b f_r'(x, r)\, dx.$$

Diese Größe ist aber die Ableitung $\partial\Phi/\partial r$, deren Existenz hiermit nachgewiesen ist; man erhält

$$(4)\quad \frac{\partial}{\partial r}\int_a^b f(x, r)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} dx,$$

d. h. die Operation des Differenzierens nach einem Parameter ist unter den geltenden Voraussetzungen mit der bestimmten Integration vertauschbar.

Die Voraussetzungen können noch erweitert werden. Wenn z. B. $\varphi(x)$ im Innern der Strecke $a \ldots b$ stetig und positiv, an einem Ende, z. B. für $x = a$, aber so unstetig wird, daß das uneigentliche Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx$$

endlich ist, kann man die obige Regel auf das Integral

$$\int_a^b \varphi(x) f(x, r)\, dx$$

anwenden; man findet z. B., wenn $0 < \alpha < 1$ ist,

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_a^b \frac{f(x,r)\,dx}{(x-a)^\alpha} = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dx,$$

da die Umformung (3) mit leichter Abänderung gültig bleibt.

Wir betrachten nun den allgemeinsten Fall, wenn nämlich r in $f(x)$ und zugleich in a und b vorkommt; der Wert des Integrals Φ ist dann eine mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktion dreier Unabhängiger a, b, r, deren erste beide wiederum von der letzten abhängen; es gilt hier die bekannte Regel der Differentialrechnung

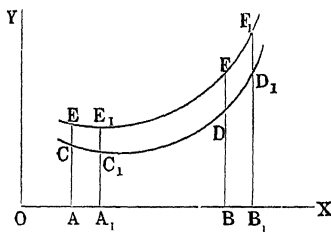
$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\partial \Phi}{\partial a}\cdot\frac{da}{dr} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\cdot\frac{db}{dr} + \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

und sie gibt in unserem Falle nach (1) und (4)

$$\frac{d\Phi}{dr} = -f(a,r)\,\frac{da}{dr} + f(b,r)\,\frac{db}{dr} + \int_a^b \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dx,$$

oder, wenn man einen in Beziehung auf r genommenen Differentialquotienten kurz mit D_r bezeichnet,

$$(5)\quad D_r\int^b f(x,r)\,dx = \int^b [D_r f(x,r)]\,dx + f(b,r)\,.\,D_r b - f(a,r)\,.\,D_r a.$$

Fig. 77.

Dieses Resultat wird anschaulich, wenn man sich $y = f(x,r)$ als Gleichung einer Kurve und das bestimmte Integral wiederum als die über der Strecke $b - a = AB$, Fig. 77, der Abszissenachse stehende Fläche $ABDC$ denkt. Ändert sich nämlich r in $f(x,r)$ allein, so erhält man eine ähnliche Kurve von anderem Parameter, und die Fläche $ABDC$ nimmt um den Streifen $CDFE$ zu, welcher durch

$$\int_a^b [D_r f(x,r)\,.\,dr]\,dx$$

ausgedrückt wird. Durch die alleinige Änderung von b wächst die Fläche um $BB_1D_1D = f(b,r)\,.\,D_r b\,.\,dr$, und durch Änderung des a vermindert sie sich um $AA_1C_1C = f(a,r)\,.\,D_r a\,.\,dr$. Die gleichzeitige Änderung von r, b und a verwandelt die ursprüngliche Fläche

in $A_1 B_1 F_1 E_1$, und mit Weglassung der Vierecke $D D_1 F_1 F$, $C C_1 E_1 E$, welche unendlich kleine Größen zweiter Ordnung sind, hat man

$$A_1 B_1 F_1 E_1 - A B D C = C D F E + B B_1 D_1 D - A A_1 C_1 C;$$

aus diesem Differential der Fläche $A B D C$ ergibt sich derselbe Differentialquotient wie oben.

Sehr häufig benutzt man die Differentiation in Beziehung auf einen Parameter r oder die sogenannte Variation eines Parameters, um aus einem bekannten Integral mehrere neue Integrale herzuleiten.

Differenziert man z. B. die Gleichung

$$\int_0^1 e^{rx} dx = \frac{e^r - 1}{r}$$

in Beziehung auf r und beachtet, daß linker Hand

$$D_r (e^{rx}) = x e^{rx}$$

von $x = 0$ bis $x = 1$ endlich bleibt, so gelangt man (ohne Anwendung einer sonst notwendigen Reduktionsformel) zu der neuen Gleichung

$$\int_0^1 x e^{rx} dx = \frac{(r-1) e^r + 1}{r^2},$$

die nun wiederum nach r differenziert werden kann.

Ein anderes Beispiel ist folgendes. Setzt man in der Gleichung (§ 94)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega} = \frac{\pi}{2 \alpha \beta}$$

$\alpha^2 = r$ und differenziert die nunmehrige Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{r \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega} = \frac{\pi}{2 \beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

n mal in Beziehung auf r, was hier ohne weiteres erlaubt ist, so erhält man

$$(-1)^n n! \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2n} \omega \, d\omega}{(r \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^{n+1}}$$

$$= \frac{\pi}{2\beta} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n} \frac{1}{r^n \sqrt{r}},$$

und nach Wiedereinsetzung des Wertes von r

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2n}\omega\, d\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega)^{n+1}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n)}\,\frac{\pi}{2\,\alpha^{2n+1}\beta}.$$

Diese Gleichung könnte man wieder mehrmals in Beziehung auf β^2 differenzieren, was auf ein noch allgemeineres Ergebnis führt.

In manchen Fällen dient dasselbe Verfahren in umgekehrter Weise zur Wertbestimmung von Integralen. Ist nämlich W der unbekannte Wert eines Integrals, so kann es geschehen, daß dW/dr ein einfacheres Integral darstellt, dessen Wert V bekannt ist; man findet dann $W = \int V\,dr$. Ein Beispiel hierzu liefert die Annahme

$$W = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-rx}}{x}\,dx,\ r > 0. \tag{6}$$

Da hier die obere Integrationsgrenze unendlich ist, so muß der Ausdruck

$$\frac{\varDelta W}{\varDelta r} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-rx} - e^{-(r+\varDelta r)x}}{x}\,dx$$

unmittelbar untersucht werden. Wendet man auf den Integranden als Funktion von r den Taylorschen Satz an in der Form

$$f(r+\varDelta r) - f(r) = \varDelta r\,.\,f'(r) + \tfrac{1}{2}(\varDelta r)^2 f''(r+\varepsilon\varDelta r),\ 0 < \varepsilon < 1,$$

so ergibt sich

$$\frac{\varDelta W}{\varDelta r} = \int_0^{\infty} \{e^{-rx} - \tfrac{1}{2}x\,e^{-(r+\varepsilon\varDelta r)x}\varDelta r\}\,dx$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\varDelta r\int_0^{\infty} x\,e^{-(r+\varepsilon\varDelta r)x}\,dx.$$

Gibt man dem ε seinen kleinsten und größten Wert, so ist leicht zu sehen, daß der Wert des noch übrigen Integrals weniger beträgt als

$$\int_0^{\infty} x\,e^{-rx}\,dx = \frac{1}{r^2},$$

dagegen mehr als

$$\int_0^{\infty} x\,e^{-(r+\varDelta r)x}\,dx = \frac{1}{(r+\varDelta r)^2};$$

hieraus folgt

$$\lim\left\{\Delta r\int_0^\infty x\, e^{-(r+\varepsilon\Delta r)x}\, dx\right\} = 0,$$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{1}{r}.$$

Durch Integration erhält man

$$W = \lg r + \text{const.},$$

und hier bestimmt sich die Integrationskonstante aus der Bemerkung, daß nach (6) $W = 0$ werden muß für $r = 1$; es ist daher const. $= 0$, $W = \lg r$, d. h.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-rx}}{x}\, dx = \lg r,\ r > 0.$$

Nach demselben Verfahren erhält man

$$\int_0^\infty \frac{[(r-1)x - 1]\, e^{-x} + e^{-rx}}{x^2}\, dx = r(\lg r - 1) + 1,\ r > 0.$$

§ 96. Verwandlung von bestimmten Integralen in Reihen.

a) Das zu berechnende Integral sei das uneigentliche

$$U = \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\, dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1}\, dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{\mu-1}\, dx}{1+x};$$

es hat nach § 93, I. und II. einen endlichen Wert, sobald $0 < \mu < 1$; denn setzt man

$$\frac{x^{\mu-1}}{1+x} = x^{\mu-1} f_1(x) = \frac{1}{x^{2-\mu}}\, f_2(x) = \frac{1}{x^{2-\mu}}\, \frac{1}{1+\frac{1}{x}},$$

so ist $\mu - 1 > -1$, $2 - \mu > +1$, und f_1 ist an der Stelle 0, $f_2(x)$ bei großen Werten von x beschränkt.

Im ersten Integral schreiben wir y für x, wodurch sich dasselbe nicht ändert; im zweiten Integral benutzen wir den Ansatz

$$\frac{1}{x} = y,\quad x = \frac{1}{y},\quad dx = -\frac{dy}{y^2},$$

und erhalten statt jenes Integrals

$$-\int_1^0 \frac{dy}{y^\mu (y+1)} = +\int_0^1 \frac{y^{-\mu}\, dy}{1+y};$$

mit dem vorigen Integral zusammen gibt dies

$$U = \int_0^1 \frac{y^{\mu-1} + y^{-\mu}}{1+y}\, dy.$$

Hier läßt sich die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots + (-1)^{n-1} y^{n-1} + \frac{(-1)^n y^n}{1+y}$$

benutzen und die entstehenden Einzelintegrale haben endliche Werte, sobald die Größen

$$\begin{array}{llll} \mu, & \mu+1, & \mu+2, \cdots & \mu+n-1, \\ -\mu+1, & -\mu+2, & -\mu+3, \cdots & -\mu+n \end{array}$$

positiv sind, d. h. wenn μ, wie wir annehmen, zwischen 0 und 1 liegt. So ergibt sich

$$U = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{2+\mu} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-1+\mu}$$

$$+ \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{2-\mu} + \frac{1}{3-\mu} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\mu}$$

$$+ (-1)^n \int_0^1 \frac{y^{\mu-1} + y^{-\mu}}{1+y}\, y^n\, dy$$

oder auch durch Zusammenziehung von je zwei Brüchen

$$U = \frac{1}{\mu} + \frac{2\mu}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\mu}{2^2 - \mu^2} + \cdots + (-1)^n \frac{2\mu}{(n-1)^2 - \mu^2}$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\mu} + (-1)^n \int_0^1 \frac{y^\mu + y^{1-\mu}}{1+y}\, y^{n-1}\, dy.$$

Man bemerkt leicht, daß $y^\mu + y^{1-\mu}$ immer zwischen 0 und 2 enthalten ist und daß folglich der Wert des letzten Integrals mehr als Null beträgt, aber weniger als

$$2\int_0^1 \frac{y^{n-1}}{1+\mu}\, dy < 2\int_0^1 y^{n-1}\, dy = \frac{2y^n}{n}\Big|_0^1,$$

mithin weniger als $2/n$. Läßt man daher in der Gleichung

$$U - (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\mu} - (-1)^n \int_0^1 \frac{y^\mu + y^{1-\mu}}{1+y}\, y^{n-1}\, dy$$

$$= \frac{1}{\mu} + \frac{2\mu}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\mu}{2^2 - \mu^2} + \cdots + (-1)^n \frac{2\mu}{(n-1)^2 - \mu^2}$$

die Zahl n unendlich wachsen, so erhält man für U die Entwicklung

$$U = \frac{1}{\mu} + \frac{2\mu}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\mu}{2^2 - \mu^2} + \frac{2\mu}{3^2 - \mu^2} - \cdots$$

Die vorliegende Reihe ist summierbar nach Formel (6) in § 49; zufolge der ursprünglichen Bedeutung von U und des nachher gefundenen Wertes hat man

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}, \quad 0 < \mu < 1,$$

oder auch für $x = t^2 = \operatorname{tg}^2\theta$ und $2\mu - 1 = \lambda$

$$\int_0^\infty \frac{t^\lambda\,dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\lambda\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\lambda\pi}, \quad -1 < \lambda < +1.$$

b) Versteht man unter p eine ganze positive Zahl und setzt.

$$V = \int_0^\infty \frac{z^p\,dz}{e^z - 1},$$

so ist auch

$$V = \int_0^\infty z^p \left\{ e^{-z} + e^{-2z} + \cdots + e^{-nz} + \frac{e^{-(n+1)z}}{1 - e^{-z}} \right\} dz$$

$$= 1 \,.\, 2 \ldots p \left[\frac{1}{1^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{p+1}} \right]$$

$$+ \int_0^\infty \frac{z}{e^z - 1}\, z^{p-1}\, e^{-nz}\,dz.$$

Sehr einfache Betrachtungen zeigen, daß der Quotient $z : (e^z - 1)$ immer zwischen Null und der Einheit liegt; das letzte Integral ist daher nach § 94, (1) und dem ersten Mittelwertsatze das Produkt eines positiven echten Bruches in das endliche Integral

$$\int_0^\infty z^{p-1}\, e^{-nz}\,dz = \frac{1 \,.\, 2 \ldots (p-1)}{n^p}.$$

Versteht man unter ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch, so läßt sich die vorige Gleichung in der Form

$$V - \varrho\,\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (p-1)}{n^p}$$

$$= p! \left[\frac{1}{1^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{p+1}} \right]$$

schreiben und hieraus folgt bei unendlich wachsenden n und konstant bleibenden p

$$V = p!\left[\frac{1}{1^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \cdots\right]$$

oder nach einer schon früher (§ 49) gebrauchten Bezeichnung

$$\int_0^\infty \frac{z^p\,dz}{e^z - 1} = p!\,S_{p+1}, \qquad p > 0.$$

In dem Falle eines ungeraden $p = 2q - 1$ läßt sich S_{2q} durch die Bernoullische Zahl B_{2q-1} ausdrücken [§ 49, (28)]; es wird dann

$$\int_0^\infty \frac{z^{2q-1}\,dz}{e^z - 1} = \frac{2^{2q-1} B_{2q-1} \pi^{2q}}{2q}$$

oder auch, wenn man statt z eine neue Veränderliche τ mittels des Ansatzes $z = 2\pi\tau$ einführt,

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{2q-1}\,d\tau}{e^{2\pi\tau} - 1} = \frac{B_{2q-1}}{4q}.$$

c) Als letztes Beispiel diene die Entwicklung des Integrals

$$W = \int_0^\infty \frac{\sin\beta z}{e^z - 1}\,dz,$$

das der erste Mittelwertsatz sofort als endlich erkennen läßt. Zunächst ergibt sich auf ähnliche Weise wie vorhin

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty \left\{e^{-z} + e^{-2z} + \cdots + e^{-nz} + \frac{e^{-(n+1)z}}{1 - e^{-z}}\right\} \sin\beta z\,dz \\ &= \frac{\beta}{\beta^2 + 1^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + 2^2} + \cdots + \frac{\beta}{\beta^2 + n^2} \\ &\qquad + \beta \int_0^\infty \frac{z}{e^z - 1}\,\frac{\sin\beta z}{\beta z}\,e^{-nz}\,dz; \end{aligned}$$

das Produkt

$$\frac{z}{e^z - 1}\,\frac{\sin\beta z}{\beta z}$$

liegt immer zwischen $+1$ und -1, daher ist das letzte Integral zwischen

$$+\int_0^\infty e^{-nz}\,dz = +\frac{1}{n} \text{ und } -\int_0^\infty e^{-nz}\,dz = -\frac{1}{n}$$

enthalten, und folglich kann man statt der vorigen Gleichung schreiben

$$W - \frac{\beta\varrho}{n} = \frac{\beta}{\beta^2+1^2} + \frac{\beta}{\beta^2+2^2} + \cdots + \frac{\beta}{\beta^2+n^2},$$
$$-1 < \varrho < +1.$$

Durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n wird hieraus

$$W = \frac{\beta}{\beta^2+1^2} + \frac{\beta}{\beta^2+2^2} + \frac{\beta}{\beta^2+3^2} + \cdots,$$

d. i. nach § 58, (4)

$$\int_0^\infty \frac{\sin\beta z}{e^z-1}\,dz = \tfrac{1}{2}\left\{\pi\,\mathfrak{Cot}\,\beta\pi - \frac{1}{\beta}\right\}.$$

Setzt man noch

$$z = 2\pi\tau, \quad \beta = \frac{\alpha}{2\pi},$$

so wird die letzte Gleichung zur folgenden

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\tau}{e^{2\pi\tau}-1}\,d\tau = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha\tau}{e^{2\pi\tau}-1}\,\frac{d\tau}{\tau} = \tfrac{1}{4}\alpha + \tfrac{1}{2}\left\{\lg(1-e^{-\alpha}) - \lg\alpha\right\},$$

welche Formel sich leicht durch Differentiation in Beziehung auf α verifizieren läßt.

§ 97. Reihensummierungen durch bestimmte Integrale.

Da ein bestimmtes Integral als ein geschlossener Ausdruck gelten kann, dessen Wert sich nach § 83 mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit berechnen läßt, so ist es nicht selten von Vorteil, endliche oder unendliche Reihen in bestimmte Integrale zu verwandeln, also die Summen jener durch die Werte der letzteren auszudrücken. Einige allgemeinere Beispiele hierzu sind folgende.

I. Setzen wir wie in § 16, (11)

$$\psi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x),$$

so ergibt sich

$$\frac{d\,\psi(x)}{dx} = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x),$$

mithin umgekehrt durch Integration

$$\psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,dx;$$

vermöge der Bedeutung von $\psi(x)$ erhalten wir

$$f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) - \cdots$$
$$\cdots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) = \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,dx$$

oder

$$f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$
$$= f(b) - \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,dx.$$

Setzen wir $b - a = h$ und schreiben u für x, so haben wir

$$f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$
$$= f(a+h) - \int_a^{a+h} \frac{(a+h-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u)\,du,$$

und dies ist nichts anderes als eine Summenformel für die n ersten Glieder der Taylorschen Reihe. Gewöhnlich schreibt man statt der letzten Gleichung

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

wo R_n den Rest der Reihe bezeichnet, nämlich

$$R_n = \int_x^{x+h} \frac{(x+h-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u)\, du.$$

Durch Einsatz von $u = x + v$, $du = dv$ erhält letzterer die Form

$$R_n = \int_0^h \frac{(h-v)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+v)\, dv$$

und daraus wird für $v = hw$

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-w)^{n-1} f^{(n)}(x+hw)\, dw.$$

Nimmt man in der Gleichung (1) $a = 0$ und schreibt x für h, so erhält man

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1\,.\,2} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n,$$

wobei der Rest R_n unter folgenden Formen dargestellt werden kann

$$R_n = \int_0^x \frac{(x-u)^{n-1}}{1\,.\,2 \ldots (n-1)} f^{(n)}(u)\, du,$$

$$R_n = \frac{x^n}{1\,.\,2 \ldots (n-1)} \int_0^1 (1-w)^{n-1} f^{(n)}(xw)\, dw.$$

Wendet man auf das hier vorkommende Integral den ersten Mittelwertsatz des § 92 an, indem man in diesem w für x und nachher $\varphi(w) = f^{(n)}(xw)$, $\psi(w) = (1-w)^{n-1}$ setzt, so gelangt man zu derselben Restformel, welche sich aus § 43, (4) durch die Sonderannahme $\psi(w) = x^n - (x-w)^n$ ergibt.

II. In § 83 wurde gezeigt, daß sich die Fläche

$$U = \int_a^b f(x)\, dx$$

mit beliebiger Genauigkeit berechnen läßt, und zwar ist nach den dortigen Formeln, wenn

$$\int f(x)\, dx = F(x), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

gesetzt wird,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+\overline{n-1}h) + \tfrac{1}{2}f(a+nh)]$$
$$- \tfrac{1}{12}h^2[f'(a+nh) - f'(a)] + \tfrac{1}{384}\varrho\, h^4[f'''(a+nh) - f'''(a)];$$

darin bezeichnet ϱ einen positiven echten Bruch. Nimmt man in dieser Formel $a = h = 1$, mithin $b = n + 1$ und addiert beiderseits $\frac{1}{2}f(n+1)$, so hat man

$$(2)\quad f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n+1) = \int_1^{n+1} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}[f(n+1)$$
$$- f(1)] + \tfrac{1}{12}[f'(n+1) - f'(1)] - \tfrac{1}{384}\varrho\,[f'''(n+1) - f'''(1)]$$

oder, indem man $n + 1 = p$ setzt und die von p unabhängigen Ausdrücke zu einer Konstanten C zusammenfaßt, mit unbestimmtem Integral

$$(3)\qquad f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(p)$$
$$= C + \int^p f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}f(p) + \tfrac{1}{12}f'(p) - \tfrac{1}{384}\varrho f'''(p).$$

Dabei müssen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{\mathrm{IV}}(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = 1$ bis $x = p$; die letzte Funktion darf innerhalb desselben Intervalls ihr Vorzeichen nicht wechseln, und der echte Bruch ϱ ist immer positiv.

Wie die Formel (3) zur Summierung endlicher Reihen benutzt werden kann, mögen die folgenden zwei Beispiele zeigen.

a) Mit der Annahme $f(x) = \dfrac{1}{x}$ genügt man den angegebenen Bedingungen, und zwar für jedes $x > 1$; ferner ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},\qquad f'''(x) = -\frac{6}{x^4},\qquad f^{\mathrm{IV}}(x) = +\frac{24}{x^5},$$

mithin

$$(4)\quad \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \cdots + \frac{1}{p} = C + \lg p + \frac{1}{2p} - \frac{1}{12p^2} + \frac{\varrho}{64p^4}.$$

Um die Konstante C, die jedenfalls einen endlichen Wert haben muß, zu bestimmen, schaffen wir $\lg p$ auf die linke Seite und gehen zur Grenze für unendlich wachsende p über; es wird dann

$$\lim\left\{\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - \lg p\right\} = C.$$

Diese Gleichung erhält eine bessere Gestalt, wenn man die Formel

$$x - \lg(1+x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n \varepsilon}{n}x^n$$

benutzt, welche aus der Formel § 45, (1) durch die Substitutionen

$$p = n, \quad \frac{1}{(1+\vartheta x)^n} = \varepsilon$$

hervorgeht, und worin bei positiven x der Wert von ε zwischen 0 und 1 enthalten ist. Setzt man nämlich der Reihe nach $x = 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \cdots \frac{1}{p}$, so erhält man

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - \lg(p+1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{p^2}\right) - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{p^3}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\left(\frac{1}{1^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{p^{n-1}}\right)$$

$$\cdots + \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\varepsilon_1}{1^n} + \frac{\varepsilon_2}{2^n} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{p^n}\right),$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ verschiedene positive echte Brüche bezeichnen. Zufolge dieses Umstandes liegt die letzte Summe zwischen Null und

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{p^n},$$

sie bildet also einen Bruchteil dieses Ausdruckes. Zerlegt man $\lg(p+1)$ in $\lg p + \lg(1 + 1/p)$ und geht zur Grenze für unendlich wachsende p über, so kommt in der Bezeichnung des § 49

$$C = \tfrac{1}{2}S_2 - \tfrac{1}{3}S_3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}S_{n-1} + \frac{(-1)^n \varepsilon}{n}S_n,$$

und für unendliche n

$$C = \tfrac{1}{2}S_2 - \tfrac{1}{3}S_3 + \tfrac{1}{4}S_4 - \cdots;$$

die Reihe konvergiert, da S_n positiv ist und mit wachsendem n abnimmt. Diese Reihe wird rascher konvergent, wenn man sie mit der Gleichung

$$0 = 1 - \lg 2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \cdots$$

vereinigt, nämlich

$$C = 1 - \lg 2 + \tfrac{1}{2}(S_2 - 1) - \tfrac{1}{3}(S_3 - 1) + \cdots$$

und hieraus findet man

$$C = 0{,}577\,215\,6649\ldots$$

Nimmt man in Formel (4) beispielsweise $p = 1000$, so wird der Rest

$$\frac{\varrho}{64 \cdot 1000^4} < \frac{1}{10^{13}},$$

mithin erhält man die Summe der Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1000}$ auf wenigstens 12 Dezimalen genau; sie ist $7{,}485\,470\,86\ldots$

b) Die Annahme $f(x) = \lg x$ genügt gleichfalls den aufgestellten Bedingungen, falls $x > 1$ ist; sie gibt

$$(5) \qquad \lg 1 + \lg 2 + \cdots \lg p = \lg (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p)$$
$$= C + p(\lg p - 1) + \tfrac{1}{2} \lg p + \frac{1}{12 p} - \frac{\varrho}{192 p^3}.$$

Um die Konstante zu bestimmen, erinnern wir an die identische Gleichung

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2q - 1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2q)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2q)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2q)}{2^q \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q},$$

woraus folgt

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2q)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2q - 1)} = \frac{2^{2q} (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2q)}.$$

Wir nehmen beiderseits die natürlichen Logarithmen, wodurch rechts der Ausdruck $2q \lg 2 + 2 \lg (1 \cdot 2 \ldots q) - \lg (1 \cdot 2 \ldots 2q)$ entsteht, und verwandeln die Logarithmen der Produkte $1 \cdot 2 \ldots q$ und $1 \cdot 2 \ldots 2q$ nach Formel (5), wobei zur Abkürzung

$$\frac{1}{12 p} - \frac{\varrho}{192 p^3} = U_p$$

sein möge; wir erhalten so

$$\lg \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2q)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2q - 1)} \right) = C - \tfrac{1}{2} \lg 2 + \tfrac{1}{2} \lg q + 2 U_q - U_{2q}$$

oder nach Multiplikation mit 2 und Subtraktion von $\lg (2q + 1)$

$$\lg \left(\frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2q)^2}{3^2 \cdot 5^2 \ldots (2q - 1)^2 (2q + 1)} \right) = 2C - \lg 2 - \lg \left(2 + \frac{1}{q} \right)$$
$$+ 2 U_q - U_{2q}.$$

Die linke Seite kann unter der Form

$$\lg \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2q}{2q - 1} \, \frac{2q}{2q + 1} \right)$$

dargestellt werden und konvergiert nach § 48 bei unendlich wachsenden q gegen die Grenze $\lg(\frac{1}{2}\pi)$; rechter Hand nähern sich $1/q$, U_q und U_{2q} der gemeinschaftlichen Grenze Null, mithin bleibt

$$\lg(\tfrac{1}{2}\pi) = 2C - 2\lg 2 \quad \text{oder} \quad C = \tfrac{1}{2}\lg(2\pi).$$

Nach der Gleichung (5) ist nun

$$(6) \qquad \lg(1.2.3\ldots p) = \tfrac{1}{2}\lg(2\pi) + (p+\tfrac{1}{2})\lg p - p + \frac{1}{12p} - \frac{\varrho}{192p^3},$$

welche Formel bei großen p eine ansehnliche Genauigkeit gewährt.

Schon in dem nicht günstigen Falle $p = 10$ erhält man nach beiderseitiger Multiplikation mit dem Modulus der Briggschen Logarithmen

$$\lg(1.2.3\ldots 10) = 6{,}559\,764\,2 - \varrho\,.\,0{,}000\,002\,3$$

oder für $\varrho = 1$ und $\varrho = 0$

$$6{,}559\,761\,9 < \lg(1.2.3\ldots 10) < 6{,}559\,764\,2,$$

was mit dem Werte

$$\lg(1.2.3\ldots 10) = 6{,}559\,763\,0$$

auf fünf Dezimalstellen übereinstimmt.

Benutzt man wieder U_p zur Abkürzung, so hat man nach (6)

$$(7) \qquad p! = 1.2.3\ldots p = \sqrt{2p\pi}\left(\frac{p}{e}\right)^p e^{U_p}.$$

Vermöge der Bemerkung, daß der k^{te} Binomialkoeffizient eines ganzen Exponenten μ unter der Form

$$\binom{\mu}{k} = \frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2\ldots(\mu-k).1.2\ldots k}$$

dargestellt werden kann, folgt aus der Gleichung (7) das Ergebnis

$$\binom{\mu}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mu^{\mu+1/2}}{(\mu-k)^{\mu-k+1/2}\,k^{k+1/2}}\,e^{U_\mu - U_{\mu-k} - U_k},$$

welches für die Wahrscheinlichkeitsermittlung bei oft wiederholten Versuchen von Wert ist.

Die Formel (2) ist ein Sonderfall der Euler-Mac Laurinschen Summenformel; die Formel (6) ist die Stirlingsche. Auf erstere kommen wir im zweiten Bande zurück.

Kapitel XVI.

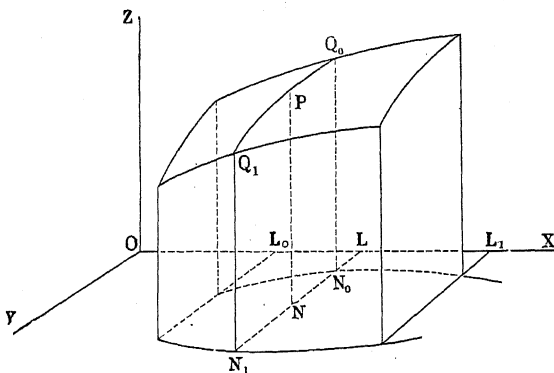
Die mehrfachen bestimmten Integrale.

§ 98. Die Doppelintegrale und die Bestimmung des Rauminhalts.

I. In Fig. 78 mögen $OL = x$, $LN = y$, $NP = z$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P bedeuten und es sei

$$z = f(x, y)$$

die Gleichung einer Fläche, auf welcher jener Punkt liegt; ferner denken wir uns in der xy-Ebene parallel zur y-Achse zwei Gerade gezogen, deren Entfernungen von jener Achse bekannt, nämlich

Fig. 78.

$OL_0 = x_0$ und $OL_1 = X$ sein mögen; in derselben Ebene stellen wir uns endlich zwei Kurven vor, welche durch die Gleichungen

$$LN_0 = y_0 = \varphi(x), \quad LN_1 = Y = \psi(x)$$

bestimmt sein sollen. Jene Geraden und diese Kurven mögen einen Normalbereich nach x im Sinne des § 80 umschließen; diesen nennen wir $\mathfrak{N}$ und betrachten ihn als die Grundfläche eines geraden Zylinders,

welcher oben durch die vorhin erwähnte Fläche begrenzt wird, und stellen uns die Aufgabe, den Rauminhalt V dieses Zylinders zu berechnen.

Dazu gelangt man auch mittels der schon mehrfach benutzten Formel
$$V = \int_{x_0}^{X} U\,dx,$$
worin U den Flächeninhalt des Querschnittes $N_0 N_1 Q_1 Q_0$ bedeutet, welcher im Abstande x parallel zur yz-Ebene gelegt ist. Nach der bekannten Regel zur Quadratur ebener Flächen hat man, $LN = y$ als Abszisse und $NP = z$ als Ordinate ansehend,
$$U = \int_{y_0}^{Y} z\,dy = \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy,$$
mithin durch Einsatz in die vorige Gleichung
$$V = \int_{x_0}^{X} \left\{ \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy \right\} dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy.$$

Diesen Ausdruck nennen wir das Doppelintegral der Funktion $f(x, y)$, erstreckt über das Gebiet $\mathfrak{R}$ mit bestimmter Folge der Integrationen, indem zunächst durch Integration nach y die Größe U, dann V durch Integration nach x gebildet wird. Wir schreiben auch
$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy = \iint_{\mathfrak{R}} f(x, y)\,dx\,dy,$$
wobei die Differentiale in umgekehrter Folge der wirklich auszuführenden Integrationen stehen.

Sei z. B. $f(x, y) = 1$; dann erhält man
$$V = \int_{x_0}^{X} dx\,(Y - y_0);$$
das ist nach § 80 der Flächeninhalt des Bereichs $\mathfrak{R}$.

Seien zweitens $y_0 = \varphi(x) = \beta$, $Y = \psi(x) = b$ Festwerte, $b > \beta$, $x_0 = a$, $X = b$, der Bereich $\mathfrak{R}$ also ein den Bezugsachsen parallel orientiertes Rechteck, und $f(x, y) = F(x)\,\Phi(y)$; dann findet man
$$U = \int_{y_0}^{Y} F(x)\,\Phi(y)\,dy = F(x) \int_{\beta}^{b} \Phi(y)\,dy,$$
$$V = \int^{a} F(x)\,dx \,.\int_{\alpha}^{b} \Phi(y)\,dy;$$

32*

also ergibt sich ein Produkt zweier einfacher, bestimmter Integrale, das umgekehrt stets als Doppelintegral über eine Rechtecksfläche gelten kann.

Als Beispiel einer Raummessung diene folgender Fall. Die oberhalb begrenzende Fläche sei ein elliptisches Paraboloid, bestimmt durch die Gleichung

$$z = \alpha x^2 + \beta y^2;$$

die Grundfläche des Körpers sei ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 79) mit den Katheten $OA = a$, $OB = b$. Die doppelte Integration bezieht sich dann auf alle positiven x und y, welche der Bedingung

Fig. 79.

$$0 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1$$

genügen; mithin sind die Integrationsgrenzen

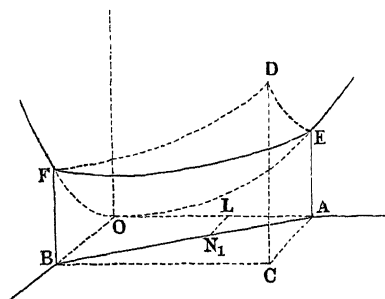
$$x_0 = 0, \quad X = OA = a,$$
$$y_0 = 0, \quad Y = LN_1$$
$$= b\left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

Dies gibt

$$V = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dy = \iint_{OAB} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dx\, dy$$
$$= \int_0^a dx \left\{ \alpha x^2 . b\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \alpha \cdot \tfrac{1}{3} b^3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right\}$$
$$= \tfrac{1}{12} ab (\alpha a^2 + \beta b^2).$$

Denkt man sich denjenigen Punkt D der Fläche aufgesucht, dessen Koordinaten $OA = a$, $OB = AC = b$, $CD = c$ sind, so ist $c = \alpha a^2 + \beta b^2$, mithin V gleich dem zwölften Teile des Quaders mit den Kanten a, b, c. Aus der Form des Ergebnisses ersieht man, daß man die Rollen der Größen x und y vertauschen kann; man erhält so, indem man OAB als Normalbereich nach y auffaßt, das Integral

$$V = \int_0^b dy \int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dx = \iint_{OAB} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dy\, dx,$$

das bei geänderter Folge der Integrationen zu demselben Werte führt.

Für ein zweites Beispiel behalten wir das elliptische Paraboloid als obere Begrenzungsfläche bei, nehmen aber als Grundfläche die ganze aus den Halbachsen a und b konstruierte Ellipse. Die Integrationen beziehen sich jetzt auf alle positiven und negativen x und y, welche der Bedingung

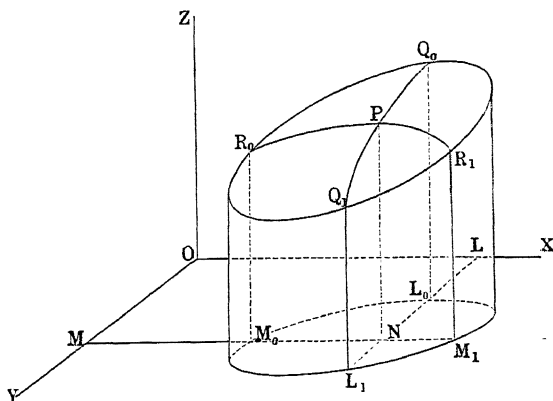
$$0 \leqq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1$$

genügen; daher ist

$$V = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{+b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dy.$$

Die Ausführung beider Integrationen gibt

$$V = \tfrac{1}{4}\pi ab(\alpha a^2 + \beta b^2) = \tfrac{1}{4}\pi abc,$$

Fig. 80.

worin wieder ein einfacher stereometrischer Satz liegt. Auch hier kommt man bei geänderter Folge der Integrationen zu demselben Ergebnisse; die Ellipse kann als Normalbereich nach x wie nach y aufgefaßt werden.

II. Allgemeiner mögen in Fig. 80 durch $OL = x$, $OM = LN = y$, und $NP = z$ die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P bezeichnet sein; $z = f(x, y)$ sei die Gleichung einer Fläche. In der xy-Ebene sei eine geschlossene Linie $L_0 M_0 L_1 M_1$ gegeben, der wir die Stetigkeitseigenschaften der Kurve $\mathfrak{L}$ des § 82 beilegen; wir wollen solche Kurven fortan als brauchbare Kurven bezeichnen. Die

geschlossene Linie begegne ferner jeder Geraden $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ in höchstens zwei getrennten Punkten, so daß ihr Inneres im Sinne des § 82 ein Normalbereich nach x wie nach y ist, ein zweiseitiger Normalbereich, wie wir ihn nennen wollten; wir bezeichnen ihn hier durch $\mathfrak{N}$. In diesem Gebiet sei $f(x, y)$ stetig; dann ist der über $\mathfrak{N}$ stehende Zylinderinhalt

$$V = \iint\limits_{\mathfrak{N}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Integriert man zuerst nach y bei vorläufig festen x, so sind wie oben $LL_0 = y_0$ und $LL_1 = Y$ die Integrationsgrenzen; die nachherigen Grenzen der Integration nach x sind die Abszissen x_0 und X der parallel der y-Achse an die Zylindergrundfläche gelegten Tangenten, also der Stützen des Bereiches $\mathfrak{N}$ nach x, die auch endliche Stücke mit der Kurve $L_0 M_1 L_1 M_0$ gemein haben können, indem diese abweichend von der Figur wie ein Rechteck mit abgerundeten Ecken aussehen kann. Will man dagegen zuerst nach x integrieren, werde $MM_0 = \xi$ und $MM_1 = \Xi$ gesetzt und dieses sind die Integrationsgrenzen; nachher läuft y etwa von η_0 bis H, wobei $y = \eta_0$ und $y = H$ die parallel der x-Achse laufenden Tangenten der Zylindergrundfläche sind, also die Stützen des Bereiches $\mathfrak{N}$ nach y, von denen dasselbe gilt wie von den Geraden $x = x_0$ und $x = X$.

In der zweiten Auffassung erhält man für den gesuchten Rauminhalt den Ausdruck

$$V_1 = \iint\limits_{\mathfrak{N}} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{\eta_0}^{H} dy \int_{\xi_0}^{\Xi} f(x, y)\, dx;$$

in der ersten

$$V = \iint\limits_{\mathfrak{N}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy;$$

dabei sind x_0 und X die äußersten Werte der Abszisse, η_0 und H diejenigen der Ordinate auf der Kurve $L_0 M_0 L_1 M_1$; ferner ist $LL_0 = y_0$, $LL_1 = Y$, $MM_0 = \xi_0$, $MM_1 = \Xi$.

III. Um nun die Vertauschbarkeit der Integrationen, also die Gleichung $V = V_1$ nachzuweisen entwickeln wir zunächst eine wichtige Beziehung zwischen einfachen und mehrfachen Integralen.

Setzt man

$$\int_{y_0}^{y} f(x, y)\, dy = P(x, y),$$

so ist

$$P(x, y_0) = 0, \quad V = \int_{x_0}^{X} P(x, Y)\, dx.$$

Bildet man nun nach § 80 das Linienintegral

$$J = \int_{\mathfrak{U}} P(x, y)\, dx,$$

indem man unter $\mathfrak{U}$ den positiv durchlaufenen Umfang des Bereiches $\mathfrak{N}$, also den Umfang $M_0 L_0 M_1 L_1$ versteht, so geben etwaige Stützen $x = \text{const.}$ keinen Beitrag; die Grenzbögen, d. h. die Orte der Punkte $L_0(x, y_0)$ und $L_1(x, Y)$ ergeben, da ersterer nach wachsenden, letzterer nach abnehmenden Werten von x zu durchlaufen ist, zu J die Beiträge

$$\int_{x_0}^{X} P(x, y_0)\, dx = 0, \qquad \int_{X}^{x_0} P(x, Y)\, dx = -V,$$

so daß einfach

$$V = -J = -\int_{\mathfrak{U}} P(x, y)\, dx \tag{1}$$

folgt.

Ebenso werde gesetzt

$$Q = Q(x, y) = \int_{\xi_0}^{x} f(x, y)\, dx;$$

dann ist auch

$$Q(\xi_0, y) = 0, \qquad V_1 = \int_{\eta_0}^{H} Q(\Xi, y)\, dy, \qquad \int_{\eta_0}^{H} Q(\xi_0, y)\, dy = 0,$$

und man erhält V_1 ebenfalls als Linienintegral

$$V_1 = \int_{\mathfrak{U}} Q\, dy; \tag{2}$$

hier ist auf dem nach y unteren Grenzbogen dem Umlauf $\mathfrak{U}$ gemäß nach abnehmenden, auf dem oberen Grenzbogen nach wachsenden y zu integrieren, woraus sich der Unterschied im Vorzeichen gegenüber der Gleichung (1) erklärt.

Jetzt werde der betrachtete Bereich $\mathfrak{N}$ in ein Rechteck $\mathfrak{R}$ eingeschlossen, dessen Seiten etwa $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$ seien; dabei sei $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. In diesem ganzen Rechteck werde $f(x, y)$ als stetige Funktion so definiert, daß im Gebiete $\mathfrak{N}$ die gegebenen Werte bleiben; im übrigen sei z. B. gesetzt $f(x, y) = f(x, Y)$, wenn

$$x_0 \leqq x \leqq X, \quad y_2 \geqq y > Y;$$

ferner sei $f(x, y) = f(x, y_0)$, wenn

$$x_0 \leqq x \leqq X, \quad y_1 \leqq y < y_0;$$

endlich $f(x, y) = f(X, y)$, wenn $x_2 \geqq x > X$, und $f(x, y) = f(x_0, y)$, wenn $x_1 \leqq x < x_0$; durch diese Festsetzungen ist $f(x, y)$ im ganzen Rechteck $\mathfrak{R}$ als stetige Funktion des Ortes gegeben.

Setzt man nun

$$P_0 = \int_{y_1}^{y} f(x, y)\, dy, \qquad Q_0 = \int_{x_1}^{x} f(x, y)\, dx,$$

so ist offenbar

$$(3) \qquad \frac{\partial P_0}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q_0}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = f(x, y),$$

also $P_0 - P$ von y unabhängig, im besonderen

$$P_0(x, y_0) - P(x, y_0) = P_0(x, Y) - P(x, Y);$$

hieraus folgt

$$\int_{\mathfrak{u}} \{P_0(x, y) - P(x, y)\}\, dx = \int_{x_0}^{X} \{P_0(x, y_0) - P(x, y_0)\}\, dx$$

$$+ \int_{X}^{x_0} \{P_0(x, Y) - P(x, Y)\} = 0,$$

also

$$(4) \qquad \int_{\mathfrak{u}} P\, dx = \int_{\mathfrak{u}} P_0\, dx,$$

und ebenso erhält man die Gleichung

$$(5) \qquad \int_{\mathfrak{u}} Q\, dy = \int_{\mathfrak{u}} Q_0\, dy.$$

Weiter integrieren wir den zweigliedrigen Ausdruck $P_0\, dx + Q_0\, dy$ längs eines Winkelhakens von der linken unteren Ecke des Rechtecks $\mathfrak{R}$ aus zuerst längs der x-Richtung, dann längs der y-Richtung, womit als Endpunkt jede Stelle des Rechtecks $\mathfrak{R}$ erreicht wird; d. h. wir bilden

$$F(x, y) = \int_{x_1}^{x} P_0(x, y_1)\, dx + \int_{y_1}^{y} Q_0(x, y)\, dy,$$

was offenbar nach § 95 eine auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}$ stetige Funktion ist. Man findet zunächst ohne weiteres

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q_0(x, y);$$

benutzt man ferner die Formeln des § 95 für die Ableitung eines bestimmten Integrals nach einem Parameter, so findet man

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P_0(x, y_1) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y} Q_0(x, y)\, dy$$

$$= P_0(x, y_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial Q_0(x, y)}{\partial x}\, dy,$$

also nach (3)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P_0(x, y_1) + \int_{y_1} \frac{\partial P_0(x, y)}{\partial y} dy$$
$$= P_0(x, y_1) + P_0(x, y) - P_0(x, y_1)$$
$$= P_0(x, y),$$

und zusammengefaßt

$$dF(x, y) = P_0 dx + Q_0 dy.$$

Integriert man aber ein vollständiges Differential über eine geschlossene Kurve, so ergibt sich nach § 80 der Wert Null; sind $A(x_3, y_3)$ und $B(x_4, y_4)$ irgend zwei Punkte der Fläche $\mathfrak{R}$, die durch die Kurve $\mathfrak{K}$ verbunden sind, so ist

$$\int_{AB} dF = \int_{\mathfrak{K}} dF = F(x_4, y_4) - F(x_3, y_3)$$

offenbar von der Wahl der Kurve $\mathfrak{K}$ unabhängig, so daß zwei verschiedene Kurven $\mathfrak{K}$ denselben Wert ergeben; ein Hingang längs einer und ein Rückgang längs einer anderen geben zusammen die Summe Null. Im besonderen ist

$$\int_{\mathfrak{U}} dF = 0 = \int_{\mathfrak{U}} (P_0 dx + Q_0 dy), \quad \int_{\mathfrak{U}} P_0 dx = -\int_{\mathfrak{U}} Q_0 dy,$$

also nach (4) und (5), (1) und (2)

$$\int_{\mathfrak{U}} P dx = -\int_{\mathfrak{U}} Q dy, \quad V = V_1.$$

I n e i n e m ü b e r e i n e n z w e i s e i t i g e n N o r m a l b e r e i c h e r s t r e c k t e n D o p p e l i n t e g r a l d ü r f e n a l s o d i e I n t e g r a t i o n e n v e r t a u s c h t w e r d e n, natürlich mit entsprechender Änderung der Grenzen.

Die Gleichungen (4) und (5) können hiernach geschrieben werden:

$$(6) \qquad \iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int_{\mathfrak{U}} P dx, \qquad \iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_{\mathfrak{U}} Q dy,$$

sie gelten offenbar auch, wenn P und Q beliebige im Gebiet $\mathfrak{R}$ stetige Funktionen sind, die stetige erste Ableitungen besitzen; man braucht ja nur $f = \partial P / \partial y$ oder $f = \partial Q / \partial x$ zu setzen.

Jetzt sei ds das Bogenelement des Umfanges $\mathfrak{U}$, dann sind dx/ds und dy/ds nach § 18 die Richtungskosinus der im positiven Fortgangssinn gezogenen Tangente; gegen diese ist die äußere Normale im

negativen Sinne um 90^0 gedreht; sind τ und ν die Richtungswinkel dieser beiden Richtungen, so ist

$$\tau = \nu + \tfrac{1}{2}\pi, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\tau = -\sin\nu, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\tau = \cos\nu$$

oder auch, wenn N die äußere Normalenrichtung bedeutet,

$$\cos\nu = \cos(xN) = \frac{dy}{ds}, \quad \sin\nu = \cos(yN) = -\frac{dx}{ds}.$$

Setzt man die hiermit gegebenen Werte von dx und dy in die Gleichungen (6), so ergibt sich

$$(7) \quad \iint\limits_{\mathfrak{N}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_{\mathfrak{U}} P\cos(yN)\,ds, \quad \iint\limits_{\mathfrak{N}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\mathfrak{U}} Q\cos(xN)\,ds.$$

Diese Gleichungen oder die ihnen gleichwertigen (6) geben die Gaußsche Integraltransformation in der Ebene, zunächst für zweiseitige Normalbereiche; ein Doppelintegral über einen solchen kann, wie man sieht, stets in ein Linienintegral umgewandelt werden.

IV. Die Umkehr der Integrationsfolge gestaltet sich am einfachsten, wenn alle vier Integrationsgrenzen y_0, Y, ξ_0, Ξ fest sind, was geometrisch bedeutet, daß die Zylindergrundfläche ein Rechteck ist, dessen Seiten parallel zu den Bezugsachsen liegen. Man hat in diesem Falle

$$\int\limits_{\alpha}^{a} dx \int\limits_{\beta}^{b} f(x,y)\,dy = \int\limits_{\beta}^{b} dy \int\limits_{\alpha}^{a} f(x,y)\,dx,$$

wenn $\alpha < a$, $\beta < b$ und $f(x,y)$ auf dem Gebiet $\alpha \leqq x \leqq a$, $\beta \leqq y \leqq b$ stetig ist.

Als Beispiel betrachten wir das Doppelintegral

$$\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{b} e^{-xy}\sin x\,dy = \int\limits_{0}^{b} dy \int\limits_{0}^{a} e^{-yx}\sin x\,dx;$$

es ergibt sich, wenn jedesmal die erste der angedeuteten Integrationen ausgeführt wird,

$$\int\limits_{0}^{a} \frac{1 - e^{-bx}}{x}\sin x\,dx = \int\limits_{0}^{b} \frac{1 - e^{-ay}(\cos a + y\sin a)}{1 + y^2}\,dy$$

$$= \operatorname{arctg} b - \cos a \int\limits_{0}^{b} \frac{e^{-ay}}{1 + y^2}\,dy - \sin a \int\limits_{0}^{b} \frac{y\,e^{-ay}}{1 + y^2}\,dy.$$

Da der Bruch $\frac{1}{1+y^2}$ zwischen 0 und 1 liegt, so ist der Wert des mit $\cos a$ multiplizierten Integrals positiv und kleiner als

$$\int_0^b e^{-ay}\,dy = \frac{1-e^{-ab}}{a};$$

für das zweite Integral rechter Hand gilt eine ähnliche Bemerkung, und man hat daher

$$\int_0^a \frac{1-e^{-bx}}{x}\sin x\,dx = \operatorname{arctg} b - \frac{1-e^{-ab}}{a}(\varrho_0 \cos a + \varrho_1 \sin a),$$

wo ϱ_0 und ϱ_1 nicht näher bestimmte positive echte Brüche bezeichnen.

Durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende a ergeben sich beiläufig, a und b als positiv vorausgesetzt, einige belangreiche uneigentliche Integrale:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{1-e^{-bx}}{x}\sin x\,dx = \operatorname{arctg} b.$$

Das Integral linker Hand zerfällt in die beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-bx}\,dx,$$

und da $\sin x/x$ immer zwischen $+1$ und -1 enthalten ist, so kann der Wert des zweiten Integrals nach dem ersten Mittelwertsatz

$$= \varrho \int_0^\infty e^{-bx}\,dx = \varrho\,\frac{1}{b}$$

gesetzt werden, wenn ϱ der Strecke $-1 \cdots +1$ angehört. Streng genommen hat man zunächst ∞ durch einen positiven Wert c zu ersetzen, den Mittelwertsatz anzuwenden, und dann $\lim c = \infty$ zu setzen; so ergibt sich nach (1)

$$\lim_{c=\infty}\left[\int_0^c \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\varrho}{b}\right] = \operatorname{arctg} b;$$

hieraus folgt für $b = \infty$, $c = \infty$

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

womit zugleich die Endlichkeit dieses uneigentlichen Integrals nachgewiesen ist.

V. Um auch ein Beispiel für den allgemeinen Fall zu haben, betrachten wir das Doppelintegral

$$V = \iint \sqrt{4c^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven, der Bedingung

$$(x-c)^2 + y^2 \leqq c^2$$

genügenden x und y beziehen mögen. Geometrisch bedeutet hier V den Rauminhalt eines Zylinders, welcher den über $OA = 2c$ konstruierten Halbkreis zur Grundfläche hat, und von einer mit dem Radius OA beschriebenen Kugel geschnitten wird (Fig. 81). Dieser ist offenbar ein zweiseitiger Normalbereich. Integriert man zuerst in Beziehung auf y, so sind 0 und $LQ = \sqrt{2cx - x^2}$ die zugehörigen Integrationsgrenzen; nachher ist x von 0 bis $2c$ auszudehnen, also

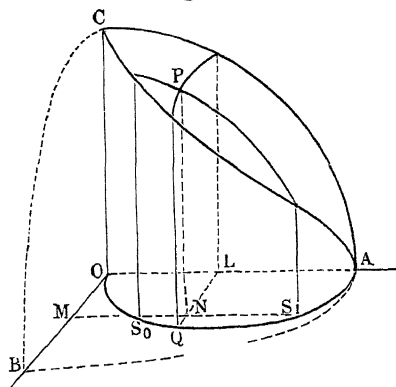



Fig. 81.

$$V = \int_0 dx \int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} \sqrt{4c^2 - x^2 - y^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2c} dx \left\{(2c - x)\sqrt{2cx} + (4c^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{2c+x}}\right\}$$

$$= \left(\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{2}{9}\right)(2c)^3.$$

Bei umgekehrter Anordnung der Integrationen gelten für x die Grenzen $MS_0 = c - \sqrt{c^2 - y^2}$ und $MS_1 = c + \sqrt{c^2 - y^2}$, für y die Grenzen 0 und c, mithin ist auch

$$V = \int_0^c dy \int_{c - \sqrt{c^2 - y^2}}^{c + \sqrt{c^2 - y^2}} \sqrt{4c^2 - x^2 - y^2}\, dx.$$

Als Wert des ersten Integrals findet man

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2c}\left\{(c + \sqrt{c^2 - y^2})\sqrt{c - \sqrt{c^2 - y^2}} - (c - \sqrt{c^2 - y^2})\sqrt{c + \sqrt{c^2 - y^2}}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(4c^2 - y^2)\left\{\arcsin \frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{\sqrt{4c^2 - y^2}} - \arcsin \frac{c - \sqrt{c^2 - y^2}}{\sqrt{4c^2 - y^2}}\right\},$$

derselbe läßt sich aber noch sehr zusammenziehen. Das Quadrat vom Inhalt der ersten Klammer ist nämlich $2y^2(c-y)$, mithin der Inhalt selbst $= y\sqrt{2(c-y)}$; mittels der Formel Einl. III, (10) ergibt sich ferner als Differenz der beiden Kreisbögen der eine Bogen

$$\arcsin\left[\sqrt{2c}\,\frac{(c+\sqrt{c^2-y^2})^{\frac{3}{2}}-(c-\sqrt{c^2-y^2})^{\frac{3}{2}}}{4c^2-y^2}\right]$$

$$=\arcsin\frac{2\sqrt{c(4c^3-3cy^2-y^3)}}{4c^2-y^2}=\arcsin\frac{2\sqrt{c(c-y)}}{2c-y}$$

$$=\arcsin\left[2\sqrt{\frac{c}{2c-y}}\sqrt{1-\frac{c}{2c-y}}\right]=2\arcsin\sqrt{\frac{c}{2c-y}},$$

wobei die Formel

$$\arcsin(2\gamma\sqrt{1-\gamma^2})=2\arcsin\gamma$$

angewendet worden ist. Nach diesen Bemerkungen erhält man

$$V=\int_0^c\left\{y\sqrt{c(c-y)}+(4c^2-y^2)\arcsin\sqrt{\frac{c}{2c-y}}\right\}dy,$$

was zu demselben Werte von V führt wie die vorige Rechnung.

Den Nutzen, welchen die Umkehrung der Integrationenfolge gewährt, zeigt das etwas allgemeinere Beispiel

$$V=\iint\sqrt{4c^2-x^2-y^2}\,\psi(y)\,dx\,dy,$$

worin $\psi(y)$ eine beliebige Funktion von y bedeuten und die Integrationsbedingung dieselbe wie vorhin sein möge. Hier läßt sich bei der ersten Anordnung die auf y bezügliche Integration im allgemeinen gar nicht ausführen, wohl aber kann man bei der zweiten Anordnung genau wie vorhin rechnen; damit gelangt man zu der Gleichung

$$\int_0^{2c}\int_0^{\sqrt{2cx-x^2}}\sqrt{4c^2-x^2-y^2}\,\psi(y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^c\left\{y\sqrt{c(c-y)}+(4c^2-y^2)\arcsin\sqrt{\frac{c}{2c-y}}\right\}\psi(y)\,dy,$$

welche das Doppelintegral auf ein einfaches zurückführt.

§ 99. Allgemeinere Doppelintegrale und ihre Eigenschaften.

I. Irgend zwei Normalbereiche nach x, deren Grenzbögen einander nicht außerhalb der Stützen schneiden, haben entweder nur Punkte ihrer Stützen, oder wieder einen Normalbereich nach x gemein. Sie seien etwa durch die Ungleichungen

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x),$$
$$\gamma \leqq x \leqq \delta, \quad \Phi(x) \leqq y \leqq \Psi(x)$$

bestimmt. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach der Größe geordnet $\alpha_1, \ldots \alpha_4$, und $\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ nach der Größe geordnet $\varphi_1, \ldots \varphi_4$, so ist der gemeinsame Bereich durch die Ungleichungen

$$\alpha_2 \leqq x \leqq \alpha_3, \quad \varphi_2(x) \leqq y \leqq \varphi_3(x)$$

gegeben. Es kann sein, daß $\alpha_2 = \alpha_3$ ist; dann hat man nur eine Stützenstrecke als gemeinsames Gebiet; sonst bestimmen die letzten Ungleichungen offenbar einen Normalbereich nach x. Zwischen den Funktionen $\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ kann eine Größenordnung in dem Sinne festgelegt werden, daß, wenn x zwischen zwei Werten α_i liegt, irgend zwei dieser Funktionen stets eine von Null verschiedene Differenz von festem Vorzeichen haben. Denn dies galt für die Grenzbögen eines Normalbereichs, und dasselbe muß für einen Grenzbogen des einen und einen des anderen gelten, weil diese sonst einen Punkt außerhalb der Stützen gemein hätten, was wir ausschließen.

Zerlegen wir im besonderen das Innere einer brauchbaren, also sich selbst nicht schneidenden Kurve auf zwei Arten in Normalbereiche nach x, so haben die Grenzbögen je zweier von ihnen keinen Punkt außerhalb der Stützen gemein; irgend zwei Normalbereiche, die bei der einen und anderen Teilung auftreten, haben also nur Stützstrecken oder einen Normalbereich nach x oder keinen Punkt gemein. Die beiden Teilungen können daher so aus einer dritten abgeleitet werden, daß aus den bei dieser auftretenden Normalbereichen die bei den ersten Teilungen auftretenden zusammengesetzt werden.

II. Als allgemeineres Integrationsgebiet können wir jetzt das Innengebiet $\mathfrak{G}$ einer brauchbaren Kurve $\mathfrak{K}$ nehmen, die, wie meist bei den allgemeinen Sätzen des § 82, auch aus mehreren geschlossenen Zügen zusammengesetzt sein kann. Man zerlege das Gebiet $\mathfrak{G}$ nach § 82 in zweiseitige Normalbereiche $\mathfrak{N}$, deren Begrenzung aus Teilen

der Kurve $\mathfrak{L}$ und Stützen $x = \text{const.}$ bestehen; dann kann das Integral über die Fläche $\mathfrak{S}$ durch die Gleichung

$$(1)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{S}} f(x, y)\, dx\, dy = \sum \iint\limits_{\mathfrak{N}} f(x, y)\, dx\, dy$$

erklärt werden, in der rechts über alle Bereiche $\mathfrak{N}$ summiert wird. Man sieht dann sofort, daß auch bei diesen allgemeineren Doppelintegralen die Integrationen vertauscht werden können, da dies auf der rechten Seite nach § 98 erlaubt ist.

Es fragt sich noch, ob der Wert des Integrals durch die Wahl der Bereiche $\mathfrak{N}$ beeinflußt wird. Das ist zunächst nicht der Fall, wenn für $\mathfrak{S}$ ein Normalbereich nach x, etwa $\mathfrak{M}$ genommen wird. Geht in ihm x von x_0 bis X, und wie in § 98 jedem x entsprechend y von y_0 bis Y, so wird die Teilung in engere Bereiche dadurch zustande kommen, daß die Strecke $x_0 \dots X$ in Teilstrecken $x_0 \dots x_1$, $x_1 \dots x_2, \dots x_k \dots X$ zerfällt; die Summe auf der rechten Seite der Gleichung (1) wird demnach, wenn $X = x_{k+1}$ ist,

$$(2)\qquad \sum_{\nu}^{0,k} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\, dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\, dy = \iint\limits_{\mathfrak{M}} f(x, y)\, dx\, dy,$$

also offenbar von der Wahl der Teilpunkte x_ν unabhängig. Wenn man aber überhaupt das Gebiet $\mathfrak{S}$ auf zwei Arten in Normalbereiche nach x teilt, so können diese nach I. aus den Bereichen einer dritten Teilung derselben Art zusammengesetzt werden. Auf letztere die Formel (2) anwendend, sehen wir sofort, daß die beiden ersten Teilungen denselben Wert des Integrals (1) ergeben müssen.

III. Werden weiter zwei Punkte der Randlinie $\mathfrak{L}$, etwa P_1 und P_2, durch eine im Innengebiet der Kurve $\mathfrak{L}$ verlaufende brauchbare Kurve $\mathfrak{K}$ verbunden, die mit $\mathfrak{L}$ außer P_1 und P_2 keinen Punkt gemein hat, so bildet diese Kurve mit jedem der beiden Teile, in die $\mathfrak{L}$ durch P_1 und P_2 zerlegt wird, eine neue brauchbare Kurve, $\mathfrak{L}_1$ mit dem einen, $\mathfrak{L}_2$ mit dem anderen, und sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die Innengebiete derselben, so setzt sich $\mathfrak{S}$ einfach aus $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zusammen; denn da die Schnittpunkte der Kurve $\mathfrak{K}$ mit einer Geraden $x = \text{const.}$ nur den Innenstrecken derselben bezüglich der Kurve $\mathfrak{L}$ angehören, so ist jede dieser Strecken entweder Innenstrecke eines der Gebiete $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, wenn sie nämlich von $\mathfrak{K}$ nicht geschnitten wird, oder zerfällt, wenn dies geschieht, in eine endliche Anzahl von Strecken, die teils dem Gebiet $\mathfrak{S}_1$, teils dem Gebiet $\mathfrak{S}_2$ angehören; die Gerade $x = \text{const.}$ hat ja mit $\mathfrak{K}$ nur endlich viele Punkte gemein. Hiermit wird der behauptete Sachverhalt ersichtlich. Jeder Normalbereich der

Kurve $\mathfrak{L}$ zerfällt in endlich viele Normalbereiche der Kurven $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$; daraus folgt

$$(3)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{G}_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathfrak{G}_2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

und entsprechend zerfallen die Summanden der rechten Seite weiter, wenn man $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ebenso wie $\mathfrak{G}$ zerlegt.

IV. Die brauchbare Kurve $\mathfrak{L}$ (§ 82) kann bei vielen Sätzen durch ein System beliebig vieler solcher, etwa $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$, ersetzt werden, deren jede sich selbst nicht schneidet, wohl aber die anderen endlich oft schneiden darf. Jede von diesen hat ein Innengebiet, das in Normalbereiche nach x zerlegt werden kann; diese Bereiche können aufeinander übergreifen, und da jeder von ihnen durch Gerade $x = \text{const.}$ wieder in ebensolche Bereiche zerlegt wird, darf man annehmen, daß die inneren Normalbereiche aller Kurven $\mathfrak{L}_\nu$ durch dieselben Stützgeraden begrenzt werden, soweit sie über derselben Abszissenstrecke liegen; auch mögen diejenigen Geraden $x = \text{const.}$, auf denen Schnittpunkte zweier Kurven $\mathfrak{L}_\nu$ liegen, den Stützgeraden zugezählt werden. Alsdann haben Grenzbögen zweier Normalbereiche keinen Punkt außerhalb der Stützen gemein, die Bereiche also nach I. einen neuen ganzen Normalbereich, wenn sie überhaupt einen Punkt außerhalb der Stützen gemein haben. Jeder Punkt P, der zugleich k Normalbereichen der Kurven $\mathfrak{L}_\nu$ zusammengenommen außerhalb der Stützen angehört, liegt also in einem Normalbereich $\mathfrak{N}'$, der ebenfalls ganz diesen k Bereichen als Teil angehört. Je nachdem k ungerade oder gerade ist, nennen wir P einen inneren oder äußeren Punkt des Kurvensystems $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots)$, und es ist klar, daß hiernach das Innengebiet dieses Systems sich aus einer endlichen Anzahl von Normalbereichen $\mathfrak{N}'$ zusammensetzt.

Gehen wir die durch P gehende Gerade $x = \text{const.}$, mit großen negativen Ordinaten beginnend, im Sinne wachsender Ordinaten entlang, und haben wir, wenn P erreicht wird, h_ν mal die Kurve $\mathfrak{L}_\nu$ durchsetzt, so liegt P im Innern oder Außengebiet der Kurve $\mathfrak{L}_\nu$, je nachdem h_ν ungerade oder gerade ist. Je nachdem ferner unter den Zahlen h_ν eine ungerade oder gerade Zahl ungerader vorkommt, liegt P im Innern einer ungeraden oder geraden Zahl von Kurven $\mathfrak{L}_\nu$ und ist die Summe $h_1 + h_2 + \cdots$ ungerade oder gerade, ist also auch die Zahl k ungerade oder gerade. Der erweiterte Begriff des Innenpunktes stimmt also mit dem auf eine einzelne Kurve $\mathfrak{L}$ bezüglichen in dem Sinne überein, daß bei der betrachteten Bewegung längs der Geraden $x = \text{const.}$ ein Innenpunkt dann und nur dann

erreicht ist, wenn die Gesamtheit der Kurven $\mathfrak{L}_\nu$ eine ungerade Anzahl von Malen durchsetzt ist.

Unter dem Doppelintegral über das Innengebiet des Kurvensystems ($\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ...) verstehen wir die Summe

$$\sum \iint_{\cdots} f(x, y)\, dx\, dy,$$

erstreckt über alle Normalbereiche $\mathfrak{N}'$, die nach obiger Erklärung dem Innengebiet des Kurvensystems angehören.

V. Eine weitere Grundeigenschaft des Doppelintegrals ergibt sich aus der Form der Ausdrücke (1) und (2), wenn auf dem Gebiet $\mathfrak{G}$ durchweg die Beziehung $f(x, y) \geqq 0$ angenommen wird, ohne daß jedoch das Gleichheitszeichen überall gilt. Alsdann gilt, da $y_0 \leqq Y$, jedenfalls die Ungleichung

$$\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy \geqq 0, \tag{4}$$

und das Gleichheitszeichen gilt wieder nicht überall; denn ist $f(x, y)$ für irgend einen Wert von x auf der y-Strecke $y_0 \ldots Y$ einmal positiv, so ist das Integral (4) nach § 96 positiv, und dann folgt aus demselben Grunde dasselbe für das Integral (2), so daß unter den Summanden des Integrals (1) mindestens einer positiv ist; also folgt

$$\iint_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy > 0, \tag{5}$$

wenn der Integrand nicht auf dem ganzen Integrationsgebiet verschwindet.

Hieraus ergibt sich, wenn

$$A > f(x, y) > B,$$

also $A - f(x, y)$ und $f(x, y) - B$ positive Größen und Γ der Flächeninhalt des Gebiets $\mathfrak{G}$ ist,

$$\iint_{\mathfrak{G}} [A - f(x, y)]\, dx\, dy > 0, \quad A \iint_{\mathfrak{G}} dx\, dy > \iint_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dx,$$

$$A\Gamma > \iint_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy \geqq B\Gamma.$$

Daraus folgt weiter, wenn $|f(x, y)| < a$ angenommen wird,

$$\left| \iint_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy \right| < a\Gamma. \tag{6}$$

Diese Formel führt zu zwei wichtigen Ergebnissen.

Erstens sei $f(x, y, z)$ stetig in einem Gebiet der drei Unabhängigen x, y, z, in dem wir verbleiben, wenn der Punkt (x, y) das Gebiet $\mathfrak{G}$ und z eine Strecke $\mathfrak{S}$ durchläuft. Sind dann z und $z + h$ irgend zwei Stellen dieser Strecke, so gilt im ganzen Gebiet $\mathfrak{G}$ die Ungleichung

$$|f(x, y, z + h) - f(x, y, z)| < \varepsilon,$$

sobald $|h|$ unter einer passend gewählten Schranke liegt und ε beliebig klein vorgeschrieben ist; daraus folgt nach (5), wenn

$$J(z) = \iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y, z)\, dx\, dy$$

gesetzt wird,

$$|J(z + h) - J(z)| < \varepsilon\, \Gamma,$$

d. h. $J(z)$ ist auf der Strecke $\mathfrak{S}$ stetig, und entsprechendes gilt offenbar, wenn der Integrand außer den Integrationsveränderlichen mehrere Parameter wie z enthält.

Zweitens zerfalle $\mathfrak{G}$ in die Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$; die Integrale über diese drei Gebiete seien J, J_1, J_2, ihre Flächeninhalte Γ, Γ_1, Γ_2, also nach (3)

$$J = J_1 + J_2.$$

Die Umfangslinie des Gebiets $\mathfrak{G}_1$ hänge von einem Parameter t ab und gehe, wenn dieser dem Grenzwerte t_0 zustrebt, in die Linie $\mathfrak{L}$, die Umfangslinie des Gebiets $\mathfrak{G}$ über, wobei der Inhalt Γ_2 unendlich abnehme. Dann folgt nach (3), daß auch $\lim J_2 = 0$ wird, also $\lim J_1 = J$; in diesem Sinne ändert sich das Integral stetig mit dem Integrationsgebiet.

Zur Abschätzung von Flächeninhalten dient die Bemerkung, daß, wenn $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ einteilige geschlossene Kurven sind und $\mathfrak{L}_1$ im Innengebiet von $\mathfrak{L}$ verläuft, dieses dem Flächeninhalt nach größer ist als das Innengebiet der Kurve $\mathfrak{L}_1$.

VI. Eine weitere Folge der Ungleichung (5) ist der erste Mittelwertsatz für Doppelintegrale. Sei auf dem Gebiet $\mathfrak{G}$

$$\varphi(x, y) \geqq 0,$$

ohne daß das Gleichheitszeichen überall gilt, also nach (5)

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} \varphi(x, y)\, dx\, dy > 0.$$

Ist dann $f(x, y)$ auf dem Gebiet $\mathfrak{G}$ eine beliebige stetige Funktion, so kann man setzen

$$\iint f(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy = M \iint\limits_{\mathfrak{G}} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

oder

$$\iint [f(x,y) - M]\, \varphi(x,y)\, dx\, dy = 0. \tag{7}$$

Jetzt unterscheiden wir, ob das Gebiet $\mathfrak{G}$ in sich zusammenhängt oder nicht. Unter ersterer Eigenschaft verstehen wir, daß zwei Stellen des Gebiets $\mathfrak{G}$, sie seien (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2), durch eine ganz im Gebiet $\mathfrak{G}$ verlaufende stetige Kurve verbunden werden können; es gebe also zwei Funktionen $\varphi(s)$, $\psi(s)$, die auf der Strecke $s_1 \ldots s_2$ stetig sind und die Gleichungen

$$\xi_1 = \varphi(s_1), \quad \eta_1 = \psi(s_1), \quad \xi_2 = \varphi(s_2), \quad \eta = \psi(s_2)$$

liefern und so beschaffen sind, daß der Punkt $[\varphi(s), \psi(s)]$ immer dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört, wenn s auf der Strecke $s_1 \ldots s_2$ liegt. Wenn dann $f(\xi_1, \eta_1)$ und $f(\xi_2, \eta_2)$ verschiedenes Vorzeichen haben, so geht die stetige Funktion $f[\varphi(s), \psi(s)]$ von positiven zu negativen Werten über, indem s die Strecke $s_1 \ldots s_2$ in dem einen oder anderen Sinne durchläuft; sie verschwindet also einmal, d. h. im Gebiet $\mathfrak{G}$ verschwindet $f(x, y)$ einmal.

Das Gebiet $\mathfrak{G}$ hängt z. B. in sich zusammen, wenn der Umfang $\mathfrak{L}$ aus einem Stück besteht, oder aus den Stücken $\mathfrak{L}_0$ und $\mathfrak{L}_1$, von denen $\mathfrak{L}_1$ dem Innengebiet der für sich allein genommenen Kurve $\mathfrak{L}_0$ angehören. Dann wird $\mathfrak{L}_1$ von Innenstrecken der Kurve $\mathfrak{L}_0$, die in einer bestimmten Richtung laufen, etwa $x =$ const. geben, erreicht; diese sind, von $\mathfrak{L}_0$ ausgehend, Innenstrecken der Kurve $\mathfrak{L}$, solange nicht $\mathfrak{L}_1$ erreicht wird; diese Kurve wird also durch Innenstrecken der Kurve $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L}_0$ verbunden. Jeder Punkt des Gebiets $\mathfrak{G}$ kann aber innerhalb des ihn umfassenden Normalbereichs nach x, etwa längs einer Geraden $x =$ const. mit einer der Kurven $\mathfrak{L}_0$ und $\mathfrak{L}_1$ verbunden werden; man kann also irgend zwei Stellen des Gebiets $\mathfrak{G}$ stetig verbinden, indem man geradlinig zu einer der Kurven $\mathfrak{L}_\nu$ übergeht und dann diese Kurven selbst als Verbindung zwischen irgend zweien ihrer Punkte benutzt.

Im Falle eines zusammenhängenden Gebiets $\mathfrak{G}$ verschwindet also z. B. die Größe $f(x, y) - M$ einmal, wenn sie sowohl positiv wie negativ wird.

Wäre sie überall von Null verschieden, so hätte sie, weil stetig, überall dasselbe Vorzeichen, etwa das positive; dann wäre

$$[f(x,y) - M]\, \varphi(x,y) \geqq 0$$

auf dem Gebiet $\mathfrak{G}$, ohne daß das Gleichheitszeichen überall gälte; also folgte nach II.

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} [f(x,y) - M]\, \varphi(x,y)\, dx\, dy > 0,$$

was der Gleichung (5) widerspricht. Es gibt also in $\mathfrak{G}$ eine Stelle (ξ, η), derart, daß

$$M = f(\xi, \eta), \quad \iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta) \iint\limits_{\mathfrak{G}} \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

womit der Mittelwertsatz für ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ erreicht ist.

VII. Im besonderen sei $\varphi(x, y) = 1$; dann ist

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathfrak{G}} dx\, dy = \sum \iint\limits_{\mathfrak{N}} dx\, dy,$$

wo rechts wieder über alle Normalbereiche nach x, in die das Gebiet $\mathfrak{G}$ zerfällt, summiert werde. Für einen solchen Bereich ist aber nach § 98 das Integral

$$\iint\limits_{\mathfrak{N}} dx\, dy = F_{\mathfrak{N}}$$

der Flächeninhalt, positiv genommen; die Summe aller dieser Größen ist aber nach § 80 der Flächeninhalt des Gebiets $\mathfrak{G}$ oder $F_{\mathfrak{G}}$; danach ist

$$F_{\mathfrak{G}} = \sum F_{\mathfrak{N}} = \iint\limits_{\mathfrak{G}} dx\, dy,$$

und nach dem Mittelwertsatze

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta)\, F_{\mathfrak{G}}. \tag{8}$$

Jetzt werde das Gebiet $\mathfrak{G}$, das nicht zusammenhängend zu sein braucht, in beliebiger Weise, aber durch brauchbare Trennungslinien in beliebig viele Gebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_n$ zerlegt, deren jedes in sich zusammenhängt und deren Flächeninhalte $F_1, F_2, \ldots F_n$ seien. Dann ist nach II.

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\nu}^{1, n} \iint\limits_{\mathfrak{G}_\nu} f(x, y)\, dx\, dy,$$

also nach (8), wenn (ξ_ν, η_ν) eine Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}_\nu$ ist,

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\nu}^{1, n} f(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot F_\nu.$$

Liegt im besonderen jedes Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ im Innern eines den Bezugsachsen parallel gestellten Quadrats von der Seitenlänge δ, so liegt der Abstand zweier Punkte des Gebiets $\mathfrak{G}_\nu$, z. B. eines beliebigen Punktes (x_ν, y_ν) und des vorhin eingeführten (ξ_ν, η_ν) nicht über $\delta\sqrt{2}$; durch passende Wahl von δ kann man also wegen der Stetigkeit der

Funktion $f(x, y)$ bewirken, daß, wenn ε beliebig klein positiv gegeben ist, die Ungleichung

$$|f(x_\nu, y_\nu) - f(\xi_\nu, \eta_\nu)| < \varepsilon$$

gilt; aus ihr folgt

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_\nu^{1, n} f(x_\nu, y_\nu)\, F_\nu + \lambda\, \varepsilon\, \delta^2,$$

wobei $|\lambda| \leqq 1$. Die erste Summe rechts kann also dem Integral beliebig nahe gebracht werden und man findet

$$(9) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy = \lim \sum_\nu^{1, n} f(x_\nu, y_\nu)\, F_\nu,$$

wobei das Zeichen lim so zu verstehen ist, daß die Flächenmaße aller Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ gleichzeitig unendlich abnehmen, während die Stelle (x_ν, y_ν) im Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ beliebig gewählt werden darf.

Die Formel (9) gibt die anschauliche Bedeutung des Doppelintegrals als Grenze einer Summe von kleinen Elementen des Integrationsgebiets, jedes multipliziert mit einem in ihm erreichten Wert des Integranden $f(x, y)$. Wird letzterer als Dichtigkeit einer Massenverteilung bezeichnet, so gibt das Integral die Gesamtmasse des ebenen Gebiets $\mathfrak{G}$; die Formel (9) gibt den genauen Sinn dieser Aussage. Zugleich kann die Formel

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}_\nu} f(x, y)\, dx\, dy = F_\nu f(\xi_\nu, \eta_\nu)$$

dazu dienen, die Dichtigkeit in einem Punkte zu definieren, wenn die Masse auf jedem endlichen Teil des Gebiets $\mathfrak{G}$ als gegeben angesehen wird; nehmen wir z. B. für $\mathfrak{G}_\nu$ den Kreis mit dem Radius ϱ um den Punkt (x_0, y_0), so ist offenbar $F_\nu = \pi\, \varrho^2$ und die Dichtigkeit

$$f(x_0 y_0) = \lim_{\varrho = 0} \frac{1}{\pi\, \varrho^2} \iint\limits_{\mathfrak{G}_\nu} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Als Anwendung betrachten wir die Schwerpunkte und Trägheitsmomente ebener mit veränderlicher Dichtigkeit belegter Scheiben. Sind m_ν beliebige Massen, d_ν ihre Abstände von einer Geraden, z. B. der x-Achse, positiv nach oben, negativ nach unten gerechnet, so ist

$$\eta = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$$

die Schwerpunktsordinate. Ersetzen wir die Massen m_ν durch die Flächenteile F_ν bei einer mit der Dichtigkeit $f(x, y)$ belegten Scheibe $\mathfrak{G}$,

so wird der Begriff der Schwerpunktshöhe auf das Gebiet $\mathfrak{G}$ offenbar in natürlicher Weise übertragen, indem wir in der Formel (9) den Wert $y f(x, y)$ für f und ξ^0, η^0 für ξ, η schreiben und setzen

$$\eta = \frac{\sum F_\nu \eta_\nu^0 f(\xi_\nu^0, \eta_\nu^0)}{\sum F_\nu f(\xi_\nu, \eta_\nu)} = \iint\limits_{\mathfrak{G}} y f(x, y)\, dx\, dy : \iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy;$$

ebenso ist die Schwerpunktsabszisse

$$\xi = \iint\limits_{\mathfrak{G}} x f(x, y)\, dx\, dy : \iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Ist die Dichtigkeit konstant, $f(x, y) = 1$, so folgt

$$\eta = \iint\limits_{\mathfrak{G}} y\, dx\, dy : \iint\limits_{\mathfrak{G}} dx\, dy, \quad \xi = \iint\limits_{\mathfrak{G}} x\, dx\, dy : \iint\limits_{\mathfrak{G}} dx\, dy.$$

Sind ferner e_ν die Abstände der Massen m_ν von einer Achse, so ist

$$\sum m_\nu e_\nu^2$$

das Trägheitsmoment des Massensystems bezüglich dieser Achse; ist sie die x-Achse und liegen die Massen in der xy-Ebene, so ist als Trägheitsmoment der Scheibe $\mathfrak{G}$ offenbar anzusetzen

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} y^2 f(x, y)\, dx\, dy;$$

steht die Achse im Anfangspunkte auf der xy-Ebene senkrecht, so nimmt man

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} (x^2 + y^2) f(x, y)\, dx\, dy.$$

VIII. Die Gaußsche Integraltransformation nach § 98, (2), (3) ist leicht auf das Gesamtgebiet $\mathfrak{G}$ zu übertragen. Sind nämlich $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ zwei der zweiseitigen Normalbereiche, in die das Gebiet $\mathfrak{G}$ zerfällt, und sind N_1 und N_2 die äußeren Normalen ihrer Umfänge, die wir $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ nennen, und haben diese eine Strecke $\mathfrak{T}$ gemein, so haben die Integrale

$$(10) \qquad \int\limits_{\mathfrak{U}_1} P \cos(x N_1)\, ds, \quad \int\limits_{\mathfrak{U}_2} P \cos(x N_2)\, ds$$

die Summanden

$$\int\limits_{\mathfrak{T}} P \cos(x N_1)\, ds, \quad \int\limits_{\mathfrak{T}} P \cos(x N_2)\, ds,$$

und diese heben sich, da auf ihnen N_1 und N_2 entgegengesetzte Richtungen bedeuten, also die Gleichungen

$$\cos(x N_1) = -\cos(x N_2), \quad \cos(y N_1) = -\cos(y N_2)$$

gelten. Addiert man also alle Integrale wie (10), so fallen die Integrationsstrecken wie $\mathfrak{T}$ heraus, und es bleibt nur die Integration über Teile der Kurve $\mathfrak{L}$ übrig. Auf dieser erhält man aber nach § 82, V. überall den positiven Gesamtumlaufssinn, wenn man jeden der Normalbereiche positiv umkreist; die auf alle Normalbereiche erstreckte Summe vereinfacht sich also nach der Formel

$$\sum_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{U}} P \cos(xN)\, ds = \int_{\mathfrak{L}} P \cos(xN)\, ds. \tag{11}$$

Da nun

$$\iint_{\mathfrak{G}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \sum_{\mathfrak{R}} \iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy,$$

so gibt die auf die zweiseitigen Normalbereiche angewandte Gaußsche Integraltransformation nach (11)

$$\iint_{\mathfrak{G}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \sum_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{U}} P \cos(xN)\, ds = \int_{\mathfrak{L}} P \cos(yN)\, ds = -\int_{\mathfrak{L}} P\, dx.$$

Ebenso ergibt sich

$$\iint_{\mathfrak{G}} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\mathfrak{L}} Q \cos(Nx)\, ds = \int_{\mathfrak{L}} Q\, dy,$$

womit die gewünschte Verallgemeinerung erzielt ist.

§ 100. Wechsel der Veränderlichen in Doppelintegralen.

I. In ein Doppelintegral nach x und y können neue Veränderliche u, v, die mit jenen durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \tag{1}$$

verbunden sind, unter folgenden Voraussetzungen eingeführt werden. Sei in der uv-Ebene ein beliebiges Gebiet $\mathfrak{G}_0$ abgegrenzt mit der brauchbaren Randlinie $\mathfrak{R}_0$; durchläuft der Punkt (u, v) das Gebiet $\mathfrak{G}_0$, so seien die Funktionen φ, ψ und ihre Teilableitungen φ_u, φ_v, ψ_u, ψ_v stetig, und der nach (1) bestimmte Punkt (x, y) gehöre in der xy-Ebene einem Gebiet $\mathfrak{G}$ an, dessen Randlinie $\mathfrak{R}$ ebenfalls brauchbar sei, d. h. eine Kurve $\mathfrak{L}$ nach § 82. Durchläuft der Punkt (u, v) die Linie $\mathfrak{R}_0$ im positiven Sinne, so durchlaufe der Punkt (x, y) die Linie $\mathfrak{R}$ in demselben Sinne, soweit er nicht ruht; die Beziehung beider Punkte braucht nicht eindeutig umkehrbar zu sein.

Nun sei im Gebiet $\mathfrak{G}$

$$f(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

wobei P eine stetige Ableitung auch nach x besitze; dies kann z. B., wenn $\mathfrak{G}$ ein Normalbereich nach x ist und $f(x, y)$ stetige erste Ableitungen besitzt, nach § 98 stets erreicht werden; es sei das Doppelintegral

$$\iint_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathfrak{R}} P\, dx$$

zu bilden, wobei $\mathfrak{R}$ am Integralzeichen wie stets die positiv durchlaufene Kurve bedeute. Dann ergibt sich nach der allgemeinen Substitutionsformel der einfachen bestimmten Integrale [§ 79, (6)]

$$\int P\, dx = \int P(\varphi, \psi)(\varphi_u\, du + \varphi_v\, dv);$$

genauer kann man bei der festgesetzten Beziehung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ schreiben

$$\int_{\mathfrak{R}} P\, dx = \int_{\mathfrak{R}_0} P(\varphi_u\, du + \varphi_v\, dv). \tag{2}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann nach der Gaußschen Integraltransformation umgewandelt werden; man erhält nach § 99, VIII.

$$\int_{\mathfrak{R}_0} P\, \varphi_u\, du = \iint_{\mathfrak{G}_0} \frac{\partial (P\varphi_u)}{\partial v}\, du\, dv,$$

$$-\int_{\mathfrak{R}_0} P\, \varphi_v\, dv = \iint_{\mathfrak{G}_0} \frac{\partial (P\varphi_v)}{\partial u}\, du\, dv,$$

also nach (2)

$$\int_{\mathfrak{R}} P\, dx = \iint_{\mathfrak{G}_0} \left(\frac{\partial (P\varphi_u)}{\partial v} - \frac{\partial (P\varphi_v)}{\partial u}\right) du\, dv. \tag{3}$$

Nun ist, da P stetige Ableitungen nach x und y haben soll,

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial x}\varphi_v + \frac{\partial P}{\partial y}\psi_v = \frac{\partial P}{\partial x}\varphi_v + f(x, y)\,\psi_v,$$

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial x}\varphi_u + \frac{\partial P}{\partial y}\psi_u = \frac{\partial P}{\partial x}\varphi_u + f(x, y)\,\psi_u;$$

diese Werte in die Gleichung (3) eingesetzt, ergeben, da $\partial P/\partial x$ und $\varphi_{uv} = \partial^2 \varphi/\partial u\, \partial v$ wegfallen,

$$\int_{\mathfrak{R}} P\, dx = \iint_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathfrak{G}_0} f(x, y)(\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u)\, du\, dv, \tag{4}$$

womit die gewünschte Verwandlungsformel hergestellt ist.

Setzt man im besonderen $f(x, y) = 1$, so ergibt sich

$$(5) \qquad \iint dx\,dy = \iint_{\mathfrak{S}_0} (\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u)\, du\, dv,$$

womit der Flächeninhalt des Gebiets $\mathfrak{S}$ in u und v ausgedrückt ist.

II. Die Voraussetzung, daß die positiven Umlaufssinne auf den Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ einander entsprechen, kann durch eine andere ersetzt werden.

Setzt man in § 23 etwa $z_1 = z_2 = 0$, so daß $x_3 = y_3 = 0$, $z_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$ wird, so geht die Strecke OP_3 in der Richtung der positiven oder negativen z-Achse, je nachdem $z_3 > 0$ oder $z_3 < 0$; dabei sind die Strecken OP_1, OP_2, OP_3 immer wie die Koordinatenachsen in der gewöhnlichen Folge orientiert. Die Strecke OP_1 mit den Komponenten x_1, y_1 in der xy-Ebene liegt also zu der Strecke OP_2 mit den Komponenten x_2, y_2 wie die x-Achse zur y-Achse oder umgekehrt, je nachdem $x_1 y_2 - x_2 y_1$ positiv oder negativ ist.

Diese Bemerkung wenden wir an, indem wir $x_1 = \varphi_u\, du$, $y_1 = \psi_u\, du$, $x_2 = \varphi_v\, dv$, $y_2 = \psi_2\, dv$ setzen und du sowie dv positiv nehmen. Dann läuft die erstere Strecke längs der Tangente einer Kurve

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0), \quad v_0 = \text{const.},$$

und zwar im Sinne wachsender Werte von u; die zweite jener Strecken steht in entsprechender Beziehung zu einer Kurve

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad u_0 = \text{const.},$$

und zur Richtung wachsender v. Nimmt man in der ersten Kurve die Stelle $u = u_0$, in der zweiten $v = v_0$, so fallen beide zusammen und die erste jener Strecken liegt zur zweiten ebenso oder entgegengesetzt wie die x-Achse zur y-Achse, je nachdem die Funktionaldeterminante

$$D(u, v) = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$$

an der Stelle $u = u_0$, $v = v_0$ positiv oder negativ ist.

Allgemeiner möge an irgend einer Stelle der uv-Ebene durch du, dv eine Richtung d, durch $d_1 u$, $d_1 v$ eine andere d_1 gekennzeichnet werden; sie entsprechen den Übergängen vom Punkte (u, v) zu den Punkten $(u + du,\ v + dv)$ und $(u + d_1 u,\ v + d_1 v)$. Bildet man die entsprechenden Differentiale

$$dx = \varphi_u du + \varphi_v dv, \qquad dy = \psi_u du + \psi_v dv,$$
$$d_1 x = \varphi_u d_1 u + \varphi_v d_1 v, \qquad d_1 y = \psi_u d_1 u + \psi_v d_1 v,$$

so geben Fortgänge in den Richtungen d und d_1 auf der xy-Ebene entsprechende Fortgänge in der Richtung der Strecken mit den Komponenten (dx, dy) und (d_1x, d_1y), die wir d' und d_1' nennen. Nun gilt die Gleichung

$$dx\,d_1y - dy\,d_1x = (\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u)(du\,d_1v - d_1u\,dv);$$

die Richtungen d' und d_1' liegen also ebenso oder entgegengesetzt wie die Richtungen d und d_1 zueinander, je nachdem $\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u$ positiv oder negativ ist. Sei etwa d die positive Fortgangsrichtung auf $\mathfrak{R}_0$ in irgend einem Punkte, d_1 die Richtung einer von diesem aus in das Innengebiet $\mathfrak{G}_0$ hineingehenden Kurve $\mathfrak{K}$; ist $\mathfrak{K}'$ die entsprechende Kurve in der xy-Ebene, so ist d' die entsprechende Richtung des Umfangs $\mathfrak{R}$ und d_1' die Anfangsrichtung der Kurve $\mathfrak{K}'$, die in das Innere des Gebiets $\mathfrak{G}$ hineingeht. Insbesondere liegt also die innere Normale der Kurve $\mathfrak{R}_0$, wo sie eindeutig bestimmt ist, d. h. außerhalb etwaiger Ecken, zur positiven Fortgangsrichtung ebenso oder entgegengesetzt wie die entsprechenden Richtungen in der xy-Ebene, je nachdem die Größe $\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u$ positiv oder negativ ist. Wird nun $\mathfrak{R}_0$ positiv durchlaufen, so liegt die innere Normale zur Fortgangsrichtung der Tangente wie die v-Achse zur u-Achse; entsprechendes gilt in der xy-Ebene; also entsprechen sich die positiven Umlaufssinne der Kurven $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}$, wenn die Funktionaldeterminante $D(u, v)$ im ganzen Gebiet $\mathfrak{G}_0$ positiv ist.

Unter dieser Voraussetzung also gilt die Gleichung (4), ohne daß betreffs der Sinne von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ die frühere Voraussetzung gemacht zu werden braucht.

Jetzt kann die Formel (4) auch hinsichtlich der Voraussetzung $f(x, y) = \partial P/\partial y$ verallgemeinert werden. Ist das Gebiet $\mathfrak{G}$ kein Normalbereich $\mathfrak{G}'$ nach x, so zerlege man es in solche. Wir nehmen ferner an, daß die Geraden $x = \text{const.}$ brauchbaren Kurven der uv-Ebene entsprechen, so daß die Gebiete $\mathfrak{G}_0'$, denen die Normalbereiche $\mathfrak{G}'$ entsprechen, als Integrationsgebiete brauchbar sind. Dann kann man die Gleichung (4) für alle Gebietspaare $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}_0'$ bilden und addieren; es ergibt sich nach § 99, II. die allgemeine Formel

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{G}_0} f(\varphi, \psi)(\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u)\,du\,dv. \tag{6}$$

Bleiben alle übrigen Voraussetzungen, ist aber $D(u, v) < 0$, so setze man $u = -u_1$; dann ist

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u_1, v)} = -\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -D(u, v) > 0;$$

man braucht also nur $-u$ für u als eine der neuen Unabhängigen einzuführen, um wieder auf den vorigen Fall zurückzukommen.

Will man von der Differenzierbarkeit der Funktion $f(x, y)$ absehen, so wende man die Formel (9) des § 99 in der uv-Ebene an, indem man $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_\nu$ durch die Gebiete $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_{\nu 0}$ ersetzt, denen jene nach den Gleichungen (1) entsprechen; ersetzt man ferner $f(x, y)$ durch $f(\varphi, \psi)\, D(u, v)$, so ergibt sich

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}_0} f(\varphi, \psi)\, D(u, v)\, du\, dv = \sum^{1,n} \iint\limits_{\mathfrak{G}_{\nu 0}} f(\varphi, \psi)\, D(u, v)\, du\, dv.$$

Auf jedes Integral der rechten Seite kann man, wenn $D(u, v) \gtreqless 0$, den Mittelwertsatz anwenden und den Mittelwert der Größe $f(\varphi, \psi)$ durch $f(\xi_\nu, \eta_\nu)$ ersetzen, indem durch (ξ_ν, η_ν) wieder eine Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}_\nu$ bezeichnet wird; ist F_ν der Flächeninhalt desselben, so gibt die Inhaltsformel (5)

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}_0} f(\varphi, \psi)\, D(u, v)\, du\, dv = \sum^{1,n} F_\nu\, f(\xi_\nu, \eta_\nu).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung nähert sich nach § 99, (9), wenn die Flächeninhalte aller Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ unendlich abnehmen, dem Grenzwert

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dx\, dy;$$

dieser ist also der linken Seite der letzten Gleichung gleich, womit die Formel (6) abermals und in allgemeinerem Sinne, $f(x, y)$ nur als stetige Funktion vorausgesetzt, bewiesen ist.

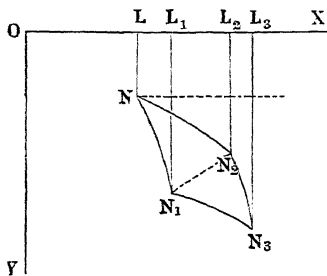
Fig. 82.

III. Die geometrische Deutung der Formel (6) ist leicht. Sei N in Fig. 82 ein beliebiger Punkt (x, y), NN_1 und NN_2 die durch ihn gehenden Kurven $u =$ const. und $v =$ const.; N_ν habe die Koordinaten x_ν, y_ν, und mögen N, N_1 N_2 zu den Wertepaaren

$$(u, v), \quad (u + du, v), \quad (u, v + dv)$$

gehören. Dann ist bis auf Glieder von der Form $\varrho\, du$ und $\varrho_1\, dv$, in denen ϱ und ϱ_1 mit du und dv zugleich verschwinden,

$$x \;\; - x = \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad y_1 - y = \frac{\partial y}{\partial u} du,$$

$$x_2 - x = \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad y_2 - y = \frac{\partial y}{\partial v} dv;$$

der Inhalt des Parallelogramms $NN_1N_2N_3$ ist also nach § 23

$$p = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv,$$

bis auf ein Glied von der Form $\varrho_2\, du\, dv$, in dem ϱ_2 die Eigenschaften der Größen ϱ und ϱ_1 teilt. Nach § 99, (9) erhält man also einen Annäherungswert des Integrals in der Form

$$\sum f(x, y)\, p;$$

schärfere Untersuchung des Grenzüberganges ist unnötig, da es sich nur um Erläuterung handelt.

Denkt man sich nun das Integrationsgebiet in der xy-Ebene durch Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ in Parallelogramme geteilt, so kann man erst nach u integrieren, d. h. alle Summanden $f(x, y)p$

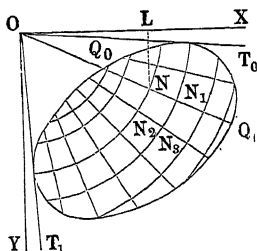
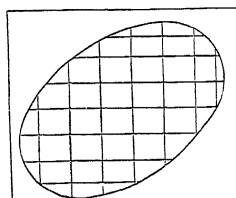



Fig. 83. Fig. 84.

bilden, in denen v einen festen Wert hat, und die erhaltenen Summen addieren, oder die Rollen der Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ vertauschen. Sind u und v z. B. Polarkoordinaten, also $x = u \cos v$ und $y = u \sin v$, so teilt man nach Fig. 83 und setzt als Inhalt des Parallelogramms $NN_1N_3N_2$ an

$$p = NN_1 \,.\, NN_2 = u\, du\, dv = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv. \tag{7}$$

Sind u und v rechtwinklige Koordinaten, so teilt man nach Fig. 84 in Rechtecke von bekannter Lage. In beiden Fällen werden die beiden möglichen Folgen der Integrationen dadurch erläutert, daß man in Fig. 84 erst die den aufrechtstehenden Rechtecksstreifen entsprechenden Summen, und dann die Summe dieser Summen bildet, oder mit den wagerechten Streifen beginnt. In Fig. 83 summiert man erst längs der sektorartigen Säulen, und summiert die erhaltenen Summen; oder man beginnt mit den Kreisringstücken.

IV. Aus der Gleichung (7) ist ersichtlich, daß bei Polarkoordinaten die Funktionaldeterminante $D(u, v)$ verschwinden, jedoch nicht negativ werden kann; in der gewöhnlichen Bezeichnung wäre ja

$$v = \theta, \quad u = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und bedenklich ein Gebiet, das den Anfangspunkt $r = 0$ umfaßt.

Sei z. B. $\mathfrak{S}$ ein Kreissektor OAB, OA längs der x-Achse gelegen, $\measuredangle AOB = \alpha$, $OA = a$; setzt man $u = r$, $v = \theta$, so entspricht der Strecke OA in der uv-Ebene eine gleiche Strecke $\theta = 0$; dem Kreisbogen AB entspricht die Strecke $u = \alpha$, auf der v von 0 bis α wächst; der Strecke BO entspricht die Strecke vom Punkte $u = a$, $v = \alpha$ bis zum Punkte $u = 0$, $v = \alpha$. Der Strecke von diesem bis zum Anfangspunkte $u = v = 0$ entspricht in der xy-Ebene der Punkt O allein. $\mathfrak{R}_0$ ist also hier ein Rechtecksumfang, dessen einer Seite nur ein Punkt auf $\mathfrak{R}$ entspricht; hier tritt also der Fall ein, der im Absatz I ausdrücklich vorbehalten wurde, daß die Umfänge $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ einander nicht eindeutig umkehrbar entsprechen. Die Transformationsformel folgt also hier aus der allgemeinen Betrachtung I.

V. Wir betrachten einige Beispiele.

a) Der Flächeninhalt in Polarkoordinaten ist nach (7) und (5)

$$\iint u\,du\,dv = \iint r\,dr\,d\theta;$$

für den Fall des Kreissektors ist $r = f(\theta) = c$ ein Festwert; in der uv-Ebene entspricht ihm das Rechteck

$$0 \leqq \theta \leqq \alpha, \quad 0 \leqq r \leqq c;$$

also ergibt sich als Flächeninhalt des Sektors

$$\iint r\,dr\,d\theta = \int_0^\alpha d\theta \int_0^c r\,dr = \frac{c^2\alpha}{2}.$$

b) Als weiteres Beispiel, das zur Bestimmung eines wichtigen uneigentlichen einfachen Integrals führt, betrachten wir das Integral

$$\Phi(a) = \int_0^a dx \int_0^a e^{-x^2-y^2}\,dy = \int_0^a e^{-x^2}\,dx \int_0^a e^{-y^2}\,dy = \left[\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right]^2,$$

das als Doppelintegral über das Quadrat mit den Seiten $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = a$ gebildet ist, und das über den Viertelkreis

$$x^2 + y^2 \leqq c^2, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

gebildete Integral desselben Integranden

$$\Psi(c) = \iint e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy;$$

da der Integrand positiv ist, hat man nach § 99, II. die erste oder zweite der Ungleichungen

$$(8) \qquad \Psi(c) < \Phi(a), \qquad \Psi(c) > \Phi(a),$$

je nachdem $c < a$ oder $c > a\sqrt{2}$, der Quadrant im Innern des Quadrats liegt oder umgekehrt. Das Integral $\Psi(c)$ wird nun in Polarkoordinaten nach dem Obigen, indem $r\,dr\,d\theta$ für $dx\,dy$ geschrieben wird, r von 0 bis c und θ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ läuft,

$$\Psi(c) = \iint e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^c c^{-r^2} r\,dr.$$

Das Doppelintegral wird also das Produkt zweier einfacher:

$$\Psi(c) = \frac{\pi}{2}\int_0^c e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-c^2});$$

daraus folgt

$$\lim_{c=\infty} \Psi(c) = \frac{\pi}{4}.$$

Nun sei

$$c_1 < a, \qquad a\sqrt{2} < c_2,$$

also nach der an die Ungleichungen (8) geknüpften Bemerkung

$$\Psi(c_1) < \Phi(a) < \Psi(c_2);$$

dann folgt, indem man c_1 unendlich anwachsen läßt,

$$\lim_{a=\infty} \Phi(a) = \lim_{c_1=\infty} \Psi(c_1) = \frac{\pi}{4}.$$

Daraus ergibt sich für das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{a=\infty} \sqrt{\Phi(a)}$$

der endliche Wert

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

c) Sind die Integrationen so zu leiten, daß bei positiven x und y

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1$$

bleibt, so bewegt sich der Punkt (x, y) innerhalb eines Ellipsenquadranten, und man erhält

$$V = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Indem man erst $x = a\xi$, nachher $y = b\eta$ einsetzt, kommt man auf ein neues Integral, welches an die Bedingung $\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$ gebunden ist, nämlich

$$V = ab \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} f(a\xi, b\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Dieses läßt sich weiter behandeln, indem man x, y durch $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$ ersetzt; hiernach wird

$$(9) \qquad \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x, y)\, dx\, dy = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 f(ar\cos\theta,\, br\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr.$$

d) Wenn sich die Integrationen auf alle positiven, der Bedingung

$$0 \leqq x + y \leqq c$$

genügenden x und y beziehen, so bewegt sich der Punkt (x, y) innerhalb des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks AOB (Fig. 85, $OA = OB = c$) und es ist

$$V = \int_0^c \int_0^{c-x} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Fig. 85.

Durch N legen wir $ST \parallel AB$, ziehen SM und setzen $OS = OT = u$, $\angle\, OSM = \omega$; es ist dann

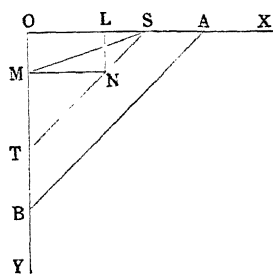
$$OL = x = u - u\operatorname{tg}\omega, \qquad OM = y = u\operatorname{tg}\omega$$

oder wenn zur Abkürzung $\operatorname{tg}\omega = v$ gesetzt wird,

$$x = u - uv, \qquad y = uv.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = u.$$

Um ferner den Punkt N in dem Dreiecke AOB herumzuführen, braucht man nur u von 0 bis c, ω von 0 bis $\frac{1}{4}\pi$, d. h. v von 0 bis 1

auszudehnen; dem Dreieck AOB entspricht in der uv-Ebene ein Rechteck: beides sind zweiseitige Normalbereiche. Somit folgt

$$(10)\qquad \int_0^c\int_0^{c-x} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^c\int_0^1 f(u-uv, uv)\,u\,du\,dv.$$

Als Anwendung hat man z. B. die Gleichung

$$\int_0^c\int_0^{c-x} e^{k(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_0^c\int_0^1 e^{ku^2}\,u\,du\,dv = \int_0^c e^{ku^2}\,u\,du = \frac{e^{kc^2}-1}{2k},$$

wo in der zweiten Form beide Integrationen ausführbar sind, während sich in der ersten Form schon die auf y bezügliche Integration nicht in endlicher Gestalt bewirken läßt. — Ist etwas allgemeiner die Grenzbedingung vorgeschrieben, daß bei positiven x und y

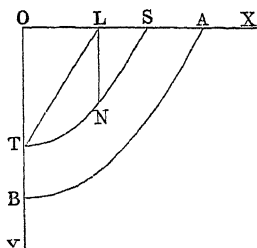



Fig. 86.

$$0 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1$$

bleiben soll, in welchem Falle das Dreieck AOB die ungleichen Katheten $OA = a$ und $OB = b$ besitzt, so nehme man erst $y = b\eta$, dann $x = a\xi$, und benutze schließlich die Formel (10), indem man x, y, c durch $\xi, \eta, 1$ ersetzt; dies gibt

$$\int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} f(x, y)\,dx\,dy = ab\int_0^1\int_0^1 f[au(1-v), buv]\,u\,du\,dv.$$

e) Die Bedingung, daß bei positiven x und y

$$0 \leqq \frac{x^2}{c} + y \leqq c$$

sein soll, entspricht dem Falle, wo der Punkt xy innerhalb eines Parabelabschnittes AOB bleibt; die Parabelachse fällt mit der y-Achse zusammen, $AO = BO$ ist der Parameter der Parabel (Fig. 86) und

$$V = \int_0^c\int_0^{c-\frac{x^2}{c}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Legt man durch N eine ähnliche Parabel mit dem Parameter $OS = OT = u$ und setzt $\angle\ OTL = \omega$, so hat man

$$x = u \operatorname{tg}\omega, \quad y = u - \frac{x^2}{u} = u(1-\operatorname{tg}^2\omega),$$

oder wenn $\operatorname{tg}\omega = -v$ ist,

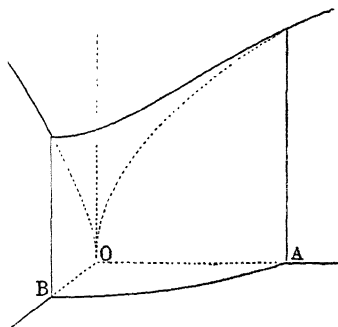
$$x = -uv \qquad y = u(1 - v^2),$$

wo nun u und v als die neuen Koordinaten von N gelten. Hieraus folgt

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = u(1 + v^2).$$

Um ferner N in dem Parabelsegmente herumzuführen, muß u von 0 bis c, ω von $\frac{1}{4}\pi$ bis 0 oder v von 1 bis 0 ausgedehnt werden: in der uv-Ebene hat man wieder ein Rechteck und man erhält

$$\int_0^c dx \int_0^{c - \frac{x^2}{c}} f(x, y)\, dy = \int_0^c du \int_0^1 f(uv, u - uv^2)\, u(1 + v^2)\, dv.$$

Fig. 87.

Wenn die ursprünglichen Integrationen auf alle positiven x und y zu beziehen sind, welche der etwas allgemeineren Bedingung

$$0 \leqq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} \leqq 1$$

genügen, wobei die Strecken $AO = a$ und $BO = b$ ungleich sind, so nimmt man erst $x = a\xi$, $y = b\eta$ und wendet dann die vorige Formel an; man erhält auf diesem Wege

$$\int_0^a dx \int_0^{b\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} f(x, y)\, dy = ab \int_0^1 du \int_0^1 f[auv, bu(1 - v^2)]\, u(1 + v^2)\, dv.$$

Als gelegentliche Anwendung bestimmen wir den Rauminhalt eines Zylinders von folgender Entstehung (Fig. 87). Die Grundfläche werde von einer Parabel AB begrenzt, deren Brennpunkt O und

deren Scheitel B sein möge, worin also $OB = b$, $OA = 2b$ ist; die obere Begrenzungsfläche des Raumes sei ein Drehparaboloid vierten Grades, nämlich

$$z^4 = k^2(x^2 + y^2),$$

welches entsteht, wenn eine mit dem Parameter k konstruierte Parabel um ihre Scheiteltangente rotiert. Es ist dann

$$V = \sqrt{k}\int_0^{2b} dx \int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{2b}\right)^2\right]} \sqrt[4]{x^2+y^2}\, dy$$

$$= 2b^2\sqrt{k}\int_0^1 du \int_0^1 \sqrt[4]{4b^2u^2v^2 + b^2u^2(1-v^2)^2}\, u(1+v^2)\, dv$$

$$= 2b\sqrt{bk}\int_0^1 du \int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt{1+v^2}\, u(1+v^2)\, dv,$$

d. h.

$$V = b^2\sqrt{bk}\,\frac{7\sqrt{2} + 3\lg(1+\sqrt{2})}{10} = 1{,}25436157 \,.\, b^2\sqrt{bk}.$$

f) Die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{11}$$

stellen konfokale Ellipsen und Hyperbeln dar, wenn

$$a^2 - b^2 = 1, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

was erreicht wird, wenn man setzt

$$a = \operatorname{Cof} u, \quad b = \operatorname{Sin} u, \quad \alpha = \cos v, \quad \beta = \sin v;$$

sieht man u, v als Unabhängige an, so sind die Linien $u =$ const. und $v =$ const. die bezeichneten Kegelschnitte. Setzt man

$$x = \operatorname{Cof} u \cos v, \qquad y = \operatorname{Sin} u \sin v,$$

so werden beide Gleichungen (11) erfüllt; der Punkt (x, y) ist Schnittpunkt einer Ellipse und einer Hyperbel der Scharen (11), u und v sind *elliptische Koordinaten*. Eine leichte Rechnung ergibt

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \operatorname{Sin}^2 u - \sin^2 v,$$

das Flächeninhaltsintegral ist also

$$\iint \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv = \iint \operatorname{Sin}^2 u\, du\, dv - \iint \sin^2 v\, du\, dv.$$

Dem Rechteck in der uv-Ebene, das von der Geraden $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$, $v = v_2$ begrenzt wird, also einem zweiseitigen

Normalbereich, entspricht in der xy-Ebene ein krummlinig begrenztes Viereck, dessen Seiten zwei Ellipsenbögen und zwei Hyperbelbögen aus der konfokalen Schar (11) sind. Der Inhalt dieser Figur ist also

$$F = \int_{u_1}^{u_2} d u \int_{v_1}^{v_2} (\mathfrak{Sin}^2 u - \sin^2 v)\, d v$$

$$= (v_2 - v_1) \int_{u_1}^{u_2} \mathfrak{Sin}^2 u\, d u - (u_2 - u_1) \int_{v_1}^{v_2} \sin^2 v\, d v,$$

und nach den leicht ersichtlichen Formeln

$$\mathfrak{Sin}^2 u = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Cos}\, 2u - 1), \qquad \sin^2 v = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2u)$$

ergibt sich

$$4F = (v_2 - v_1)(\mathfrak{Sin}\, 2u_2 - \mathfrak{Sin}\, 2u_1) + (u_2 - u_1)(\sin 2v_2 - \sin 2v_1).$$

Die begrenzenden Kegelschnitte des Vierecks sind

$$\frac{x^2}{\mathfrak{Cos}^2 u_\nu} + \frac{y^2}{\mathfrak{Sin}^2 u_\nu} = 1, \quad \frac{x^2}{\cos^2 v_\nu} - \frac{y^2}{\sin^2 v_\nu} = 1, \quad \nu = 1, 2.$$

§ 101. Der Flächeninhalt krummer Flächen.

Projizieren wir ein beliebiges Stück einer Fläche $z = f(x, y)$ auf die xy-Ebene, und integrieren wir doppelt über die ebene Projektion, so bezeichnen wir als Inhalt des krummen Flächenstücks das Integral

$$\iint \frac{d x\, d y}{\cos (z N)},$$

wobei N diejenige Normale der Fläche sei, die mit der z-Achse einen spitzen Winkel bildet; wir begrenzen das Flächenstück zunächst so, daß (zN) niemals ein rechter Winkel wird. Diese Definition stimmt mit der gewöhnlichen Anschauung bei ebenen Flächen; denn die Projektion einer ebenen Fläche wird erhalten, indem man die Fläche mit dem Kosinus des spitzen Winkels zwischen der Projektion und der Fläche multipliziert. Die Definition stimmt demnach auch bei polyedrischen Flächen, durch die man einer krummen Fläche beliebig nahe kommen kann.

Weiter nehmen wir an, auf der Fläche $z = f(x, y)$ seien alle drei Koordinaten x, y, z, wie in § 26, als Funktionen zweier Parameter u und v gegeben, und zwar so, daß die dort durch T_u und T_v bezeichneten Richtungen, d. h. die Richtungen der Elemente ($du > 0$,

$dv = 0$) und ($du = 0$, $dv > 0$) mit N so orientiert sind, wie die Bezugsachsen in der gewöhnlichen Folge $x\,y\,z$; dann ist nach § 26

$$\cos(zN) = \frac{x_u y_v - x_v y_u}{\Delta},$$

$$\Delta = \sqrt{EG - F^2}$$

$$= \sqrt{(y_u z_v - y_v z_u)^2 + (z_u x_v - z_v x_u)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2},$$

und wenn der Randlinie des betrachteten Flächenstückes eine brauchbare Kurve in der uv-Ebene entspricht, kann man, da $x_u y_v - x_v y_u$, wie $\cos(zN)$ positiv ist, nach § 100, (4) setzen

$$\iint \frac{dx\,dy}{\cos(zN)} = \iint \frac{(x_u y_v - x_v y_u)\,du\,dv}{\cos(zN)}$$

$$= \iint \Delta\,du\,dv.$$

Diese Bemerkung veranlaßt uns, das stets positive Integral

(1) $$S = \iint \Delta\,du\,dv$$

als Flächeninhaltsmaß eines beliebigen Flächenstücks einzuführen, auf dem $\cos(zN)$ nicht mehr positiv zu bleiben braucht. Nimmt man $u = x$, $v = y$, womit aber vorausgesetzt wird, daß

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

endlich und stetig bleiben, also

$$\cos(zN) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

nicht verschwindet, so erhält man die gewöhnliche Flächeninhaltsformel

(2) $$S = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy.$$

In dem allgemeinen Ausdruck (1) drücken wir u und v durch andere Unabhängige u_1 und v_1 aus; dann finden wir nach § 9

(3) $$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,\frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u_1, v_1)}$$

nebst ähnlichen Gleichungen, in denen x und y durch z und x oder y und z ersetzt sind; da nun, wenn

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} > 0,$$

nach § 100 die Gleichung

$$\iint \Delta\, du\, dv = \iint \Delta \frac{\partial (u, v)}{\partial (u_1, v_1)}\, du_1\, dv_1$$

gilt, aus der Gleichung (3) aber

$$\Delta_1 = \Delta \frac{\partial (u, v)}{\partial (u_1, v_1)}$$

folgt, wobei Δ_1 mit den Unabhängigen u_1 und v_1 ebenso gebildet ist, wie Δ mit u und v, so folgt

$$\iint \Delta\, du\, dv = \iint \Delta_1\, du_1\, dv_1.$$

Das Integral behält ferner seine Form, wenn das Bezugssystem geändert wird; denn dreht man die Achsen nach den Formeln

$$x = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha, \quad y = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha, \quad z = \zeta,$$

so folgt durch leichte Rechnung

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \xi_u^2 + \eta_u^2 + \zeta_u^2,$$
$$x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \xi_u \xi_v + \eta_u \eta_v + \zeta_u \zeta_v \ldots,$$

d. h. die Größen E, F, G als Funktionen von u und v bleiben dieselben; und da man jede Drehung des Achsensystems nach § 23 aus Drehungen um jeweils eine der Bezugsachsen zusammensetzen kann, eine Verschiebung des Bezugssystems aber die Größen E, F, G offenbar nicht ändert, so sind diese bei allen Bezugssystemen x, y, z dieselben Funktionen von u und v, und dasselbe gilt von Δ.

Man nennt deshalb das Flächenelement

$$dS = \Delta\, du\, dv$$

ein invariantes Integrationselement, invariant gegenüber der Einführung neuer Unabhängiger, wie neuer Bezugsachsen; der Sinn eines invarianten Integrals

$$J = \iint M\, dS$$

wird, wenn M eine Funktion des Ortes auf der Fläche ist, durch die Gleichung

$$J = \iint M(u, v) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

gegeben, und hier ist die Wahl der Unabhängigen u, v völlig freigestellt. Denkt man sich die Fläche mit Masse von der Dichtigkeit M belegt, so ist das Integral J die Gesamtmasse, wodurch im Grunde die Flächendichtigkeit einer Massenverteilung definiert wird.

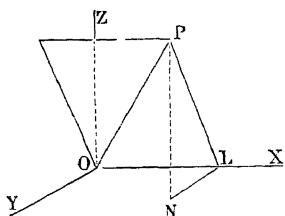
Wir betrachten einige Beispiele.

a) Zunächst betrachten wir die Kugel vom Radius a, auf der nach § 26 sphärische Polarkoordinaten mittels der Gleichungen

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u \cos v, \quad z = \sin u \sin v$$

eingeführt werden; in Fig. 88 ist dann $u = \measuredangle POX$ und $v = \measuredangle NLP$ der Winkel zwischen der xy-Ebene und der Ebene LOP, der Radius ist $OP = a$. Man findet nach § 26

$$\Delta = a \sin u, \quad dS = a \sin u \, du \, dv.$$

Fig. 88.

Der Winkel u läuft von 0 bis π, der Winkel v von 0 bis 2π. Die Halbkreise $u = u_0$ und $v = u_1$ begrenzen ein Kugelzweieck, dem in der uv-Ebene das Rechteck zwischen den Geraden $u = 0$, $u = \pi$, $v = v_0$, $v = v_1$ entspricht, wobei aber den Seiten $u = 0$ und $u = \pi$ die Punkte $x = \pm a$, $y = z = 0$ entsprechen. Der Flächeninhalt des Zweiecks ist daher

$$a^2 \int_0^\pi du \int_{v_0}^{v_1} \sin u \, dv = a^2 (v_1 - v_0) \int_0^\pi \sin u \, du = 2 a^2 (v_1 - v_0),$$

mit den Werten $v_0 = 0$ und $v_1 = 2\pi$ erhält man die Kugeloberfläche $4 a^2 \pi$.

b) Eine Drehfläche, deren Figurachse die x-Achse ist, entsteht durch Fortbewegung eines Kreises, dessen Ebene auf der x-Achse senkrecht steht und dessen Mittelpunkt L auf dieser liegt. Ist $u = LP$ in Fig. 88 der Radius dieses Kreises, eines Breitenkreises, wie wir sagen, und hat $v = \measuredangle NLP$ dieselbe Bedeutung wie unter a), so kann für die Punkte desselben

$$y = u \cos v, \quad z = u \sin v$$

gesetzt werden; dabei ist $OL = x = f(u) = f(\sqrt{y^2 + z^2})$ zu setzen. Man findet

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [1 + f'(u)^2] du^2 + u^2 dv^2,$$

$$E = 1 + f'(u)^2, \quad F = 0, \quad G = u^2, \quad \Delta = u \sqrt{1 + f'(u)^2},$$

$$S = \iint u \sqrt{1 + f'(u)^2} \, du \, dv.$$

Durch $v = v_0$ und $v = v_1$ sind zwei Meridiane der Fläche bestimmt; $u = u_0$ und $u = u_1$ sind zwei Breitenkreise; für das von diesen vier Kurven begrenzte Stück erhält man

$$S' = \int_{v_0}^{v_1} dv \int_{u_0}^{u_1} u \sqrt{1 + f'(u)^2} \, du = (v_1 - v_0) \int_{u_0}^{u_1} u \sqrt{1 + f'(u)^2} \, du.$$

Nun ist

$$d\sigma = \sqrt{1 + f'(u)^2}\, du = \sqrt{dx^2 + du^2}$$

das Bogenelement des Meridians; es entsteht aus ds, wenn man $dv = 0$ setzt. Man enthält also

$$S' = (v_1 - v_0) \int_{v_0}^{u_1} u \frac{d\sigma}{du} du$$

und, wenn $v_0 = 0$, $v_1 = 2\pi$ wird,

$$S'' = 2\pi \int u\, d\sigma,$$

als Fläche des Gürtels zwischen den Breitenkreisen $u = u_0$ und $u = u_1$. Das stimmt mit dem in § 88 erhaltenen Ergebnis überein; der dort aus einer besonderen Definition erhaltene Flächeninhalt ist also auch ein Flächeninhalt im Sinne des jetzt eingeführten allgemeineren Begriffs.

c) Das elliptische Paraboloid. Die Gleichung der Fläche ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

mithin

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = \frac{y}{b};$$

als Horizontalprojektion nehmen wir den Quadranten der aus den Halbparametern a und b konstruierten Ellipse; es ist dann nach der Inhaltsformel (2)

$$S = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dy.$$

Durch Anwendung der Formel § 100, (9) erhalten wir

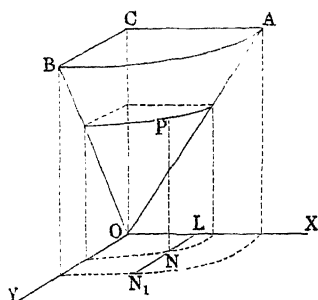
$$S = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, r\, dr = \frac{\pi(\sqrt{8} - 1)}{6} ab.$$

d) Der elliptische Kegel. In Fig. 89 sei $OC = c$ die Höhe des Kegels, ACB seine elliptische Basis mit den Halbachsen $AC = a$, $BC = b$; die Koordinatenebene xy möge parallel zur Ebene ABC durch die Spitze O gehen. Die Gleichung der Fläche ist dann

$$z = c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

und wenn zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}=\alpha, \quad \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b}=\beta$$

Fig. 89.

gesetzt wird, so findet sich

$$1+p^2+q^2=\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Der Grundriß des Mantelquadranten $AOBA$ ist eine aus den Halbachsen a und b konstruierte Ellipse, daher

$$S=\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dy \sqrt{\left\{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{b}\right)^2}\right\}}.$$

Nach Formel (9) in § 100 ergibt sich

$$S=ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta\int_0^1 \sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\, r\,dr$$

$$=\tfrac{1}{2}ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta,$$

mithin für den ganzen Mantel

$$M=\tfrac{1}{2}\sqrt{ab}\,.\,4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\alpha^2 ab\cos^2\theta+\beta^2 ab\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Hierin liegt der geometrische Satz, daß der Kegelmantel dieselbe Fläche besitzt, wie der Mantel eines Zylinders, dessen Höhe $=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$, und dessen Grundfläche eine aus den Halbachsen $\alpha\sqrt{ab}$ und $\beta\sqrt{ab}$ konstruierte Ellipse ist.

e) Das dreiachsige Ellipsoid. Die Halbachsen der Fläche mögen a, b, c heißen; es sei ferner $a>b>c$ und zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\alpha, \quad \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b}=\beta.$$

Aus der Gleichung der Fläche, nämlich

$$z = c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

findet man

$$1+p^2+q^2 = \frac{1-\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2-\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Verstehen wir unter S die Fläche eines ellipsoidischen Oktanten, so ist der Grundriß von S ein Ellipsenquadrant mit den Halbachsen a und b, mithin

$$S = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dy \sqrt{\left\{\frac{1-\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2-\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}}.$$

Durch Anwendung der Formel § 100, (9), wobei zur Abkürzung

$$\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta = s^2$$

sein möge, ergibt sich sofort

$$S = ab\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-s^2r^2}{1-r^2}}\, r\,dr.$$

Statt r führen wir eine neue Unabhängige u ein mittels der Gleichung

$$\frac{1-r^2}{1-s^2r^2} = u^2,$$

woraus

$$r^2 = \frac{1-u^2}{1-s^2u^2}, \quad r\,dr = -\frac{(1-s^2)\,u\,du}{(1-s^2u^2)^2}$$

folgt; wir erhalten

$$S = ab\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int\limits_0^1 \frac{1-s^2}{(1-s^2u^2)^2}\,du$$

oder auch, wenn die Reihenfolge der Integrationen umgekehrt und für s^2 sein Wert gesetzt wird,

$$S = ab\int\limits_0^1 du \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-\alpha^2)\cos^2\theta+(1-\beta^2)\sin^2\theta}{[(1-\alpha^2u^2)\cos^2\theta+(1-\beta^2u^2)\sin^2\theta]^2}\,d\theta.$$

Unter Anwendung der nach § 76, (14), (15) entwickelbaren Formeln

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4m\sqrt{mn}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4n\sqrt{mn}}$$

folgt schließlich

$$S = \tfrac{1}{4}\pi a b \int_0^1 \left\{ \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}.$$

Man kann dieser Formel noch eine andere Gestalt verleihen, wenn man die identische Gleichung beachtet

$$\int \left\{ \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}$$
$$= \frac{1}{u}\left\{1 - \frac{1-u^2}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}\right\} + \int \left\{1 - \frac{1-u^2}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}\right\} \frac{du}{u^2},$$

welche durch Differentiation leicht zu prüfen ist; es ergibt sich

$$S = \tfrac{1}{4}\pi a b \left[1 + \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{1-u^2}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}} \right\} \frac{du}{u^2} \right].$$

Nach § 73 hat es keine Schwierigkeit, dieses Integral auf verschiedene Weise in unendliche Reihen zu verwandeln.

f) Die Schraubenfläche. Die Gleichung dieser Fläche ist bekanntlich für den Fall, daß die Achse der Fläche zur z-Achse genommen wird,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{c}$$

oder, wenn man sich auf den Quadranten der ersten Windung beschränkt,

$$z = c \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Hieraus folgt

$$S = \iint \sqrt{1 + \frac{c^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

und in Polarkoordinaten

$$S = \iint \sqrt{r^2 + c^2}\, d\theta\, dr.$$

Als Grundriß des zu bestimmenden Flächenstückes nehmen wir ein gemischtliniges Viereck, begrenzt von zwei mit den Radien r_0, r_1 beschriebenen Kreisen und von den zwei Radien, welche mit der x-Achse die gegebenen Winkel θ_0 und θ_1 einschließen; es ist dann

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{c^2 + r^2}\, dr,$$

und nach Ausführung der Integrationen

$$S = \tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)\left\{ r_1\sqrt{c^2 + r_1^2} - r_0\sqrt{c^2 + r_0^2} + c^2 \lg\left(\frac{r_1 + \sqrt{c^2 + r_1^2}}{r_0 + \sqrt{c^2 + r_0^2}}\right)\right\}.$$

g) Schnitt eines elliptischen Kegels mit einer durch seine Spitze gehenden Kugel. Der Kegel in Fig. 89 werde von einer durch O gehenden Kugel vom Radius r, deren Mittelpunkt auf OZ liegt, geschnitten; zu bestimmen ist die auf der Kugel ausgeschnittene Kappe. Die Gleichung der Kugel ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2rz, \qquad z = r - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2};$$

die Gleichung des Kegels, indem $c = 1$ gesetzt wird,

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

die Gleichung der Kugel gibt

$$p = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \qquad q = \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}};$$

das Flächenintegral wird zunächst

$$S = \int\!\!\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \int\!\!\int \frac{r\, dx\, dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Dies Integral verliert aber seinen Sinn, wenn der Nenner verschwindet; die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$ tritt offenbar auf dem größten Kreise $z = r$ ein. Wenn die gesuchte Fläche über diesen hinausreicht, ist die Formel nicht brauchbar.

Allgemein können wir aber setzen

$$x = au\cos v, \qquad y = bu\sin v;$$

dann ist auf dem Kegel $z = u$; auf der Schnittlinie mit der Kugel ist also

$$u^2(1 + a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v) = 2ru,$$

$$(1) \qquad u = \frac{2r}{1 + a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v} = u_0.$$

Nun ist

$$\frac{\partial(x, r)}{\partial(u, v)} = a b u,$$

also nach der allgemeinen Formel

$$S = \iint \frac{r a b u\, d u\, d v}{\sqrt{r^2 - a^2 u^2 \cos^2 v - b^2 u^2 \sin^2 v}}.$$

Hält man zunächst v fest, so integriert man nach u von 0 bis zu dem Werte u_0; mit diesem Wert erhält man

$$(2) \qquad r^2 - a^2 u_0^2 \cos^2 v - b^2 u_0^2 \sin^2 v = r^2 \frac{1 - a^2 \cos^2 v - b^2 \sin^2 v}{1 + a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}.$$

Nach v integrieren wir, indem wir uns auf den einen Quadranten beschränken, von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und erhalten so

$$\frac{1}{4} S = a b r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d v \int_0^{u_0} \frac{u\, d u}{\sqrt{r^2 - u^2 (a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)}}.$$

Hier kann nach u ausintegriert werden:

$$\frac{1}{4} S = a b r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d v \left[- \frac{\sqrt{r^2 - a^2 u^2 \cos^2 v - b^2 u^2 \sin^2 v}}{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} \right]_0^{u_0},$$

also nach (1)

$$= 2 a b r^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d v}{1 + a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}$$

$$= 2 a b r^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d v}{(1 + a^2) \cos^2 v + (1 + b^2) \sin^2 v}.$$

Dies Integral ist nach § 64, (20) auszurechnen; man erhält für die ganze Kappe

$$S = \frac{4 \pi a b r^2}{\sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + b^2}}.$$

§ 102. Der Satz von Stokes und der Rauminhalt.

I. Auf einem Flächenstück $\mathfrak{S}$ mit der Randlinie $\mathfrak{R}$ seien x, y, z mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen von u und v, und die Stelle (u, v) durchlaufe in der uv-Ebene ein Gebiet $\mathfrak{S}_0$, das das

Innengebiet einer brauchbaren Randlinie $\mathfrak{R}_0$ bildet, die wir im positiven Sinne, in entsprechendem Sinne $\mathfrak{R}$ durchlaufen; X sei eine beliebige, mit ihren ersten Ableitungen auf der Fläche $\mathfrak{S}$ stetige Funktion von x, y, z. Dann ist das Linienintegral

$$(1)\qquad \int_{\mathfrak{R}} X\,dx = \int_{\mathfrak{R}_0} X(x_u\,du + x_v\,dv)$$

nach der Gaußschen Integraltransformation in der uv-Ebene in die Form

$$(2)\qquad \int_{\mathfrak{R}_0} X x_u\,du + \int_{\mathfrak{R}_0} X x_v\,dv = \iint_{\mathfrak{S}_0}\left\{\frac{\partial (X x_v)}{\partial u} - \frac{\partial (X x_u)}{\partial v}\right\} du\,dv$$

$$= \iint_{\mathfrak{S}_0}\left(x_v \frac{\partial X}{\partial u} - x_u \frac{\partial X}{\partial v}\right) du\,dv$$

$$= \iint_{\mathfrak{S}_0} \{x_v (X_x x_u + X_y y_u + X_z z_u)$$

$$- x_u (X_x x_v + X_y y_v + X_z z_v)\}\,du\,dv$$

$$= \iint_{\mathfrak{S}_0} \{X_y (z_u x_v - z_v x_u)$$

$$- X_y (x_u y_v - x_v y_u)\}\,du\,dv$$

übergeführt, wobei natürlich $X_x = \partial X / \partial x$, $x_u = \partial x / \partial u$ usf. gesetzt ist. Nun ist nach § 26 durch die Gleichungen

$$(3)\qquad \varDelta \,.\cos(xN) = y_u z_v - y_v z_u, \quad \varDelta \,.\cos(yN) = z_u x_v - z_v x_u,$$
$$\varDelta \,.\cos(zN) = x_u y_v - x_v y_u$$

N als diejenige Normale der Fläche $\mathfrak{S}$ festgelegt, die zu den Richtungen ($du > 0$, $dv = 0$) oder T_u und ($dv > 0$, $du = 0$) oder T_v so liegt, daß die Richtungssysteme xyz und NT_uT_v gleich orientiert sind; nach § 101 ist dann

$$\cos(xN)\,dS = (y_u z_v - y_v z_u)\,du\,dv$$

zu setzen, und nach (1) und (2) folgt

$$(4)\qquad \int_{\mathfrak{R}} X\,dx = \iint_{\mathfrak{S}} \{X_z \cos(yN) - X_y \cos(zN)\}\,dS.$$

Fügen wir nun entsprechende, mit y und z als bevorzugter Koordinate gebildete Formeln für dieselbe Kurve $\mathfrak{K}$ hinzu, und addieren die erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich die Formel von **Stokes**:

$$(5)\qquad \int_{\mathfrak{R}} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

$$= \iint_{\mathfrak{S}} dS\,\{(Z_y - Y_z)\cos(xN) + (X_z - Z_x)\cos(yN) + (Y_x - X_y)\cos(zN)\}.$$

Die Bedeutung dieser Gleichung liegt darin, daß die Integrationselemente invariant gegenüber der Koordinatentransformation sind, wenn X, Y, Z als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{V}$ anzusehen sind, d. h. wenn sie sich mit den Koordinaten transformieren wie die Koordinaten eines Punktes. Dann gilt, wie die Rechnung zeigt, dasselbe von den Größen $Z_y - Y_z$, $X_z - Z_x$, $Y_x - X_y$; sie sind Komponenten des Vektors rot $\mathfrak{V}$ oder curl $\mathfrak{V}$, und man kann die Formel, wenn ds das Element der Kurve $\mathfrak{K}$, dS wie bisher das Flächenelement des Gebiets $\mathfrak{S}$ ist, schreiben

$$\int_{\mathfrak{R}} ds\, \mathfrak{V}_{ds} = \iint_{\mathfrak{S}} dS\,(\text{rot}\,\mathfrak{V})_N,$$

indem die Fußmarke stets die Richtung angibt, nach der die Komponente und für ds die auf der Randlinie $\mathfrak{R}$ festgesetzte Richtung zu nehmen ist.

II. Wir betrachten noch etwas näher die Lage der Normale N. Sind überhaupt in der uv-Ebene zwei Fortgänge $(d_1 u,\ d_1 v)$ und $(d_2 u,\ d_2 v)$ gegeben, die wir d_1 und d_2 nennen, so entsprechen ihnen im xyz-Raume die Fortgänge

$$(6)\quad d_\nu x = x_u d_\nu u + x_v d_\nu v,\quad d_\nu y = y_u d_\nu u + y_v d_\nu v,\ \ldots\ \nu = 1, 2,$$

die wir als Richtungen d_1' und d_2' bezeichnen. Dann sind nach § 26 die Richtungen d_1', d_2', N orientiert wie die Richtungen x, y, z, wenn die Größe

$$M = \begin{vmatrix} d_1 x, & d_1 y, & d_1 z \\ d_2 x, & d_2 y, & d_2 z \\ \cos(xN), & \cos(yN), & \cos(zN) \end{vmatrix}$$

positiv ist. Setzt man die Werte (3) und (6) ein, so findet man leicht durch Rechnung

$$M = \Delta\,(d u_1 d_2 v - d_1 v\, d_2 u),$$

und diese Größe ist, wie auch in § 100 benutzt wurde, positiv, wenn d_1 zu d_2 liegt wie die Richtung u zur Richtung v. Das ist z. B. der Fall, wenn d_1 die positive Fortgangsrichtung auf $\mathfrak{R}_0$ und d_2 die Richtung nach dem Innern des Gebiets $\mathfrak{S}_0$ bedeutet; dann ist d_1' die festgesetzte Fortgangsrichtung auf $\mathfrak{R}$ und, da die Gebiete $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}$ sich entsprechen, d_2' die Richtung nach dem Innern des Gebiets $\mathfrak{S}$ herein. Die Fortgangsrichtung auf $\mathfrak{R}$, die Richtung nach dem Innern des Gebiets $\mathfrak{S}$ und die Normale N in einem Randpunkte des Gebiets $\mathfrak{R}$ sind also positiv orientiert, d. h. wie die Richtungen x, y, z in dieser Folge.

III. Ist $\mathfrak{S}_1$ ein zweites Flächenstück von den für $\mathfrak{S}$ geforderten Eigenschaften, $\mathfrak{R}_1$ seine Randlinie, die mit $\mathfrak{R}$ ein Stück gemein habe, das in entgegengesetztem Sinne wie $\mathfrak{R}$ durchlaufen wird, so heben sich in der Summe

$$R = \int_{\mathfrak{R}} X dx + \int_{\mathfrak{R}_1} X dx$$

die von der gemeinsamen Strecke herrührenden Teile; fügen sich die Gebiete $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ zu einem Gesamtgebiet $\mathfrak{S}_2$ mit der Randlinie $\mathfrak{R}_2$ zusammen, so ist

$$R = \int_{\mathfrak{R}_2} X dx;$$

die Reste der Randlinien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ mit ihren Fortgangsrichtungen durchlaufen, ergeben für $\mathfrak{R}_2$ eine einheitliche Fortgangsrichtung, und die den Gebieten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ entsprechenden Gleichungen (4) geben eine Gleichung derselben Form, in der $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{R}_2$ ersetzt sind. So fortschließend übersieht man leicht, daß der Satz von Stokes auch für Flächenstücke gilt, die aus mehreren Stücken wie $\mathfrak{S}$ zusammengesetzt sind.

Im besonderen mögen die Flächenstücke $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ die ganze Randlinie gemein haben; sie bilden dann eine geschlossene Fläche $\mathfrak{S}_2$. Die Normalen N seien den Schlußworten des Absatzes II gemäß so gewählt, daß die räumlich zusammenfallenden Randlinien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ entgegengesetzte Fortgangsrichtungen haben. Umhüllt im besonderen die Fläche $\mathfrak{S}_2$ ein Raumgebiet, das eine innere und äußere Normale zu unterscheiden erlaubt, so ist dann N entweder auf der ganzen Fläche $\mathfrak{S}_2$ die innere oder überall die äußere Normale, da z. B. von außen gesehen die Richtung $\mathfrak{R}$ und die nach dem Innern des Gebiets $\mathfrak{S}$ weisende ebenso gegeneinander zu liegen scheinen, wie die entgegengesetzten, $\mathfrak{R}_1$ und die Richtung nach dem Innern des Gebiets $\mathfrak{S}_1$. Die äußeren Normalen der Gebiete $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ bieten somit dieselben Lagenbeziehungen dar, wie die Normalen N, sind also mit diesen identisch.

Die Gleichung (4) gibt nun

$$\int_{\mathfrak{R}} X dx + \int_{\mathfrak{R}_1} X dx = \iint_{\mathfrak{S}_2} \{X_z \cos(yN) - X_y \cos(zN)\}\, dS;$$

$\mathfrak{R}_1$ ist aber $\mathfrak{R}$ im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, die linke Seite also Null; auf einer geschlossenen Fläche, die wir jetzt $\mathfrak{S}$ nennen, integriert, ergibt sich also die Gleichung

$$\iint_{\mathfrak{S}} \{X_z \cos(yN) - X_y \cos(zN)\}\, dS = 0, \tag{7}$$

oder aus der ausführlichen Stokesschen Gleichung

$$(8)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{S}} (Z_y - Y_z)\cos(xN) + (X_z - Z_x)\cos(yN) + (Y_x - X_y)\cos(zN)\,dS = 0;$$

dabei ist N überall die äußere oder überall die innere Normale.

IV. Aus den Gleichungen (8) und (7) folgen belangreiche Gleichungen geometrischen Inhalts. Setzt man z. B. in ersterer $X = y$, so folgt

$$(9)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{S}} \cos(zN)\,dS = 0$$

und ebenso

$$(10)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{S}} \cos(xN)\,dS = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \cos(yN)\,dS = 0;$$

setzt man $X = 0$, $Y = xz$, $Z = xy$ in der Gleichung (8), so ergibt sich

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}} dS\,[y\cos(yN) - z\cos(zN)] = 0$$

oder, indem man eine ähnliche Formel mit x und y für y und z gesetzt bildet und mit dieser zusammenfaßt,

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}} x\cos(xN)\,dS = \iint\limits_{\mathfrak{S}} y\cos(yN)\,dS = \iint\limits_{\mathfrak{S}} z\cos(zN)\,dS.$$

Der gemeinsame Wert dieser Größen ist offenbar

$$R = \tfrac{1}{3}\iint\limits_{\mathfrak{S}} [x\cos(xN) + y\cos(yN) + z\cos(zN)\,dS.$$

Ist nun r die Richtung vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Punkte (x, y, z) hin und zugleich $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, so ist

$$x = r\cos(xr),\quad x\cos(xN) + \cdots = r\cos(xr)\cos(xN) + \cdots = r\cos(rN);$$

also ist die Größe

$$R = \tfrac{1}{3}\iint r\cos(rN)\,dS$$

gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems invariant. Ebenso auch gegenüber einer Verschiebung desselben; denn ersetzt man x, y, z durch $x + a$, $y + b$, $z + c$, so erhält R den Zuwachs

$$\iint [a\cos(xN) + b\cos(yN) + c\cos(zN)]\,dS,$$

der den Gleichungen (9) und (10) zufolge verschwindet.

Nehmen wir für N die äußere Normale, so wollen wir R als Rauminhalt des von der Fläche $\mathfrak{S}$ umspannten Raumes bezeichnen.

Man sieht an Einzelbeispielen leicht, daß der Sinn des Wortes mit dem gewöhnlichen übereinstimmt.

Man wende unsere Definition z. B. in Fig. 80 an auf den von der Fläche $Q_0 R_0 Q_1 R_1$, ihrer Projektion $L_0 M_0 L_1 M_1$ und dem projizierenden Zylinder umschlossenen Raum und setze wieder

$$R = \iint z \cos(zN)\, dS;$$

dann verschwindet $\cos(zN)$ auf der Zylinderfläche, z auf der Fläche $L_0 M_0 L_1 M_1$, und bleibt nur

$$R = \iint z \cos(zN)\, dS = \iint z (x_u y_v - x_v y_u)\, du\, dv,$$

erstreckt über die Fläche $Q_0 R_0 Q_1 R_1$, oder auch nach § 100

$$R = \iint z\, dx\, dy,$$

womit die gewöhnliche Doppelintegralformel für den Rauminhalt erreicht ist.

Oder sei $\mathfrak{S}$ das System der Ebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

a, b, c positive Konstante, der umschlossene Raum also ein rechtwinkliges Parallelepipedon oder Quader. Dann hat man auf den ersten drei Ebenen immer $\cos(rN) = 0$; auf der Ebene $x = a$ hat man $r\cos(rN) = a$; also ist der Beitrag dieser Ebene zum Integral R

$$\tfrac{1}{3}\iint a\, dS$$

integriert über das Rechteck mit den Seiten b und c, also $\frac{1}{3}abc$. Denselben Beitrag ergeben auch die Flächen $y = b$ und $z = c$, so daß man im ganzen $R = abc$ erhält, also die elementare Formel für den Rauminhalt des Quaders.

Erwähnen wir noch eine allgemeine Eigenschaft der Größe R, die sich herausstellt, wenn man R für zwei Gebiete $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ bildet, die keinen inneren Punkt, wohl aber einen Teil der Begrenzungsfläche gemein haben. Auf dieser ist N für beide Gebiete entgegengesetzt gerichtet, also $\cos(xN)$ hat entgegengesetzte Werte, mithin auch das Integrationselement $[x\cos(xN) + \cdots]\,dS$, da x, y, z dieselben Größen für das eine und das andere Gebiet sind. Die auf den gemeinsamen Begrenzungsteil bezüglichen Teile der Integrale R heben sich also, wenn man die Werte R für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zusammenaddiert. Ihre Summe ist also wieder das Integral, erstreckt über die Gesamtbegrenzung beider Gebiete $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, soweit sie nur einem dieser Gebiete angehört. Das ist aber die Begrenzung des aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$

zusammengefügten Gebiets; fügt man also zwei Raumgebiete der betrachteten Art zusammen, so addieren sich die Rauminhalte, was natürlich gefordert werden muß, wenn wir mit dem gewöhnlichen Sinn dieses Wortes im Einklang bleiben wollen.

§ 103. Die dreifachen Integrale.

Sowie ein Doppelintegral den Grenzwert einer Doppelsumme bildet, so soll auch das dreifache Integral

$$W = \iiint_{\mathfrak{K}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{1}$$

erstreckt über einen Raum $\mathfrak{K}$, als Grenzwert der dreifachen Summe gelten, welche entsteht, wenn man in dem Produkte $F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ den Unabhängigen x, y, z solche Werte gibt, daß der Punkt (x, y, z) dem Innern des Raumes $\mathfrak{K}$ und zugleich einem Punktgitter angehört, das entsteht, wenn man nur ganze Vielfache von dx als Koordinaten x zuläßt und ebenso bei den anderen Koordinaten verfährt; nachher addiert man alle erhaltenen Produkte unter der Voraussetzung, daß dx, dy, dz gleichzeitig gegen die Null konvergieren.

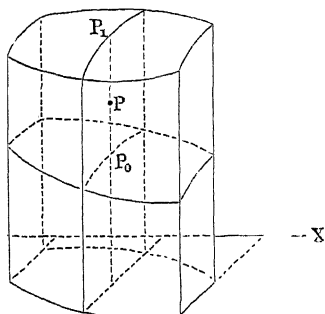



Fig. 90.

Nicht selten gestatten diese Operationen eine geometrische Auffassung. Betrachtet man z. B. in dem Integrale

$$W = \iiint dx\, dy\, dz$$

x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P (Fig. 90), so bedeutet das Produkt $dx\,dy\,dz$ den Körperinhalt eines Quaders, dessen drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten dx, dy, dz sind; demnach ist W die Grenze der Summe einer Menge solcher Raumelemente, mithin selbst ein Rauminhalt, welcher auf folgende Weise entsteht. Denken wir uns zwei Flächen konstruiert, deren Gleichungen $z_0 = \psi(x, y)$ und $Z = \Psi(x, y)$ sein mögen, und summieren erst alle

von $z = z_0$, $z = Z$ senkrecht aneinander gereihten Elemente, so gibt der Ausdruck

$$\int_{z_0}^{Z} dx\,dy\,dz = dx\,dy\,(Z - z_0)$$

den Inhalt eines Quaders, dessen Horizontalquerschnitt $dx\,dy$ unendlich klein, d. h. abnehmend gedacht wird, und dessen Höhe $P_0 P_1 = Z - z_0$ ist, wobei x_0 und Z die z-Koordinaten der Punkte P_0 und P_1 seien. Auf das noch übrige Doppelintegral

$$W = \iint_{\mathfrak{F}} (Z - z_0)\,dx\,dy = \iint_{\mathfrak{F}} Z\,dx\,dy - \iint_{\mathfrak{F}} z_0\,dx\,dy,$$

erstreckt über die in der xy-Ebene gezeichnete Figur $\mathfrak{F}$, die die Projektionen aller Punkte des Raumes $\mathfrak{K}$ auf diese Ebene enthält, können die Betrachtungen des § 98 angewendet werden; sie zeigen, daß W einen Rauminhalt bedeutet, der zwischen den zwei vorhin erwähnten Flächen liegt.

Eine ähnliche Anschauungsweise gestattet das allgemeinere Integral (1), nur muß man sich jedes Raumelement $dx\,dy\,dz$ mit einem veränderlichen Faktor $F(x, y, z)$ multipliziert denken. Besonders klar wird dies, wenn man die mechanischen Begriffe von Masse und Dichtigkeit zu Hilfe nimmt. Bei einem durchaus homogenen Körper gilt nämlich die Regel, daß die Masse gleich ist dem Produkte aus Dichtigkeit und Rauminhalt; ändert sich aber die Dichtigkeit von Punkt zu Punkt, in welchem Falle sie eine gegebene Funktion von x, y, z darstellt, so darf jene Regel nicht mehr für ein endliches Stück des Körpers angewendet werden, wohl aber für ein unendlich kleines; denn je kleiner ein Körperstück ist, um so eher kann es als homogen gelten. Bezeichnet demnach $F(x, y, z)$ die im Punkte (x, y, z) vorhandene Dichtigkeit, so ist $F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ die Masse des an jenem Punkte befindlichen Körperelementes, d. h. kurz das Massenelement; die Summe aller nach den drei Dimensionen des Raumes verteilten Massenelemente ist die Gesamtmasse $= W$. Dividiert man endlich W durch den Rauminhalt desselben Körpers, so erhält man seine mittlere Dichtigkeit.

Summiert man zunächst die Massenelemente längs der Strecke $P_0 P_1$, so erhält man

$$dx\,dy \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\,dz;$$

summiert man weiter über alle der Fläche $\mathfrak{F}$ angehörigen Elemente, so ergibt sich

$$W = \iint_{\mathfrak{F}} dx\,dy \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\,dz.$$

In allen Fällen, wo die erste, auf z bezügliche Integration geradezu ausführbar ist, reduziert sich das dreifache Integral von selbst auf ein doppeltes.

I. Um nun zu genaueren Begriffen und Beweisen überzugehen, ersetzen wir das körperliche Gebiet $\mathfrak{K}$ durch ein Gebiet $\mathfrak{H}$ von folgenden besonderen Eigenschaften. Seine Oberfläche werde von jeder Geraden, die parallel einer der Bezugsachsen läuft, nur höchstens zweimal geschnitten, wie eine Kugel, ein Ellipsoid oder ein konvexes Vielflach. Lassen wir Lichtstrahlen in der Richtung der z-Achse auffallen, so wirft der Körper $\mathfrak{H}$ auf die z-Ebene einen Schatten, der von einer Kurve $\mathfrak{L}^z$ begrenzt werde; sein Gebiet nennen wir $\mathfrak{G}_z$ und können es in folgender Weise analytisch kennzeichnen. Gehört der Punkt (x, y, z) dem Körper $\mathfrak{H}$ an, so liegt der Punkt $(x, y, 0)$ im Gebiet $\mathfrak{G}_z$, und umgekehrt gibt es zu jedem Punkte dieses Gebiets Punkte im Körper, die dieselben Koordinaten x, y besitzen. Die Kurve $\mathfrak{L}^z$, der Schattenriß des Körpers $\mathfrak{H}$, sei eine Kurve $\mathfrak{L}$ im Sinne des § 82, eine brauchbare Kurve, die den Geraden $x =$ const. und $y =$ const. höchstens zweimal begegnet; dasselbe gelte von jedem ebenen Schnitt $\mathfrak{L}_z$ der Oberfläche mit einer Ebene $z =$ const.

Die zu jedem Punkte des Gebiets $\mathfrak{G}_z$ gehörigen Innenpunkte des Raumes $\mathfrak{H}$ erfüllen eine Strecke zwischen den Punkten (x, y, z_0) und (x, y, Z), wobei $z_0 \leqq Z$ und z_0 wie Z im Gebiet $\mathfrak{G}_z$ stetige Funktionen von x und y sind. Jeder Punkt der Oberfläche des Gebiets $\mathfrak{H}$, die wir $\mathfrak{O}$ nennen, ist entweder als Punkt (x, y, z_0) oder als Punkt (x, y, Z) aufzufassen.

Alle diese Voraussetzungen, bei denen die Koordinate z bevorzugt ist, sollen auch gelten, wenn z durch x oder y ersetzt wird, wobei dann für $\mathfrak{G}_z$, z_0, Z, $\mathfrak{L}^z$, $\mathfrak{L}_z$ die Gebiete $\mathfrak{G}_x$ oder $\mathfrak{G}_y$, die Wertepaare x_0, X oder y_0, Y, die Kurven $\mathfrak{L}^x$, $\mathfrak{L}_x$ oder $\mathfrak{L}^y$, $\mathfrak{L}_y$ einzuführen sind; jeder auf $\mathfrak{O}$ liegende Punkt kann auch als Punkt (x_0, y, z) oder (X, y, z), sowie als Punkt (x, y_0, z) oder (x, Y, z) aufgefaßt werden.

Mit diesen Bezeichnungen betrachten wir, wenn $f(x, y, z)$ im Gebiet $\mathfrak{H}$ stetig ist, die Ausdrücke

$$J_x = \iint\limits_{\mathfrak{G}_x} dy\, dz \int_{x_0}^{X} f(x, y, z)\, dx, \qquad J_y = \iint\limits_{\mathfrak{G}_y} dz\, dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y, z)\, dy,$$

$$J_z = \iint dx\, dy \int_{z_0}^{Z} f(x, y, z)\, dz,$$

die wir als gleich nachweisen wollen; den gemeinsamen Wert nennen wir das über das Gebiet $\mathfrak{H}$ erstreckte **dreifache Integral**

$$\iiint\limits_{\mathfrak{H}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

in dem die Folge der Differentiale beliebig ist.

Bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der Schattenrisse $\mathfrak{L}^x, \ldots$ durchläuft z im ganzen Gebiet $\mathfrak{H}$ eine Strecke $\zeta_0 \ldots \zeta_1$ und jedem Punkte derselben entspricht z. B. an der Kurve $\mathfrak{L}^y$ eine x-Strecke $\xi_0 \ldots \xi_1$, derart, daß (z, ξ_0) und (z, ξ_1) die äußersten Punkte sind, die die Gerade $z = \text{const.}$ mit $\mathfrak{L}^y$ gemein hat. Dann ist auch der entsprechende ebene Schnitt $z = \text{const.}$, oder $\mathfrak{L}_z$ eine brauchbare Kurve, auf der x von ξ_0 bis ξ_1 läuft, und ξ_0 und ξ_1 sind, wie die Kurve $\mathfrak{L}^y$ zeigt, stetige Funktionen von z. Wird z irgendwie auf der Strecke $\zeta_0 \ldots \zeta_1$, und x auf der zugehörigen Strecke $\xi_0 \ldots \xi_1$ festgehalten, so erhält man die sämtlichen Punkte des Gebiets $\mathfrak{H}$, indem man y die Strecke $y_0 \ldots Y$ durchlaufen läßt, und y_0 wie Y sind stetige Funktionen von x und z.

Nach diesen Vorbemerkungen betten wir zunächst das Gebiet $\mathfrak{H}$ in einen Quader ein, der von den Ebenen $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$, $z = z_1$, $z = z_2$ begrenzt sei; dabei sei $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $z_1 < z_2$. In diesem Quader kann ähnlich wie in § 98, III. leicht eine stetige Funktion $f(x, y, z)$ definiert werden, die im Gebiet $\mathfrak{H}$ mit der bisher ebenso bezeichneten übereinstimmt; man setze z. B., wenn (x, y) dem Gebiet $\mathfrak{G}_z$ angehört und $z < z_0$ oder $z > Z$ ist, im ersten Falle $f(x, y, z) = f(x, y, z_0)$, im zweiten $f(x, y, z) = f(x, y, Z)$. Bei beliebig festgehaltenen Werten von z auf der Strecke $\zeta_0 \ldots \zeta_1$ und x auf der zugehörigen $\xi_0 \ldots \xi_1$ sei ferner für die Fälle

$$y < y_0, \quad y > Y$$

im ersten $f(x, y, z) = f(x, y_0, z)$, im zweiten $f(x, y, z) = f(x, Y, z)$, und wenn $x < \xi_0$ oder $x > \xi_1$ ist, im ersten Falle $f(x, y, z) = f(\xi_0, y, z)$, im zweiten $f(x, y, z) = f(\xi_1, y, z)$.

Jetzt setzen wir

$$P(x, y, z) = \int\limits_{x_1}^{x} f(x, y, z)\, dx, \quad Q(x, y, z) = \int\limits_{y_1}^{y} f(x, y, z)\, dy,$$

$$R(x, y, z) = \int\limits_{z_1}^{z} f(x, y, z)\, dx;$$

dann wird nach den obigen Erklärungen

$$J_x = \iint\limits_{\mathfrak{G}_x} d y\, d x\, [P(X, y, z) - P(x_0, y, z)],$$

$$J_y = \iint\limits_{\mathfrak{G}_y} d x\, d z\, [Q(x, Y, z) - Q(x, y_0, z)],$$

$$J_z = \iint\limits_{\mathfrak{G}_z} d x\, d y\, [R(x, y, Z) - R(x, y, z_0)].$$

Nun ist offenbar

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$

also $Q dx + P dy$ ein vollständiges Differential bei festem Wert von z; setzt man, ähnlich wie in § 98,

$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_1}^{x} Q(x, y_1, z)\, dx + \int_{y_1}^{y} P(x, y, z)\, dy,$$

so ist hiermit eine im ganzen Quader stetige Funktion des Ortes gegeben, die, wie man mittels der Formeln des § 95 und der Gleichung (1) sofort findet, die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = Q(x, y, z), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = P(x, y, z)$$

erfüllt; letztere ist ersichtlich; erstere folgt aus der Formel

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y} P(x, y, z)\, dy = \int_{y_1}^{y} \frac{\partial P}{\partial x}\, dy = \int_{y_1}^{y} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dy$$
$$= Q(x, y, z) - Q(x, y_1, z).$$

Die Existenz anderer als der hier vorkommenden Ableitungen von P und Q wird nicht benutzt. Integrieren wir daher in der Ebene $z =$ const. längs einer geschlossenen Linie, z. B. derjenigen, in der sie die Oberfläche des Gebiets $\mathfrak{H}$ schneidet, und die wir $\mathfrak{L}_z$ genannt haben, so ist

$$(2) \qquad \int\limits_{\mathfrak{L}_z} d\Phi = \int\limits_{\mathfrak{L}_z} Q\, dx + \int\limits_{\mathfrak{L}_z} P\, dy = 0.$$

Nun ist, wie oben bemerkt, jeder Punkt der Kurve $\mathfrak{L}_z$ ein Punkt (x, y_0, z) oder (x, Y, z), ebenso auch ein Punkt (x_0, y, z) oder (X, y, z); x geht auf dieser Kurve von ξ_0 bis ξ_1; man hat also bei positivem Umlaufssinn

$$(3) \qquad \int Q\, dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} Q(x, y_0, z)\, dy - \int_{\xi_0}^{\xi_1} Q(x, Y, z)\, dx;$$

ebenso, wenn y von η_0 bis η_1 läuft, so daß diese Größen die entsprechende Bedeutung für y haben, wie ξ_0 und ξ_1 für x,

$$\int\limits_{\mathfrak{S}_z} P\,dy = -\int\limits_{\eta_0}^{\eta_1} P(x_0, y, z)\,dy + \int\limits_{\eta_0}^{\eta_1} P(X, y, z)\,dy. \tag{4}$$

Bedenken wir jetzt, daß durch die Beziehungen

$$\zeta_0 \leqq z \leqq \zeta_1, \quad \xi_0 \leqq x \leqq \xi_1$$

das allgemeinste Koordinatenpaar x, z, das im Raume $\mathfrak{H}$ vorkommen kann, also der allgemeinste Punkt des Gebiets $\mathfrak{S}_y$, definiert wird, so folgt, daß man setzen kann

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1} dz \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} Q(x, y_0, z)\,dx = \iint\limits_{\mathfrak{S}_y} Q(x, y_0, z)\,dx\,dz,$$

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1} dz \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} Q(x, Y, z)\,dx = \iint\limits_{\mathfrak{S}_y} Q(x, Y, z)\,dx.$$

Ebenso ergibt sich

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1} dz \int\limits_{\eta_0}^{\eta_1} P(x_0, y, z)\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{S}_x} P(x_0, y, z)\,dy\,dz,$$

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1} dz \int\limits_{\eta_0}^{\eta_1} P(X, y, z)\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{S}_x} P(X, y, z)\,dy\,dz.$$

Integriert man daher die Gleichungen (3) und (4) nach z von ζ_0 bis ζ_1 und berücksichtigt die Beziehung (2), so folgt

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\mathfrak{S}_y} [Q(x, Y, z) - Q(x, y_0, z)]\,dx\,dz \\ &= \iint\limits_{\mathfrak{S}_x} [P(X, y, z) - P(x_0, y, z)]\,dy\,dz. \end{aligned} \tag{5}$$

Nun ist offenbar

$$P(X, y, z) - P(x_0, y, z) = \int\limits_{x_0}^{X} f(x, y, z)\,dx,$$

$$Q(x, Y, z) - Q(x, y_0, z) = \int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y, z)\,dy;$$

die Gleichung (5) gibt also nach der Definition der Größen J_x, J_y, J_z einfach

$$J_x = J_y;$$

ebenso erhält man natürlich $J_x = J_z$. Da nun in einem Doppelintegral, wie wir wissen, die Integrationen vertauscht werden dürfen, so ist hiermit gezeigt, daß in einem dreifachen Integral über einen dreiseitigen Normalbereich, d. h. ein Gebiet wie $\mathfrak{H}$, die Folge der Integrationen gleichgültig ist.

II. Die Oberfläche $\mathfrak{O}$ möge jetzt noch durch genauere Festsetzungen bestimmt werden. Sie zerfalle in eine endliche Anzahl von derartigen Stücken $\mathfrak{T}$, daß auf jedem von ihnen x, y, z als stetige mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktionen von zwei Unabhängigen u, v dargestellt werden können, und daß im Innern des Gebiets $\mathfrak{T}$ keine der Größen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$$

verschwinde. Das bedeutet, daß Punkte, in denen die Fläche $\mathfrak{O}$ eine Normale besitzt, die auf einer der Bezugsachsen senkrecht steht, nur auf den Randlinien der Gebiete $\mathfrak{T}$, die wir $\mathfrak{R}$ nennen, vorkommen; die Orte solcher Punkte sind bei den oben erwähnten Beleuchtungen des Körpers $\mathfrak{H}$ durch parallele Lichtstrahlen die Schattengrenzen, die wir den Randlinien $\mathfrak{R}$ zurechnen. Jedes Gebiet $\mathfrak{T}$ entspreche einem Gebiet $\mathfrak{T}'$ in der zugehörigen uv-Ebene, das als Innengebiet einer brauchbaren Kurve $\mathfrak{R}'$ anzusehen ist; letzterer entspreche die Randlinie $\mathfrak{R}$ so, wie es beim Wechsel der Unabhängigen in Doppelintegralen (§ 100) vorausgesetzt wurde.

Endlich werde noch angenommen, daß die Projektionen aller Kurven $\mathfrak{R}$ auf eine der Bezugsebenen brauchbare Kurven $\mathfrak{K}$ im Sinne des § 82 sind. Alle diese Voraussetzungen schließen eigentlich nur Sondererscheinungen aus, die man mehr oder weniger künstlich in die Aufgabe hineinbringen könnte.

In vielen Fällen wird man für u und v einfach zwei der Koordinaten x, y, z nehmen, z. B. x und y; dabei ist das Gebiet $\mathfrak{T}$ so zu begrenzen, daß die Normale niemals auf der z-Achse senkrecht steht, weil in diesem Falle die Größen $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$ nicht endlich blieben. Z. B. könnte man von einer Kugel um den Koordinatenanfangspunkt zunächst durch zwei Ebenen $z = a$, $z = -a$ Kappen abschneiden, deren Normalen der xy-Ebene nicht parallel würden; den übrig bleibenden Ring $a > z > -a$ könnte man durch die Ebenen $x = y$ und $x = -y$ in vier Teile zerlegen, von denen zwei keine Normale parallel der xz-Ebene und zwei keine solche parallel der yz-Ebene aufweisen; auf ersteren hat man x und z, auf letzteren y und z für u und v zu nehmen, und schließlich alle Gebiete durch die Schattengrenzen $x = 0$ u. s. f. zu zerlegen.

Projiziert man nun alle Gebiete $\mathfrak{T}$ und Linien $\mathfrak{R}$ auf die xy-Ebene, so wird das Gebiet $\mathfrak{G}_z$ genau doppelt bedeckt, einmal von den Projektionen der Punkte (x, y, z_0) und dann von denen der Punkte (x, y, Z).

Das Gebiet $\mathfrak{G}_z$ zerfällt daher auf doppelte Art in solche Teilbereiche, daß innerhalb eines jeden eine der Größen z_0 und Z mit stetigen Ableitungen versehene stetige Funktionen von zwei Parametern u, v sind, die wir bei z_0 durch u_0, v_0, bei Z durch U, V bezeichnen wollen. Ein solches Gebiet nennen wir im ersten Falle $\mathfrak{G}_1$, im zweiten $\mathfrak{G}_2$, die entsprechenden Gebiete in der $u_0 v_0$-Ebene und in der UV-Ebene $\mathfrak{G}'_1$ und $\mathfrak{G}'_2$. Aus den Gebieten $\mathfrak{G}_1$ setzt sich das ganze Gebiet $\mathfrak{G}_z$ zusammen, ebenso aus den Gebieten $\mathfrak{G}_2$; jedem Teilgebiete entspricht ein Teil des Integrals J_z, und so erhält man

$$(6)\qquad \iint_{\mathfrak{G}} dx\,dy \int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dz = J_z = \sum_{\mathfrak{G}_2} \iint_{\mathfrak{G}_2} dx\,dy\,.\,R(x, y, Z) - \sum_{\mathfrak{G}_1} \iint_{\mathfrak{G}_1} R(x, y, z_0)\,dx\,dy.$$

Nach der Formel (§ 100, I.) für den Wechsel der Unabhängigen in Doppelintegralen gelten nun die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{aligned} \iint_{\mathfrak{G}_1} dx\,dy\,R(x, y, z_0) &= \iint_{\mathfrak{G}'_1} R(x, y, z_0)\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u_0, v_0)}\,du_0\,dv_0, \\ \iint_{\mathfrak{G}_2} dx\,dy\,R(x, y, Z) &= \iint_{\mathfrak{G}'_2} R(x, y, Z)\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(U, V)}\,dU\,dV, \end{aligned}$$

wobei die Ungleichungen

$$(8)\qquad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u_0, v_0)} \geqq 0, \qquad \frac{\partial(x, y)}{\partial(U, V)} \geqq 0$$

vorausgesetzt werden, die man nötigenfalls durch Vertauschung von u_0 mit v_0 und U mit V sichern kann; das Gleichheitszeichen tritt nach unseren Festsetzungen nur am Rande des betrachteten Gebiets auf. Nach § 24 aber kann man setzen

$$\varDelta_0 \cos(zN') = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u_0, v_0)}, \qquad \varDelta_0 > 0, \qquad dS = \varDelta_0\,du_0\,dv_0,$$

wobei N' eine Normale der Fläche $\mathfrak{O}$ im Punkte (x, y, z_0) bedeutet; ebenso gilt im Punkte (x, y, Z) die Beziehung

$$\varDelta \cos(zN') = \frac{\partial(x, y)}{\partial(U, V)}, \qquad \varDelta > 0, \qquad dS = \varDelta\,dU\,dV$$

und N' ist in beiden Fällen nach (8) diejenige Normale, die mit der z-Achse einen spitzen oder doch keinen stumpfen Winkel bildet.

In jedem Punkte der Oberfläche $\mathfrak{O}$, der nicht einer der Randlinien $\mathfrak{R}$ angehört, kann nun eine äußere Normale in folgender Weise definiert werden. In einem Punkte (x, y, z_0) bilde sie mit der z-Achse einen stumpfen Winkel, in einem Punkte (x, y, Z) dagegen einen spitzen. Das stimmt offenbar mit der gewöhnlichen Anschauung überein: im Punkte (x, y, z_0) kommt man, im Sinne wachsender z fortschreitend, in das Innere des Gebiets $\mathfrak{H}$, d. h. in die Strecke $(x, y, z_0) \ldots (x, y, Z)$ hinein, und ähnlich liegt es im Punkte (x, y, Z). Es ist nur noch zu zeigen, daß sich dieselbe Richtung N als äußere ergibt, wenn man bei der gegebenen Bestimmung statt der bevorzugten Koordinate z eine andere, etwa x nimmt. Sei z. B. (x, y, z_0) zugleich ein Punkt (x_0, y, z). Dann gehen in dem durch ihn gelegten Schnitt $y =$ const. die Richtungen der z-Achse und der x-Achse in das Innere der Kurve $\mathfrak{L}_y$ hinein, die dieser Schnitt auf der Oberfläche $\mathfrak{O}$ ausschneidet; das Innere nach x und nach z ist ja nach § 82 dasselbe. Die äußere Normale dieser Kurve bildet also mit den genannten Achsen stumpfe Winkel; sie ist aber die Projektion einer bestimmten Normalrichtung der Oberfläche $\mathfrak{O}$, die also ebenfalls mit jenen beiden Achsenrichtungen stumpfe Winkel bilden muß; wie denn die Projektion einer gerichteten Geraden auf eine Ebene (Fig. 63, S. 439) mit einer in dieser liegenden Richtung stets einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet, je nachdem die Gerade selbst den einen oder anderen Fall darbietet. Die oben als äußere Normale mittels der bevorzugten Koordinate z definierte Richtung bildet also auch mit der y-Achse einen stumpfen Winkel; sie wäre auch äußere Normale der Fläche $\mathfrak{O}$ in dem betrachteten Punkte, definiert mit der bevorzugten Koordinate y. Ähnliches würde sich offenbar herausstellen, wenn der Punkt (x, y, z_0) ein Punkt (X, y, z), und wenn der Punkt (x, y, Z) ein Punkt (x_0, y, z) oder (X, y, z) wäre; statt des Achsenpaares x, z kann man ebenso x, y oder y, z nehmen.

Wir dürfen also unter N eine äußere Normale der Fläche $\mathfrak{O}$ verstehen, die mit der nach dem Innenraum $\mathfrak{H}$ hineinführenden Richtung einer der Koordinatenachsen einen stumpfen Winkel bildet; in den Punkten (x, y, z_0) und (x, y, Z) gelten die entsprechenden Gleichungen $\cos(zN') = -\cos(zN)$ und $\cos(zN') = +\cos(zN)$.

Hiernach werden die Integrale (2)

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}_1} R(x, y, z_0)\, dx\, dy = -\iint\limits_{\mathfrak{G}_{10}} R(x, y, z) \cos(zN)\, dS,$$

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}_2} R(x, y, Z)\, dx\, dy = +\iint\limits_{\mathfrak{G}_{20}} R(x, y, z) \cos(zN)\, dS,$$

wobei rechts unter $\mathfrak{S}_{10}$, $\mathfrak{S}_{20}$ die Stücke der Fläche $\mathfrak{O}$ verstanden sind, die den durch $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$ bezeichneten Gebieten der $u_0 v_0$-Ebene und der UV-Ebene entsprechen. Die Gleichung (6) ergibt jetzt

$$(9)\quad \iint\limits_{\mathfrak{S}_z} dx\,dy \int\limits_{z_0}^{Z} f(x, y, z)\,dz = \sum_{\mathfrak{S}_2} \iint\limits_{\mathfrak{S}_{20}} R(x, y, z) \cos(zN)\,dS + \sum_{\mathfrak{S}_1} \iint\limits_{\mathfrak{S}_{10}} R(x, y, z) \cos(zN)\,dS.$$

Nun setzt sich die Oberfläche $\mathfrak{O}$ aus den Gebieten $\mathfrak{S}_{10}$ und $\mathfrak{S}_{20}$ ebenso zusammen, wie das doppelt gedachte Gebiet $\mathfrak{S}_z$ aus allen Gebieten $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$; nach der Definition der Größe J_z erhält man also einfach

$$J_z = \iint\limits_{\mathfrak{O}} R(x, y, z) \cos(zN)\,dS.$$

Hierin liegt die Gaußsche Integraltransformation, die ein dreifaches Integral, zunächst noch mit einer bevorzugten Koordinate, in ein Oberflächenintegral verwandelt.

Offenbar erhält man ebenso, indem nach den obigen Bemerkungen über die äußere Normale durch N immer dieselbe Richtung bezeichnet wird,

$$J_z = J_x = \iint\limits_{\mathfrak{O}} P(x, y, z) \cos(xN)\,dS,\quad J_y = \iint\limits_{\mathfrak{O}} Q(x, y, z) \cos(yN)\,dS,$$

wobei wie oben gesetzt ist

$$P(x, y, z) = \int\limits_{x_1}^{x} f(x, y, z)\,dx,\qquad Q(x, y, z) = \int\limits_{y_1}^{y} f(x, y, z)\,dy;$$

dabei kann man unter P, Q, R beliebige, mit stetigen Ableitungen versehene stetige Funktionen verstehen und demgemäß schreiben

$$\iiint\limits_{\mathfrak{H}} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\mathfrak{O}} P \cos(xN)\,dS \quad \text{usf.}$$

mit bevorzugter Stellung auch der Koordinaten y und z.

III. Als erste Anwendung setzen wir $f(x, y, z) = 1$, $P = x$, $Q = y$, $R = z$, und finden

$$\iiint\limits_{\mathfrak{H}} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\mathfrak{O}} x \cos(xN)\,dS = \iint\limits_{\mathfrak{O}} y \cos(yN)\,dS = \iint\limits_{\mathfrak{O}} z \cos(zN)\,dS;$$

die letzten drei Flächenintegrale geben nach § 102 den vom Bezugssystem unabhängigen Rauminhalt des von $\mathfrak{O}$ umschlossenen Gebiets. Anderseits ist nach Absatz I

$$\iiint\limits_{\mathfrak{H}} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\mathfrak{G}_x} dy\,dz\,(X - x_0);$$

in $\mathfrak{G}_x$ läuft z von ζ_0 bis ζ_1, jedem z entsprechend y_0 etwa von η_0 bis η_1; danach hat man zu setzen

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}_x} dy\,dz\,(X - x_0) = \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1} dz \int\limits_{\eta_0}^{\eta_1} dy\,(X - x_0)$$

und das innere Integral rechts ist der Flächeninhalt des Schnittes $z = \text{const}$. So erscheint der Rauminhalt wieder wie in § 87 in der Form

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1} U\,dz,$$

wobei U der Inhalt des Schnittes $z = \text{const.}$ ist. Da die Folge der Integrationen im dreifachen Integral gleichgültig ist, sieht man abermals, daß die bei verschiedenen Schichtenteilungen des Gebiets $\mathfrak{H}$ erhaltenen Rauminhalte von gleichem Wert sind.

IV. Die elementaren allgemeinen Eigenschaften der dreifachen Integrale sprechen sich in den Gleichungen

$$\iiint\limits_{\mathfrak{H}} f_1(x, y, z)\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{\mathfrak{H}} f_2(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint\limits_{\mathfrak{H}} (f_1 + f_2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\iiint\limits_{\mathfrak{H}} C f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = C \iiint\limits_{\mathfrak{H}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

aus, in denen f_1 und f_2 Funktionen wie bisher $f(x, y, z)$ sind und C eine Konstante bedeutet; sie sind aus den Definitionsgleichungen (I) unmittelbar ersichtlich. Ebenso ist offenbar

$$\iiint\limits_{\mathfrak{H}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz > 0,$$

sobald im Gebiet $\mathfrak{H}$ immer $f(x, y, z) \geqq 0$ ist, ohne daß das Gleichheitszeichen überall gilt; denn dann ist

$$\int\limits_{z_0}^{Z} f(x, y, z)\,dz \geqq 0,$$

ohne daß das Gleichheitszeichen überall gilt, und hieraus folgt das Behauptete, da es für Doppelintegrale gilt. Weiter ergibt sich nach der Methode des § 99, VI. der Mittelwertsatz, da das Gebiet $\mathfrak{H}$ offenbar in sich zusammenhängt, in der Form

$$\iiint_{\mathfrak{H}} F(x, y, z) f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = F(\xi, \eta, \zeta) \iiint_{\mathfrak{H}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

wobei (ξ, η, ζ) eine Stelle des Gebiets $\mathfrak{H}$ ist.

V. Endlich ist der Übergang zu allgemeineren Integrationsgebieten leicht zu vollziehen. Kann ein Körper $\mathfrak{K}$, dessen Oberfläche $\mathfrak{O}$ sei, in dreiseitige Normalbereiche $\mathfrak{H}$ zerlegt werden, so setzen wir als Definition die Gleichung

$$\iiint_{\mathfrak{K}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{\mathfrak{H}} \iiint_{\mathfrak{H}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

an, in der rechts über alle Gebiete $\mathfrak{H}$ summiert werde.

Eine solche Zerlegung ist in den greifbaren Einzelaufgaben immer leicht durchzuführen. Bestehe die Oberfläche $\mathfrak{O}$ aus einer endlichen Anzahl von Flächen, deren jede wie $\mathfrak{O}$ im Abschnitt II aus Flächenstücken $\mathfrak{T}$ zusammengesetzt sei. Man benutze zur Zerlegung die Zylinder parallel den Bezugsachsen, die die Fläche $\mathfrak{O}$ berühren oder durch eine Kante der Stücke $\mathfrak{T}$ gehen. Ein Stück der Fläche $\mathfrak{O}$, das von Kanten und Berührungslinien dieser Zylinder begrenzt wird, durchsetzt jede zu einer der Bezugsebenen parallele Ebene, z. B. $x =$ const., in einer Kurve, längs deren y und z einsinnig wachsen, woraus sich die als möglich behauptete Zerlegung in den Einzelfällen leicht ergibt.

Die Gaußsche Integraltransformation überträgt sich ebenfalls auf die betrachteten allgemeinen Integrationsgebiete; dabei ist zu bedenken, daß ein zwei Gebieten $\mathfrak{H}$ gemeinsamer Oberflächenteil $\mathfrak{T}$ für beide Gebiete entgegengesetzte äußere Normalen N besitzt, so daß die auf beide Gebiete bezüglichen Integrale wie

$$\iint_{\mathfrak{T}} f(x, y, z) \cos(xN)\, dS$$

genau entgegengesetzte Werte haben, sich also heben, wenn man die zu allen Gebieten $\mathfrak{H}$ gehörigen Gleichungen

$$\iiint_{\mathfrak{H}} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\mathfrak{T}} f(x, y, z) \cos(xN)\, dS$$

addiert; rechts bleiben nur die Oberflächenteile übrig, die nicht zwei Gebieten $\mathfrak{H}$ gemein sind; also ist nur über die Oberfläche des Gesamt-

gebiets zu integrieren. Links erhält man das über den Gesamtinnenraum des Gebiets erstreckte Integral; die Gaußsche Transformation behält also schließlich genau dieselbe Gestalt wie bei dem einzelnen Gebiet $\mathfrak{H}$.

VI. Jetzt kann auch die in § 103 angedeutete Auffassung des dreifachen Integrals als einer Summe streng formuliert und gerechtfertigt werden.

Zerfalle das Raumgebiet $\mathfrak{K}$ in die Teilgebiete $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$, so daß

$$\iiint\limits_{\mathfrak{K}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{\nu} \iiint\limits_{\mathfrak{K}_\nu} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

und wende man auf die einzelnen Summanden rechts nach IV. die Mittelwertformel an; dann erhält man

$$\iiint\limits_{\mathfrak{K}_\nu} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu) \iiint\limits_{\mathfrak{K}_\nu} dx\, dy\, dz,$$

wobei $(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)$ ein bestimmter Punkt des Gebiets $\mathfrak{K}_\nu$ ist. Hat dieses den Rauminhalt K_ν, der nach III. durch das rechts auftretende Integral ausgedrückt wird, so folgt

$$\iiint\limits_{\mathfrak{K}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{\nu} K_\nu f(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)$$

und hieraus, wegen der Stetigkeit der Funktion f,

$$\iiint\limits_{\mathfrak{K}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{\nu} K_\nu f(x_\nu, y_\nu, z_\nu) + \varrho,$$

wobei (x_ν, y_ν, z_ν) ein willkürlich gewählter Punkt des Gebiets $\mathfrak{K}_\nu$ ist, und ϱ beliebig klein wird, wenn alle Gebiete $\mathfrak{K}_\nu$ beliebig klein werden; man kann, wenn dies geschieht, also setzen

$$\iiint\limits_{\mathfrak{K}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim \sum_{\nu} K_\nu f(x_\nu, y_\nu, z_\nu),$$

womit das Entsprechende bekannter Eigenschaften des einfachen und des Doppelintegrals erzielt ist.

§ 104. Wechsel der Unabhängigen im dreifachen Integral.

I. Für irgend ein Raumgebiet $\mathfrak{H}$ und seine Oberfläche $\mathfrak{O}$, die die Voraussetzungen von § 103, II. erfülle, sei es möglich, die beliebige stetige Funktion $f(x, y, z)$ in der Form

$$f(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial z}$$

zu schreiben, wie es z. B. bei einem dreiseitigen Normalbereich nach § 103, II. immer möglich ist, und gelte demnach die Gaußsche Integraltransformation

(1) $$\iiint\limits_{\mathfrak{H}} f\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\mathfrak{O}} R\cos(zN)\,dS.$$

Dabei sei N die äußere Normale. Sind α und β auf jedem der Stücke $\mathfrak{T}$, in die die Oberfläche $\mathfrak{O}$ zerfällt, die Unabhängigen, so hat man, wie schon in § 101 benutzt wurde, die Gleichungen

$$\varDelta\,.\cos(zN) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha, \quad dS = \varDelta\,.\,d\alpha\,d\beta,$$

unter der Voraussetzung, daß die Normale N mit den Richtungen $(d\alpha > 0,\ d\beta = 0)$ und $(d\alpha = 0,\ d\beta > 0)$ positiv orientiert liegt, d. h. so wie die Achsen z, x, y in dieser Folge. Diese Voraussetzung kann nötigenfalls durch Vertauschung von α und β immer verwirklicht werden. Die Gleichung (1) kann dann geschrieben werden

(2) $$\iiint\limits_{\mathfrak{H}} f\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\mathfrak{O}} R\,(x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha)\,d\alpha\,d\beta.$$

Jetzt seien die neuen Unabhängigen u, v, w mit den Koordinaten durch die Gleichungen

(3) $$x = \mathfrak{f}(u, v, w), \qquad y = \mathfrak{g}(u, v, w), \qquad z = \mathfrak{h}(u, v, w)$$

verbunden, und im Bereich der Größen u, v, w sei $\mathfrak{H}^0$ ein solches Gebiet, daß jedem seiner inneren Punkte durch die Gleichungen (3) ein innerer Punkt des Gebiets $\mathfrak{H}$ zugeordnet wird. Sei ferner $\mathfrak{O}^0$ die Oberfläche des Gebiets $\mathfrak{H}^0$, sie zerfalle in Stücke $\mathfrak{T}$, die in der $\alpha\beta$-Ebene denselben Gebieten $\mathfrak{T}'$ nach § 103, II. zugeordnet sind, wie die Stücke $\mathfrak{T}$, die Teile der Oberfläche $\mathfrak{O}$. Der Richtung von der Oberfläche $\mathfrak{O}^0$ nach dem Innern von $\mathfrak{H}^0$ hinein entspreche demgemäß die Richtung von $\mathfrak{O}$ nach dem Innern von $\mathfrak{H}$; die äußere Normale der Fläche $\mathfrak{O}^0$ liegt dann zu den Richtungen $(d\alpha > 0,\ d\beta = 0)$ und $(d\alpha = 0,\ d\beta > 0)$ ebenso wie vorher N, also positiv wie die Achsen zxy orientiert.

Alsdann kann man in die Gleichung (2) die Größen

$$x_\alpha = \mathfrak{f}_u\,.\,u_\alpha + \mathfrak{f}_v\,.\,v_\alpha + \mathfrak{f}_w\,.\,w_\alpha \quad \text{usf.}$$

einführen; man erhält durch einfache Rechnung

$$\begin{vmatrix} x_\alpha & x_\beta \\ y_\alpha & y_\beta \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{f}_u\,u_\alpha + \mathfrak{f}_v\,v_\alpha + \mathfrak{f}_w\,w_\alpha & \mathfrak{f}_u\,u_\beta + \mathfrak{f}_v\,v_\beta + \mathfrak{f}_w\,w_\beta \\ \mathfrak{g}_u\,u_\alpha + \mathfrak{g}_v\,v_\alpha + \mathfrak{g}_w\,w_\alpha & \mathfrak{g}_u\,u_\beta + \mathfrak{g}_u\,v_\beta + \mathfrak{g}_w\,w_\beta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{f}_u & \mathfrak{f}_v \\ \mathfrak{g}_u & \mathfrak{g}_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_\alpha & u_\beta \\ v_\alpha & v_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{f}_u & \mathfrak{f}_w \\ \mathfrak{g}_u & \mathfrak{g}_w \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_\alpha & u_\beta \\ w_\alpha & w_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{f}_v & \mathfrak{f}_w \\ \mathfrak{g}_v & \mathfrak{g}_w \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_\alpha & v_\beta \\ w_\alpha & w_\beta \end{vmatrix}$$

das Integral (2) nimmt daher die Gestalt

$$\iiint f\,d\,x\,d\,y\,d\,z = J_u + J_v + J_w$$

an, wobei

$$J_u = \iint\limits_{\mathfrak{O}_0} R\,(x_v\,y_w - x_w\,y_v)\,\frac{\partial\,(v,\,w)}{\partial\,(\alpha,\,\beta)}\,d\,\alpha\,d\,\beta,$$

$$J_v = \iint\limits_{\mathfrak{O}_0} R\,(x_w\,y_u - x_u\,y_w)\,\frac{\partial\,(w,\,u)}{\partial\,(\alpha,\,\beta)}\,d\,\alpha\,d\,\beta,$$

$$J_w = \iint\limits_{\mathfrak{O}_0} R\,(x_u\,y_v - x_v\,y_u)\,\frac{\partial\,(u,\,v)}{\partial\,(\alpha,\,\beta)}\,d\,\alpha\,d\,\beta$$

gesetzt ist.

Auf jedes dieser Integrale wenden wir nun im $u\,v\,w$-Raume die Gaußsche Integraltransformation an, und zwar bei J_w nach Maßgabe der mit der Gleichung (2) gleichgebildeten

$$\iiint\limits_{\mathfrak{H}^0} \frac{\partial\,W}{\partial\,w}\,d\,v\,d\,w = \iint\limits_{\mathfrak{O}^0} W(u_\alpha\,v_\beta - u_\beta\,v_\alpha)\,d\,\alpha\,d\,\beta,$$

die genau so gilt, weil betreffs der Orientierung der äußeren Normale N^0 entsprechendes gilt wie für die Normale N.

Setzt man $W = R\,(x_u\,y_v - x_v\,x_u)$, so ergibt sich

$$J_w = \iiint\limits_{\mathfrak{H}^0} \frac{\partial\,[R\,(x_u\,y_v - x_v\,y_u)]}{\partial\,w}\,d\,u\,d\,v\,d\,w.$$

Hier ist nur nötig, daß die unter dem Integralzeichen stehende Ableitung existiert und im Gebiet $\mathfrak{H}^0$ stetig ist. Das ist jedenfalls sicher, wenn $f(x,\,y,\,z)$ im Gebiet $\mathfrak{H}$ stetige Ableitungen besitzt. Wir halten diese Voraussetzung vorläufig fest.

Ebenso erhält man, indem man u und v durch v und w oder w und u ersetzt,

$$J_u = \iiint\limits_{\mathfrak{H}^0} \frac{\partial\,[R\,(x_v\,y_w - x_w\,y_v)]}{\partial\,u}\,d\,u\,d\,v\,d\,w,$$

$$J_v = \iiint\limits_{\mathfrak{H}^0} \frac{\partial\,[R\,(x_w\,y_u - x_u\,y_w)]}{\partial\,v}\,d\,u\,d\,v\,d\,w.$$

In der Summe $J_u + J_v + J_w$ erscheint also unter dem Integralzeichen zunächst eine Anzahl mit dem Faktor R behafteter Glieder; sie verschwinden vermöge der offenbaren Identität

$$\frac{\partial\,(x_v\,y_w - x_w\,y_v)}{\partial\,u} + \frac{\partial\,(x_w\,y_u - x_u\,y_w)}{\partial\,v} + \frac{\partial\,(x_u\,y_v - x_v\,y_u)}{\partial\,w} = 0,$$

auf deren linker Seite z. B. ein Glied $x_{uv} y_w$ mit dem Gliede $- x_{uv} y_w$ sich hebt usf. Differenziert man weiter jedesmal den Faktor R, so erhält man die Gesamtsumme

$$\begin{vmatrix} R_u & x_u & y_u \\ R_v & x_v & y_v \\ R_w & x_w & y_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_x x_u + R_y y_u + R_z z_u & x_u & y_u \\ R_x x_v + R_y y_v + R_z z_v & x_v & y_v \\ R_x x_w + R_y y_w + R_z z_w & x_w & y_w \end{vmatrix},$$

und da die Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_u & x_u & y_u \\ x_v & x_v & y_v \\ x_w & x_w & y_w \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} y_u & x_u & y_u \\ y_v & x_v & y_v \\ y_w & x_w & y_w \end{vmatrix}$$

verschwinden, bleiben nur die mit R_z oder $f(x, y, z)$ behafteten Glieder übrig; in den Zeichen des § 9 ergibt sich

$$(4) \qquad J_u + J_v + J_w = \iiint_{\mathfrak{H}^0} f(x, y, z) \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \, du \, dv \, dw$$

$$= \iiint_{\mathfrak{H}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Will man sich von der Voraussetzung, $f(x, y, z)$ habe stetige Ableitungen, frei machen, so setzt man zunächst $f = 1$ und drückt dann die beiden hier gleich gefundenen Integrale nach § 103, VI. als Summen aus. Dann kann auf Grund des Mittelwertsatzes (§ 103, IV.) die in § 100, II. zu entsprechendem Zweck durchgeführte Schlußreihe wiederholt werden, und zeigt, daß $f(x, y, z)$ nur stetig zu sein braucht.

II. Eine wesentliche Voraussetzung war die betreffs der Normale N^0 gemachte. Wir können sie ersetzen durch die greifbarere Annahme, im Gebiet $\mathfrak{H}^0$ sei überall

$$(5) \qquad \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \geqq 0.$$

Betrachtet man bei dieser Annahme irgend drei Strecken im uvw-Raume, deren Komponenten $d_\nu u$, $d_\nu v$, $d_\nu w$ sind, mit $\nu = 1, 2, 3$, so sind die entsprechenden Richtungen im xyz-Raum gegeben durch die Strecken mit den Komponenten

$$d_\nu x = x_u \, d_\nu u + x_v \, d_\nu v + x_w \, d_\nu w,$$
$$d_\nu y = y_u \, d_\nu u + y_v \, d_\nu v + y_w \, d_\nu w,$$
$$d_\nu z = z_u \, d_\nu u + z_v \, d_\nu v + z_w \, d_\nu w.$$

Diese sind nach § 23 positiv, d. h. wie die Achsen xyz in dieser Folge orientiert, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y & d_1 z \\ d_2 x & d_2 y & d_2 z \\ d_3 x & d_3 y & d_3 z \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \begin{vmatrix} d_1 u & d_1 v & d_1 w \\ d_2 u & d_2 v & d_2 w \\ d_3 u & d_3 v & d_3 w \end{vmatrix}$$

positiv ist; ihr rechts hingeschriebener Ausdruck folgt aus dem Multiplikationssatze der Determinanten. Bei der Annahme (5) sind also entsprechende Systeme von je drei nicht in eine Ebene fallenden Richtungen im xyz-Raume und im uvw-Raume gleich orientiert, beide positiv oder beide negativ.

Nun muß die Außenrichtung N^0 als entsprechende an der Oberfläche $\mathfrak{O}$ eine Außenrichtung ergeben, da dem Innengebiet $\mathfrak{H}^0$ das Innengebiet $\mathfrak{H}$ entsprechen soll; jede Außenrichtung liegt aber mit zwei bestimmten Tangentialrichtungen der Oberfläche $\mathfrak{O}$ ebenso orientiert, wie die äußere Normale N; somit sind die Richtungen N_0, $(d\alpha > 0,\ d\beta = 0)$, $(d\alpha = 0,\ d\beta > 0)$ im uvw-Raume, und die Richtungen N, $(d\alpha > 0,\ d\beta = 0)$, $(d\alpha = 0,\ d\beta > 0)$ im xyz-Raume gleich orientiert.

Die Annahme (5) läßt sich übrigens immer verwirklichen, wenn die Funktionaldeterminante $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ im Gebiet $\mathfrak{H}^0$ keinen Zeichenwechsel aufweist, indem man zwei der Größen u, v, w vertauscht und dadurch die Determinante in ihr Entgegengesetztes überführt; man kann also die Transformationsformel (4) durch die etwas allgemeinere

$$(6) \qquad \iiint\limits_{\mathfrak{H}} f\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\mathfrak{H}^0} f \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

ersetzen.

III. Führt man für u, v, w ein weiteres System von Unabhängigen u_1, v_1, w_1 ein, so ist nach dem Multiplikationssatz der Determinanten

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, v_1, w_1)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(u_1, v_1, w_1)},$$

der Integrand auf der rechten Seite der Transformationsgleichung (6) behält also seine Form, wenn man von u, v, w zu u_1, v_1, w_1 nach eben der in der Gleichung (6) ausgedrückten Regel übergeht; man kann sagen, daß

$$d\tau = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du\, dv\, dw$$

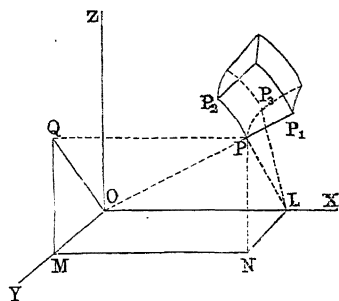
ein invariantes Integrationselement ist, mit dem z. B. die Gaußsche Integraltransformation die beiderseits invariante Gestalt gewinnt, in der man dann auch, wenn die Bedeutung der Zeichen $d\tau$ und dS festgehalten wird, die Integralzeichen einfach schreiben kann:

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{\partial P}{\partial z}\, d\tau = \int\limits_{\mathfrak{O}} P \cos(z\, N)\, dS.$$

Dem Element $d\tau$ kann auch eine anschauliche Bedeutung gegeben werden. Es ist nach § 23 bei positiver Funktionaldeterminante der Inhalt eines Spats, dessen eine Ecke der Punkt x, y, z ist, während die anderen die Punkte $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ sind, die erhalten werden, indem man in den Ausdrücken

$$dx = x_u\, du + x_v\, dv + x_w\, dw \quad \text{usf.}$$

entweder eins oder zwei, oder keins der Differentiale du, dv, dw verschwinden läßt, was offenbar sieben Möglichkeiten ergibt. Die vom Ausgangspunkte (x, y, z) ausgehenden Kanten des Spats sind Tangenten der Kurven, längs deren jeweils zwei der Größen u, v, w konstant gesetzt werden.

Fig. 91.

§ 105. Anwendungen.

I. Im Falle zylindrischer Koordinaten setzt man etwa

$$x = x, \quad y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta,$$
$$u = r, \quad v = \theta, \quad w = x;$$

die Linien, auf denen zwei der Größen r, θ, x fest bleiben, sind die Parallelen zur x-Achse, die Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen, und deren Ebenen auf dieser senkrecht stehen, und die Radien dieser Kreise. Die Rechnung ergibt

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = r.$$

Der in § 104, III. bezeichnete Spat wird in Fig. 91 begrenzt durch die Strecken $PP_2 = dr$, $PP_3 = r\, d\theta$, und eine nicht gezeichnete Strecke, die längs der Geraden PQ läuft.

Bei sphärischen Polarkoordinaten setzt man nach Fig. 91

$$OP = r, \qquad \measuredangle\, LOP = \theta, \qquad \measuredangle\, NLP = \varphi,$$
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\theta\sin\varphi;$$

der betreffende Spat hat die Kanten

$$PP_1 = dr, \quad PP_3 = r\sin\theta\, d\varphi, \quad PP_2 = r\, d\theta;$$

sein Inhalt ist also, da er ein Quader ist,

$$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

was mit der leicht ausgerechneten Formel

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin\theta$$

übereinstimmt.

Das dreifache Integral erscheint immer, wenn neue Unabhängige eingeführt werden, als Summe von Elementen

$$d\tau = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\, du\, dv\, dw,$$

die in neuer Weise abgegrenzt sind, jedes multipliziert mit dem zugehörigen Wert des Integranden, während man ursprünglich die quaderförmigen Elemente $d\tau = dx\, dy\, dz$ nahm. Summiert man zunächst über die Elemente, in denen u und v feste Werte haben, so erhält man die Teilsumme

$$du\, dv \int f \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\, dw;$$

weiter ist, indem man nur u festhält und v laufen läßt,

$$du \int dv \int f \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\, dw$$

die Summe der Elemente $f\, d\tau$ über eine gewisse Schicht, in der $u = \text{const.}$; endlich die Summe dieser Schichtsummen gibt das Integral. Diese etwas unbestimmten Betrachtungen leiten in den Beispielen an, die Grenzen der einzelnen Integrationen zu bestimmen.

II. a) Trägheitsmoment einer Kugel bezüglich eines Durchmessers. Der Durchmesser sei die x-Achse, der Mittelpunkt der Koordinatenanfang; wird die Dichtigkeit $= 1$ genommen, so ist das Trägheitsmoment

$$M = \iiint (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

oder in den oben eingeführten sphärischen Polarkoordinaten, da $y^2 + z^2 = r^2 \sin^2\theta$,

$$M = \iiint r^4 \sin^3\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int r^2 \sin^2\theta\, d\tau.$$

In einem Kugeloktanten, z. B. demjenigen, in welchem x, y, z positiv sind, läuft θ und φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, r von 0 bis a, wenn das der Radius der Kugel ist; genauer ist also

$$\tfrac{1}{8} M = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^a dr \,.\, r^4 \sin^3\theta.$$

Das innerste Integral gibt die auf einem Radius liegenden Elemente $f\,d\tau$; ihre Summe ist

$$d\theta\, d\varphi \int_0^a r^4 \sin^3\theta\, dr = \sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi \cdot \frac{a^5}{5}\cdot$$

Die Summe dieser Teilsummen bei festem φ gibt eine durch die x-Achse gehende Schicht; da θ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ läuft, erhält man nach § 77, (5)

$$\frac{a^5}{5} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3\theta\, d\theta = -\frac{\cos\theta}{3}(\sin^2\theta + 2)\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} \cdot \frac{a^5}{5} d\varphi$$
$$= \frac{2\,a^5}{15} d\varphi.$$

Die Summe dieser Schichtensummen gibt, da φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ läuft,

$$\frac{\pi a^5}{15} = \tfrac{1}{8} M, \quad M = \frac{8\pi a^5}{15}.$$

b) Schwerpunkt einer Halbkugel. Wir nehmen von der eben betrachteten Kugel die Hälfte $x > 0$. In ihr läuft θ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, φ von 0 bis 2π, r von 0 bis a. Der Oberfläche des hierdurch bestimmten Quaders im $r\theta\varphi$-Raume, des Gebiets $\mathfrak{H}^0$ der allgemeinen Theorie, entspricht die Oberfläche der Halbkugel mit der Maßgabe, daß der Ebene $r = 0$ nur der Mittelpunkt, der Ebene $\theta = 0$ der längs der x-Achse liegende Radius der Halbkugel, also eine im Innern des Integrationsgebiets laufende Linie entspricht. Um also die Oberflächen der betrachteten Gebiete in xyz und $r\theta\varphi$ einander besser entsprechen zu lassen, nehmen wir nur die Hälfte der Halbkugel als Integrationsgebiet, so daß φ die Strecke $0 \ldots \pi$ durchläuft. Dann entspricht der Oberfläche des $r\theta\varphi$-Quaders die Oberfläche der Viertelkugel, allerdings nicht in eindeutig umkehrbarer Weise, was aber auch die allgemeine Theorie des § 104 nicht verlangt.

Ist nun A der Rauminhalt der Viertelkugel, so wird die x-Koordinate des Schwerpunktes durch die Gleichung

$$A\xi = \int x\, d\tau$$

definiert, rechts über die Viertelkugel integriert, also genauer

$$A\xi = \int_0^a dr \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \,.\, r^3 \cos\theta \sin\theta,$$

$$= \int_0^a dr \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \cdot \pi r^3 \cos\theta \sin\theta,$$

$$= \frac{\pi a^4}{4} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi a^4}{8}.$$

Nun ist $A = \frac{1}{3}\pi a^3$, also $\xi = 3a/8$.

Da dies auch die Höhe des Schwerpunktes der anderen Hälfte der Halbkugel über der Ebene $x = 0$ ist, so hat der Schwerpunkt der Halbkugel, der auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Viertelkugeln liegt, dieselbe Höhe und liegt aus Symmetriegründen auf der x-Achse.

III. Wir bringen noch die Gaußsche Integraltransformation auf eine invariante Form, die für die physikalischen Anwendungen brauchbar ist.

Seien X, Y, Z mit ihren ersten Ableitungen als stetige Funktionen des Ortes in einem Gebiet $\mathfrak{K}$ gegeben, dessen Oberfläche $\mathfrak{O}$ ist, und auf das die Gaußsche Integraltransformation angewandt werden kann; nachdem gegebenenfalls die Unabhängigen α und β wie in § 103 vertauscht sind, gelten auf der Oberfläche $\mathfrak{O}$ für die äußere Normale die Gleichungen

$$\Delta \,.\, \cos(xN) = y_\alpha z_\beta - y_\beta z_\alpha, \qquad dS = \Delta \, d\alpha \, d\beta,$$

also nach einer in § 103 durchgeführten Rechnung

$$X\cos(xN) + Y\cos(yN) + Z\cos(zN)$$
$$= K\frac{\partial(v,w)}{\partial(\alpha,\beta)} + L\frac{\partial(w,u)}{\partial(\alpha,\beta)} + M\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)},$$

wobei gesetzt ist

$$(1) \quad K = \begin{vmatrix} X & x_v & x_w \\ Y & y_v & y_w \\ Z & z_v & z_w \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} X & x_w & x_u \\ Y & y_w & y_u \\ Z & z_w & z_u \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} X & x_u & x_v \\ Y & y_u & y_v \\ Z & z_u & z_v \end{vmatrix}$$

und u, v, w beliebige Koordinaten im allgemeinen Sinne bedeuten. Die Gaußschen Gleichungen geben nun

$$\int_{\mathfrak{K}} X_x \, d\tau = \int_{\mathfrak{O}} X \cos(xN) \, dS, \quad \int_{\mathfrak{K}} Y_y \, d\tau = \int_{\mathfrak{O}} Y \cos(yN) \, dS,$$

$$\int_{\mathfrak{K}} Z_z \, d\tau = \int_{\mathfrak{O}} Z \cos(zN) \, dS,$$

also zusammenaddiert

$$\int_{\mathfrak{K}} d\tau (X_x + Y_y + Z_z) = \int_{\mathfrak{O}} [(X \cos(xN) + Y \cos(yN) + Z \cos(zN)] \, dS.$$

Versteht man unter X, Y, Z die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{V}$, d. h. verwandelt man sie bei Einführung neuer Bezugsachsen wie die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, so ist in der letzten Gleichung der Integrand rechts die nach N genommene Komponente des Vektors $\mathfrak{V}$, also $\mathfrak{V}_N$; der Integrand links heißt die Divergenz, $\operatorname{div} \mathfrak{V}$, und man schreibt

$$\int_{\mathfrak{K}} d\tau \operatorname{div} \mathfrak{V} = \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{V}_N \, dS, \tag{2}$$

wobei sich $\operatorname{div} \mathfrak{V}$ als eine vom Bezugssystem unabhängige Größe erweist, die man auch in beliebigen Größen u, v, w ausdrücken kann.

Die Gleichungen (1) ergeben nämlich durch die in § 104 durchgeführte Rechnung sofort

$$K_u + L_v + M_w = (X_x + Y_y + Z_z) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}; \tag{3}$$

wenn also

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} > 0$$

angenommen wird, folgt

$$(K_u + L_v + M_w) \, du \, dv \, dw = \operatorname{div} \mathfrak{V} \, . \, d\tau,$$

wodurch es schon möglich wird, u, v, w in die Gleichung (2) einzuführen.

Jetzt werde die Gleichung

$$X dx + Y dy + Z dz = U du + V dv + W dw$$

angesetzt, wodurch wir U, V, W als Komponenten des Vektors $\mathfrak{V}$ im System der allgemeinen Koordinaten u, v, w definieren; ferner sei das allgemeine Bogenelement im Raume durch die Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E_{11} du^2 + E_{22} dv^2 + E_{33} dw^2$$
$$+ 2 E_{23} dv dw + 2 E_{31} dw du + 2 E_{12} du dv$$

in den Differentialen du, dv, dw ausgedrückt, wobei z. B.

$$E_{11} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad E_{12} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \ldots$$

zu setzen ist. Man findet dann aus den Gleichungen (1) mittels des Multiplikationssatzes der Determinanten

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right)^2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = E$$

$$K \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = K\sqrt{E} = \begin{vmatrix} U & V & W \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix}.$$

$$L\sqrt{E} = \begin{vmatrix} U & V & W \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \\ E_{11} & E_{12} & E_{13} \end{vmatrix}, \quad M\sqrt{E} = \begin{vmatrix} U & V & W \\ E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich für $\operatorname{div}\mathfrak{V}$ nach (3) ein allgemeiner, nur in den Größen E und U, V, W ausgedrückter Wert

$$(5) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{V} = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial w}\right),$$

wobei K, L, M aus den Formeln (4) zu entnehmen sind.

Ist im besonderen, wie bei sphärischen Polarkoordinaten und sonst meistens

$$ds^2 = E_{11}\,du^2 + E_{22}\,dv^2 + E_{33}\,dw^2,$$

$$E_{\nu\nu} > 0, \quad E_{12} = E_{23} = E_{31} = 0, \quad E = E_{11}E_{22}E_{33},$$

so nennt man die Koordinaten u, v, w orthogonal und findet

$$(6) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{V} = \frac{1}{\sqrt{E_{11}E_{22}E_{33}}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(U\sqrt{\frac{E_{22}E_{33}}{E_{11}}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(V\sqrt{\frac{F_{33}E_{11}}{E_{22}}}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(W\sqrt{\frac{E_{11}E_{22}}{E_{33}}}\right)\right\}.$$

Sind u, v, w einfach neue rechtwinklige Koordinaten, so ist $E_{11} = E_{22} = E_{33} = 1$, also

$$\operatorname{div}\mathfrak{V} = \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial w},$$

womit sich die Divergenz in der gewöhnlichen Form als unabhängig vom rechtwinkligen Bezugssystem herausstellt.

Die Formeln (5) und (6) werden besonders häufig angewandt, wenn $\mathfrak{V}$, wie man sagt, der **Gradient** einer Funktion $F(x, y, z)$ ist, d. h. wenn

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \mathfrak{V} = \operatorname{grad} F.$$

Dann ist offenbar

$$\operatorname{div} \mathfrak{V} = \operatorname{div} \operatorname{grad} F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta F,$$

und wenn $F(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$ gesetzt wird, findet man z. B. bei orthogonalen Koordinaten u, v, w nach (6)

$$\Delta F = \Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{E_{11} E_{22} E_{33}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{\frac{E_{22} E_{33}}{E_{11}}} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{\frac{E_{33} E_{11}}{E_{22}}} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\sqrt{\frac{E_{11} E_{22}}{E_{33}}} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) \right\}.$$

Bei sphärischen Polarkoordinaten ist

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi^2,$$
$$u = r, \quad v = \theta, \quad w = \varphi, \quad E_{11} = 1, \quad E_{22} = r^2, \quad E_{33} = r^2 \sin^2 \theta,$$
$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$

Bei zylindrischen Koordinaten ist einfacher

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad z = z, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$
$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$

In der Ebene setzt man ebenfalls

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

und findet aus der letzten Formel für die ebenen Polarkoordinaten

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^2}.$$

§ 106. Der Greensche Satz.

Ist wiederum $\mathfrak{K}$ ein Gebiet, auf das die Gaußsche Integraltransformation angewandt werden kann, $\mathfrak{O}$ seine Oberfläche, N die äußere Normale; sind ferner U, V mit ihren ersten und zweiten

Ableitungen im Gebiet $\mathfrak{K}$ stetige Funktionen des Ortes, so gibt die erwähnte Transformation

$$\int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial}{\partial x}\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right) d\tau = \int_{\mathfrak{O}} U \frac{\partial V}{\partial x} \cos(xN)\, dS$$

nebst zwei ähnlichen Gleichungen, in denen x durch y und z ersetzt wird; addiert man und benutzt die Bezeichnung Δ nach § 105, so folgt

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{K}} d\tau \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \int_{\mathfrak{K}} U \Delta V\, d\tau = \int_{\mathfrak{O}} U \frac{\partial V}{\partial N}\, dS;$$

dabei ist

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos(xN) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(yN) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(zN)$$

gesetzt, und diese Bezeichnung kann dadurch gerechtfertigt werden, daß man auf der Normale N den Abstand von einem festen Punkte in der Außenrichtung N positiv, in der entgegengesetzten negativ gemessen als Unabhängige N einführt, womit sich dann

$$\cos(xN) = \frac{dx}{dN}, \quad \cos(yN) = \frac{dy}{dN}, \quad \cos(zN) = \frac{dz}{dN}$$

ergeben würde, also für die Größe

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dN} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dN} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dN}$$

in der Tat der angegebene Ausdruck.

Vertauscht man U und V in der Gleichung (1) und subtrahiert, so ergibt sich

$$(2) \qquad \int_{\mathfrak{K}} (U \Delta V - V \Delta U)\, d\tau = \int_{\mathfrak{O}} \left(U \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial U}{\partial N}\right) dS.$$

Diese Gleichung oder die Gleichung (1) nennt man den Greenschen Satz.

Setzt man im besonderen

$$V = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad U = 1,$$

und versteht unter A und P die Punkte (ξ, η, ζ) und (x, y, z), so ist

$$\varDelta V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x-\xi}{r^3} = -\frac{\cos(xr)}{r^2},$$

wobei unter dem Zeichen cos durch r die Richtung AP bezeichnet werde; die obige Formel für $\partial V/\partial N$ gibt also

$$-\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\cos(xr)\cos(xN) + \cos(yr)\cos(yN) + \cos(zr)\cos(zN)}{r^2},$$

oder nach einer oft gebrauchten Formel des § 23

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\cos(rN)}{r^2}.$$

Im Punkte A, d. h. wenn P in die Lage A rückt, sind die Größen $\partial V/\partial x$ usf. unstetig; die Voraussetzungen des Greenschen Satzes sind also nur erfüllt, wenn der Punkt A außerhalb des Gebiets $\mathfrak{K}$ liegt, und dann gibt die Formel (1)

$$(3)\quad J(\mathfrak{K}) = \int\limits_{\mathfrak{K}} d\tau \left\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{O}} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -\int\limits_{\mathfrak{O}} U \frac{\cos(rN)\,dS}{r^2}.$$

Den Wert des Integrals über $\mathfrak{O}$ kann man im besonderen ausrechnen, wenn $\mathfrak{O}$ durch ein Stück einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkt A und dem Radius a ersetzt wird, auf der $r = a$ ist und für N die nach A hin gerichtete Normale genommen werde, so daß $\cos(rN) = -1$; dann ergibt sich

$$(4)\qquad \int U\,dS \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{a^2}\int U\,dS = 4\pi\alpha U_m,$$

wenn der Flächeninhalt des Kugelstücks sich zu dem der ganzen Kugelfläche wie $\alpha : 1$ verhält, und U_m ein Mittelwert von U auf dem betrachteten Stück der Kugel $r = a$ ist.

Jetzt liege A im Innern des Gebiets $\mathfrak{K}$, dem auch die eben beschriebene Kugel angehört; scheidet man diese aus, so bleibe von $\mathfrak{K}$ ein Rest $\mathfrak{K}'$ übrig; auf ihn kann der Greensche Satz angewandt werden und seine Oberfläche, die wir $\mathfrak{O}'$ nennen, besteht aus der Oberfläche $\mathfrak{O}$ und der Kugelfläche $r = a$, an der die äußere Normale des Gebiets $\mathfrak{K}'$ nach A hin gerichtet ist, wie in der Formel (4). Man erhält hiernach auf Grund der Formel (3)

$$J(\mathfrak{K}') = \int\limits_{\mathfrak{O}'} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \int\limits_{\mathfrak{O}} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \int\limits_{r=a} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS.$$

Läßt man a unendlich abnehmen, so nähert sich das letzte Glied nach (4) mit $\alpha = 1$ dem Grenzwert $4\pi U(\xi, \eta, \zeta)$ an; mithin strebt auch das Integral $J(\mathfrak{K}')$ einem Grenzwert zu, den wir als das über das Gebiet $\mathfrak{K}$ erstreckte uneigentliche Integral $J(\mathfrak{K})$ bezeichnen:

$$(5) \qquad J(\mathfrak{K}) = \int\limits_{\mathfrak{O}} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS + 4\pi U(\xi, \eta, \zeta).$$

Endlich liege A auf der Oberfläche $\mathfrak{O}$ in einem Punkte, in dessen Umgebung die Normale sich stetig ändert. Dann kann der Radius a so klein genommen werden, daß, wenn P ein Punkt der Kugel und der Fläche $\mathfrak{O}$ ist, die Richtung AP einen beliebig kleinen Winkel mit der Tangentialebene des Punktes A bildet; die Schnittlinie der Oberfläche $\mathfrak{O}$ mit der Kugel $r = a$ weicht dann beliebig wenig von dem durch die Tangentialebene auf der Kugel ausgeschnittenen größten Kreise ab. Legt man also das in das Gebiet $\mathfrak{K}$ fallende Stück der Kugel in der Formel (4) zugrunde, so ist α nahezu $= \frac{1}{2}$, genauer

$$(6) \qquad \lim_{a=0} \alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Nennen wir nun $\mathfrak{O}'$ den Rest der Fläche $\mathfrak{O}$, der außerhalb der Kugel $r = a$ liegt, so begrenzt diese mit $\mathfrak{O}'$ ein Gebiet, auf welches die Formel (3) angewandt werden kann; man erhält so

$$J(\mathfrak{K}') = \int\limits_{\mathfrak{O}'} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \int\limits_{r=a} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS,$$

wobei im zweiten Integral über den in das Gebiet $\mathfrak{K}$ fallenden Teil der Kugeloberfläche integriert wird und N als äußere Normale des von $\mathfrak{K}$ übrig bleibenden Restes, für den $r > a$, so gewählt wird, wie in der Formel (4). Man erhält nach dieser

$$J(\mathfrak{K}') = \int\limits_{\mathfrak{O}'} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) + 4\pi\alpha U_m,$$

also nach (6), wenn wir wieder das uneigentliche Integral $J(\mathfrak{K})$ einführen und

$$(7) \qquad \int\limits_{\mathfrak{O}} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \lim_{a=0} \int\limits_{\mathfrak{O}'} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

setzen, und bedenken, daß $\lim\limits_{a=0} U_m = U(\xi, \eta, \zeta)$ ist,

$$(8) \qquad J(\mathfrak{K}) = \int\limits_{\mathfrak{O}} U \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS + 2\pi U(\xi, \eta, \zeta).$$

Die Ergebnisse (3), (5), (8) geben den Wert des Integrals J in den Fällen, daß A außerhalb, innerhalb oder auf der Fläche $\mathfrak{O}$ liegt.

Eine geometrische Deutung dieser drei Formeln liegt im Falle $U = 1$ nahe, in welchem $J(\mathfrak{K}) = J(\mathfrak{K}') = 0$ ist. Stellen wir uns das Flächenelement dS als kleine ebene Scheibe vor, so ist $dS \cos (rN)$ die Projektion dieser Scheibe auf eine um A beschriebene Kugelfläche mit dem Radius r, positiv oder negativ genommen, je nachdem die nach der Richtung N gewandte Seite des Elements dS dem Punkte A abgewandt oder zugewandt ist. Überträgt man diese sphärische Projektion durch die Radien r auf die Kugelfläche $r = 1$ mit dem Mittelpunkte A, so erhält man ein Element von der Größe $dS \cos (rN)/r^2$, das man als scheinbare Größe des Elements S, von A gesehen, betrachten kann. Addiert man alle diese scheinbaren Größen, wie es durch die Integration über $\mathfrak{O}$ angedeutet wird, so erhält man die Vollkugel vom Radius Eins, wenn A im Innern der Fläche $\mathfrak{O}$ liegt, der Formel (5) gemäß, die Halbkugel der Formel (8) gemäß, wenn A ein Punkt der Fläche $\mathfrak{O}$ ist, und Null der Formel (3) gemäß, wenn A außerhalb dieser Fläche liegt; in letzterem Falle hat man sozusagen ebenso viele dem Punkte A abgewandte wie zugewandte Elemente, wenn jedes mit seiner scheinbaren Größe in Ansatz gebracht wird.

§ 107. Die uneigentlichen Integrale der Potentialtheorie.

I. Ist in dem als Integrationsgebiet brauchbaren Raume $\mathfrak{K}$ die Größe ϱ als stetige Funktion von x, y, z gegeben, ist ferner $A(\xi, \eta, \zeta)$ ein beliebiger Punkt und

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

so ist

$$U(\xi, \eta, \zeta) = U = \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\varrho \, d\tau}{r}$$

das Potential einer mit der Dichtigkeit ϱ im Raume $\mathfrak{K}$ verteilten Masse im Punkte A, dem Angriffspunkte; x, y, z sind die zum Raumelement $d\tau$ gehörigen Koordinaten. Liegt A außerhalb des Raumes $\mathfrak{K}$, so bleibt $1/r$ bei der Integration stetig.

Das Potential U ist leicht zu berechnen, wenn $\mathfrak{K}$ eine Kugel vom Radius a um den Koordinatenanfangspunkt O und die Dichtigkeit konstant ist, etwa $= \varrho_0 > 0$. Liege A auf der positiven x-Achse außerhalb der Kugel, so daß

$$\eta = \zeta = 0, \quad \xi > a,$$

und werde für den Massenpunkt P in sphärischen Polarkoordinaten

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta\cos\varphi, \quad z = R\sin\theta\sin\varphi$$

gesetzt; dann ist $\sphericalangle AOP = \theta$, also nach einer trigonometrischen Formel

$$r^2 = R^2 + \xi^2 - 2R\xi\cos\theta;$$

ferner ist nach § 105

$$d\tau = R^2 \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\varphi;$$

da nun R von 0 bis a, θ von 0 bis π, φ von 0 bis 2π läuft, folgt

$$U = \int_{\mathfrak{K}} \varrho_0 \frac{d\tau}{r} = \varrho_0 \int_0^a dR \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^2 \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{R^2 + \xi^2 - 2R\xi\cos\theta}},$$

also, wenn man zunächst nach θ integriert, wobei die Formel

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{R^2 + \xi^2 - 2R\xi\cos\theta}} = \frac{1}{R\xi} \sqrt{R^2 + \xi^2 - 2R\xi\cos\theta} \,\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

anzuwenden und, da $\xi > a \geqq R$,

$$\sqrt{R^2 + \xi^2 - 2R\xi} = \xi - R, \qquad \sqrt{R^2 + \xi^2 - 2R\xi\cos\theta}\,\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 2R$$

zu setzen ist,

$$U = \varrho_0 \int_0^a dR \int_0^{2\pi} \frac{2R^2}{\xi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho_0 \frac{1}{\xi};$$

das ist die Masse der Kugel, dividiert durch den Abstand des Angriffspunktes A von ihrem Mittelpunkte.

Nimmt man für $\mathfrak{K}$ eine Kugelschale vom inneren Radius b, vom äußeren Radius a, so daß $a > b$, und liegt A im Hohlraum, also $\xi < b$, so ist allgemein bei der Integration $\xi < R$, also

$$\sqrt{R^2 + \xi^2 - 2R\xi} = R - \xi, \qquad \sqrt{R^2 + \xi^2 - 2R\xi\cos\theta}\,\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 2\xi,$$

$$U = \varrho_0 \int_b^a dR \int_0^{2\pi} 2R \, d\varphi = 2\pi \varrho_0 (a^2 - b^2);$$

das Potential ist im Hohlraum konstant.

Ist allgemein der Abstand des Punktes A von den Punkten des Raumes $\mathfrak{K}$ größer als α, also $r > \alpha$, und $|\varrho| < \varrho_0$, so ist offenbar

$$|U| < \frac{\varrho_0}{\alpha} \int d\tau, \quad |U| < \frac{K\varrho_0}{\alpha},$$

wobei K den Rauminhalt des Raumes $\mathfrak{K}$ bedeutet. Ähnlich finden wir für das Integral

$$V = \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\lambda \varrho \, d\tau}{r^2},$$

wenn λ eine stetige Funktion des Ortes im Gebiet $\mathfrak{K}$ und $|\lambda| < 1$ ist, die Ungleichung

$$|V| < \frac{K \varrho_0}{\alpha^2}.$$

II. Liegt A innerhalb des Raumes $\mathfrak{K}$, so hat das Integral U zunächst keinen Sinn, erhält aber einen solchen durch einen Grenzübergang. Wir beschreiben um A eine Kugel mit dem Radius ε, die wir, soweit sie im Gebiet $\mathfrak{K}$ liegt, (ε) nennen; $\mathfrak{K}_\varepsilon$ sei der Rest des Gebiets $\mathfrak{K}$ nach Abzug der Kugel (ε). Dann kann das Integral

$$U_\varepsilon = \int\limits_{\mathfrak{K}_\varepsilon} \frac{\varrho \, d\tau}{r}$$

gebildet werden, und wir zeigen, daß

$$U = \lim_{\varepsilon = 0} U_\varepsilon$$

ein endlicher Wert ist.

Wir betrachten weiter, wenn $\varepsilon > \varepsilon_1$, das Gebiet zwischen den Kugeln $r = \varepsilon$ und $r = \varepsilon_1$ und nennen es, soweit es im Gebiet $\mathfrak{K}$ liegt, $(\varepsilon \, \varepsilon_1)$. Dann läßt sich das Integral

$$\int\limits_{(\varepsilon \varepsilon_1)} \frac{\varrho \, d\tau}{r}$$

bilden; setzt man

$$x - \xi = r \cos\theta, \quad y - \eta = r \sin\theta \cos\varphi, \quad z - \zeta = r \sin\theta \sin\varphi,$$

so daß sphärische Polarkoordinaten mit dem Mittelpunkte A eingeführt werden, so ist nach § 105

$$d\tau = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

zu setzen und man erhält

$$\int\limits_{(\varepsilon \varepsilon_1)} \frac{\varrho \, d\tau}{r} = \int\limits_{(\varepsilon \varepsilon_1)} \varrho \, r \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Ist nun im ganzen Gebiet $\mathfrak{K}$ immer $|\varrho| < g$ und g ein Festwert, so ist, da θ und φ nicht aus den Strecken $0 \ldots \pi$ und $0 \ldots 2\pi$ herausgehen, nach dem Mittelwertsatze (§ 103, IV.)

$$(1) \qquad \left| \int\limits_{(\varepsilon \varepsilon_1)} \frac{\varrho \, d\tau}{r} \right| < g \int\limits_{(\varepsilon \varepsilon_1)} r \, dr \, d\theta \, d\varphi < 2 g \pi^2 \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2}{2} < g \pi^2 \varepsilon^2;$$

ebenso folgt, wenn r durch r^2, ϱ durch $\varrho\lambda$ ersetzt wird und $|\lambda| < g_1$ ist,

$$(2) \qquad \left|\int\limits_{(\varepsilon\varepsilon_1)} \frac{\varrho\lambda\,d\tau}{r^2}\right| < g g_1 \int\limits_{(\varepsilon\varepsilon_1)} dr\,d\theta\,d\varphi < 2 g g_1 \pi^2 \varepsilon.$$

Hieraus folgt, daß die Integrale (1) und (2) mit ε der Null zustreben, und zwar gleichmäßig bezüglich der Lage der Stelle A; d. h. unabhängig von dieser sind sie so klein, wie man will, sobald ε passend gewählt ist.

Sei nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Reihe abnehmender positiver Größen und $\lim \varepsilon_n = 0$, $\varepsilon > \varepsilon_n$. Dann gilt für die in (1) und (2) vorkommenden Integranden die Gleichung

$$\int\limits_{(\varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+k})} = \int\limits_{(\varepsilon\varepsilon_{\nu+k})} - \int\limits_{(\varepsilon\varepsilon_\nu)};$$

die linke Seite wird nach (1) und (2) mit ε_ν beliebig klein, also wenn ν hinreichend groß geworden ist; die Größen

$$\int\limits_{(\varepsilon\varepsilon_n)}$$

nähern sich also nach dem allgemeinen Kernsatze (Einl. II, 5.) einer bestimmten Grenze an:

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{(\varepsilon\varepsilon_n)} = [\varepsilon].$$

Daraus folgt die Endlichkeit und Bestimmtheit der Größe

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \left\{ \int\limits_{\mathfrak{K}_\varepsilon} + \int\limits_{(\varepsilon\varepsilon_n)} \right\} = \int\limits_{\mathfrak{K}_\varepsilon} + [\varepsilon] = U_\varepsilon + [\varepsilon] = U;$$

hier kann auch V für U geschrieben werden, und da nach (1) und (2) eine der Ungleichungen

$$[\varepsilon] \leqq 2 g g_1 \pi^2 \varepsilon, \qquad [\varepsilon] \leqq g \pi^2 \varepsilon^2$$

besteht, so folgt

$$\lim_{\varepsilon=0} [\varepsilon] = 0, \qquad \lim_{\varepsilon=0} U_\varepsilon = U, \qquad \lim_{\varepsilon=0} V_\varepsilon = V.$$

Die uneigentlichen Integrale U und V sind also endlich; sie sind die Grenzen der eigentlichen, gebildet über das Gebiet $\mathfrak{K}$ nach Ausschluß eines Kugelraumes mit dem Mittelpunkt A.

III. Das Potential U ist, wie wir zeigen wollen, eine überall stetige Funktion von ξ, η, ζ, auch wenn es als uneigentliches Integral erscheint, und nach diesen Größen differenzierbar.

Liegt A zunächst außerhalb des Gebiets $\mathfrak{K}$, so folgt die Stetigkeit des jetzt eigentlichen Integrals aus Betrachtungen, wie denen des § 95 über die Abhängigkeit einfacher Integrale von einem Parameter, die sich auf mehrfache Integrale ohne weiteres anwenden lassen, wenn der Integrand, wie es hier der Fall ist, mit seinen ersten Ableitungen nach ξ, η, ζ von x, y, z, ξ, η, ζ stetig abhängt in einem Gebiet, das die bei der Integration vorkommenden Wertsysteme dieser Größen umfaßt. Das ist offenbar der Fall in einem Gebiet, in welchem r über einer positiven Schranke verbleibt, d. h. wenn der Angriffspunkt A außerhalb des Gebiets $\mathfrak{K}$ liegt.

Ist aber das Integral uneigentlich und nach (3) definiert, so ändert sich bei hinreichend kleiner Verschiebung von A das Integral U_ε als eigentliches beliebig wenig; der Summand $[\varepsilon]$ ist aber unabhängig von der Verschiebung des Punktes A von vornherein so klein, wie man will; also gilt dasselbe von der Gesamtänderung des Integrals U.

Diese Betrachtung gilt auch für das Integral (2), das wir in der besonderen Form

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} \varrho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \int\limits_{\mathfrak{K}} \varrho \cdot \frac{\xi - x}{r} \frac{d\tau}{r^2}$$

mit $\lambda = (\xi - x)/r$ und $g_1 = 1$ ansetzen; auch dieses ist stetig in ξ, η, ζ, gleichviel, ob es ein eigentliches oder uneigentliches ist. Man kann daher auch sagen: wenn $F = \varrho/r$ gesetzt wird, sind die Integrale

$$J(\xi) = \int\limits_{\mathfrak{K}} F\, d\tau, \quad K(\xi) = \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial F}{\partial \xi} d\tau$$

stetige Funktionen der Lage des Punktes A; ξ kann dabei durch η und ζ ersetzt werden.

Wenn nun das Integral $J(\xi)$ eigentlich ist, so findet man nach § 95, wie bemerkt, leicht

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial F}{\partial \xi} d\tau,$$

also

$$(4) \qquad J(\xi_2) - J(\xi_1) = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial F}{\partial \xi} d\tau = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} K(\xi)\, d\xi.$$

Wenn aber $J(\xi)$ und $K(\xi)$ uneigentliche Integrale sind, mögen die Punkte $A_1(\xi_1, \eta, \zeta)$ und $A_2(\xi_2, \eta, \zeta)$ im Innern des Raumes $\mathfrak{K}$ liegen, ebenso die Strecke $A_1 A_2$, die wir in einen Zylinderraum $\mathfrak{K}'$

vom Radius ε und der Achse $A_1 A_2$ einschließen, dessen Rauminhalt $C = \pi \varepsilon^2 (\xi_2 - \xi_1)$ ist; A liege auf der Strecke $A_1 A_2$. Umgibt man wieder A mit einer Kugel vom Radius ε_1, so liefert diese zu den Integralen

$$\overline{J}(\xi) = \int_{\mathfrak{K}'} F\, d\tau, \quad \overline{K}(\xi) = \int_{\mathfrak{K}'} \frac{\partial F}{\partial \xi}\, d\tau$$

Beiträge, die nach II. absolut kleiner sind als $C'\varepsilon_1^2$ und $C''\varepsilon_1$, wobei C' und C'' positive Größen sind und unter von ε_1 unabhängigen Schranken liegen. Der Rest des Zylinders $\mathfrak{K}'$ gibt immer $r \geqq \varepsilon_1$, liefert also nach den letzten beiden Ungleichungen des Absatzes I im Punkte A, wenn $|\varrho| < \varrho_0$, zu $\overline{J}$ einen Beitrag kleiner als

$$\frac{C \varrho_0}{\varepsilon_1} = \pi \varepsilon (\xi_2 - \xi_1) \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1},$$

und zu $\overline{K}$ einen solchen kleiner als

$$\frac{C \varrho_0}{\varepsilon_1^2} = \pi \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^2 (\xi_2 - \xi_1).$$

Nimmt man also $\varepsilon / \varepsilon_1$ hinreichend klein, etwa $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon}$, so sieht man, daß beide Integrale $\overline{J}$ und $\overline{K}$ beliebig herabgedrückt werden können, und zwar gleichmäßig für alle Werte ξ der Strecke $\xi_1 \ldots \xi_2$, d. h. $\overline{J}(\xi)$ und $\overline{K}(\xi)$ liegen, sobald ε hinreichend klein genommen ist, absolut unter einer vorgeschriebenen Schranke, gleichviel, wo ξ auf der Strecke $\xi_1 \ldots \xi_2$ gelegen ist.

Setzt man nun

$$(5) \qquad J(\xi) = J_\varepsilon(\xi) + \overline{J}(\xi), \quad K(\xi) = K_\varepsilon(\xi) + \overline{K}(\xi),$$

so können J_ε und K_ε als eigentliche Integrale angesehen werden, erstreckt über den nach Abzug des Zylinderraumes $\mathfrak{K}'$ bleibenden Rest des Gebiets $\mathfrak{K}$; A liegt außerhalb dieses Restgebiets; man hat also nach (4) die Gleichung

$$J_\varepsilon(\xi_2) - J_\varepsilon(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} K_\varepsilon(\xi)\, d\xi,$$

oder nach (5), da $K(\xi)$ eine stetige Funktion von ξ ist,

$$J(\xi_2) - J(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} K(\xi)\, d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \overline{K}(\xi)\, d\xi + \overline{J}(\xi_2) - \overline{J}(\xi_1).$$

Hier können rechts alle Summanden mit ε beliebig herabgedrückt werden, außer dem ersten, der wie die linke Seite von ε unabhängig ist; somit folgt nach dem Exhaustionssatze

$$J(\xi_2) - J(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} K(\xi)\, d\xi,$$

und die Grundeigenschaft der bestimmten Integrale stetiger Funktionen ergibt

$$\frac{\partial J(\xi_2)}{\partial \xi_2} = K(\xi_2), \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\int_{\mathfrak{K}} F\, d\tau = \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial F}{\partial \xi}\, d\tau,$$

auch im Falle der uneigentlichen Integrale, oder

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \int_{\mathfrak{K}} \varrho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau.$$

Diese Größe ist die nach der x-Achse genommene Kraftkomponente, die von den Massen, deren Potential U ist, herrührt.

§ 108. Flächenpotentiale.

I. Unter dem Potential einer über eine Fläche $\mathfrak{S}$ verteilten Masse versteht man das Integral

$$V = \int_{\mathfrak{S}} \frac{\sigma\, dS}{r};$$

ist $P(x, y, z)$ ein Punkt des Flächenelements dS und $A(\xi, \eta, \zeta)$ ein beliebiger Punkt, so wird $r = AP$ gesetzt; $\sigma\, dS$ ist die dem Element dS zugeschriebene Masse, σ die Flächendichtigkeit, die zunächst auf der Fläche $\mathfrak{S}$ nur stetig sei. Liegt A außerhalb der Fläche $\mathfrak{S}$, so ist V ein eigentliches Integral und man findet, wie in § 107, III., indem r auch die Richtung AP bedeutet, die Kraftkomponente

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \int_{\mathfrak{S}} \sigma \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \int_{\mathfrak{S}} \frac{\sigma \cos(xr)}{r^2}\, dS.$$

Liegt der Punkt A auf der Fläche $\mathfrak{S}$, so scheidet man den Teil von $\mathfrak{S}$ ab, der innerhalb eines Zylinders vom Radius ε liegt, dessen Achse die Normale der Fläche $\mathfrak{S}$ im Punkte A ist; man bildet ein Flächenpotential V_ε zunächst mit dem übrigbleibenden Teil der Fläche $\mathfrak{S}$ und läßt dann ε unendlich abnehmen; der Grenzwert, dem das Potential V_ε zustrebt, ist V als uneigentliches Integral.

Um die Existenz dieses Grenzwertes einzusehen, nehmen wir die Flächennormale im Punkte A als z-Achse, A als Anfangspunkt eines neuen Bezugssystems, und führen dann zylindrische Koordinaten mittels der Gleichungen

$$x = s\cos\theta, \quad y = s\sin\theta, \quad z = z, \quad r = \sqrt{z^2 + s^2}$$

ein. Sind nun u, v irgendwelche unabhängige Parameter auf der Fläche $\mathfrak{S}$, so gilt nach § 104 immer für eine gewisse Normale N die Gleichung

$$dS\cos(zN) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv,$$

also wenn man $u = s$, $v = \theta$ nimmt,

$$dS = \frac{s\,ds\,d\theta}{\cos(zN)}.$$

Jetzt untersuchen wir das Analogon des in § 107, II. untersuchten Integrals über die Kugelschale $(\varepsilon\varepsilon_1)$, indem wir über das Gebiet zwischen den Zylindern $s = \varepsilon$ und $s = \varepsilon_1$ integrieren, wobei $\varepsilon > \varepsilon_1$ sei; heißt dieses Gebiet jetzt $(\varepsilon\varepsilon_1)$, so finden wir zunächst

$$\int\limits_{(\varepsilon\varepsilon_1)}\frac{\sigma\,dS}{r} = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} ds\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta\,.\,\sigma s}{\cos(zN)\sqrt{s^2+z^2}}.$$

Da nun $\cos(zN) = \pm 1$ ist an der Stelle A, so liegt $|\cos(zN)|$ in der Umgebung von A, z. B. im Gebiet $(\varepsilon\varepsilon_1)$, wenn ε hinreichend klein ist, über einer positiven Schranke γ; wenn allgemein $|\sigma| < \sigma_0$, findet man offenbar, da $s/\sqrt{s^2+z^2}$ ein echter Bruch ist,

$$\left|\int\limits_{(\varepsilon\varepsilon_1)}\frac{\sigma\,dS}{r}\right| < \frac{2\pi\sigma_0}{\gamma}(\varepsilon - \varepsilon_1) < \frac{2\pi\sigma_0\varepsilon}{\gamma}.$$

Das ist das Analogon der Ungleichung § 107, (1); aus ihr erschließt man wie dort die Existenz des uneigentlichen Integrals $\lim V_\varepsilon$ und findet, daß die so definierte Größe V im ganzen Raume sich stetig ändert.

II. Neben den Raum- und Flächenpotentialen sind noch die Potentiale von Doppelschichten wichtig. Man versteht darunter, wenn $\mathfrak{S}$ die bisherige Bedeutung behält und N eine willkürlich gewählte, aber im allgemeinen stetig veränderliche Normalenrichtung bedeutet, das Integral

$$W = -\int\limits_{\mathfrak{S}}\frac{\varrho\cos(rN)}{r^2}\,dS = \int\limits_{\mathfrak{S}}\varrho\,\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right)dS,$$

das offenbar ebenso wie das Flächenpotential mit seinen Ableitungen nach ξ, η, ζ stetig ist, solange der Punkt A die Fläche $\mathfrak{S}$ nicht erreicht. Geschieht dies, so wird das Integral uneigentlich. Um sein Verhalten zu untersuchen, beschränken wir uns auf ein Flächenstück $\mathfrak{S}'$, auf welchem bei der Annahme $|x| < a$, $|y| < a$ die dritte Koordinate $z = F(x, y)$ eine mit ihren Ableitungen stetige Funktion ist, entsprechend der immer für die Oberfläche $\mathfrak{S}$ geltenden Annahmen. Dann kann $\varrho = f(x, y)$ gesetzt werden und f sei, was bei den Potentialen der Flächenbelegung für σ nicht vorausgesetzt wurde, mit den ersten Ableitungen nach x und y stetig. Alsdann können wir die Formeln (3), (5), (8) des § 106 anwenden, indem wir $U = f(x, y)$ setzen und den Raum $\mathfrak{K}$ in folgender Weise wählen.

Liege $\mathfrak{S}'$ zwischen den beiden Ebenen $z = h$ und $z = -h$, dann wird der durch die Ebenen $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm h$ begrenzte Quader durch die Fläche $\mathfrak{S}'$ in die Teile $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gespalten; ersterer sei durch die Ungleichung $z \geqq F(x, y)$ definiert; nach $\mathfrak{K}_2$ hin sei die Normale N gerichtet, und $\mathfrak{S}_1$ sei der Teil der Umgrenzung des Gebiets $\mathfrak{K}_1$, der den Grenzebenen des Quaders angehört. Jetzt wenden wir die Formeln des § 106 auf $\mathfrak{S}_1$ an; da man immer

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

setzen kann und $\partial U / \partial z = 0$ ist, findet man

$$(1) \qquad J(\mathfrak{K}_1) = \int\limits_{\mathfrak{K}_1} d\tau \left\{ -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$= W + \int\limits_{\mathfrak{S}_1} f(x, y)\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right) dS + R,$$

und dabei ist nach § 106

$$(2) \qquad R = 4\pi f(\xi, \eta), \quad 2\pi f(\xi, \eta), \quad 0$$

zu setzen, je nachdem der Punkt A im Innern des Raumes $\mathfrak{S}_1$, auf seiner Begrenzung oder außerhalb desselben liegt.

Die beiden Glieder des ersten Ausdrucks $J(\mathfrak{K}_1)$ sind nun nach § 107, III. Ableitungen von Raumpotentialen mit den Dichtigkeiten $-\partial f / \partial x$ und $-\partial f / \partial y$, also als Kraftkomponenten überall stetig; dasselbe gilt von dem über $\mathfrak{S}_1$ erstreckten Integral, wenn der Punkt A die Fläche $\mathfrak{S}'$ außerhalb ihres Randes erreicht. Nach (1) enthält also W erstens Summanden, die stetig bleiben, wenn A die Fläche $\mathfrak{S}'$ passiert, und zweitens den nach (2) unstetigen Summanden R. Die Größe W, das Potential einer Doppelbelegung, strebt also, wenn

A von der einen oder anderen Seite der belegten Fläche $\mathfrak{S}$ sich annähert, Grenzwerten zu, die sich um $4\pi\varrho$ unterscheiden; ist W_N der Grenzwert, wenn A von der Richtung herkommt, nach der die Normale N gerichtet ist, W_{-N} der Grenzwert auf der anderen Seite, so ist

$$W_N = W_{-N} + 4\pi\varrho;$$

auf der Fläche $\mathfrak{S}$ selbst ist

$$W = W_0 = W_{-N} + 2\pi\varrho = W_N - 2\pi\varrho = \tfrac{1}{2}\{W_N + W_{-N}\}.$$

III. Mittels dieser Eigenschaften des Potentials der Doppelbelegung können jetzt die letzten Grundformeln der Potentialtheorie abgeleitet werden, die Unstetigkeiten der Ableitungen der Potentiale einfach belegter Flächen oder der Kraftkomponenten an der belegten Fläche selbst, also der Größen

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \int_{\mathfrak{S}} \sigma \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS,$$

die außerhalb der Fläche $\mathfrak{S}$ offenbar stetig sind.

Zu diesem Zweck nennen wir $\mathfrak{R}$ den Rand des belegten Flächenstückes $\mathfrak{S}$ und wenden die Stokessche Formel (§ 102) an:

$$(3)\qquad \int_{\mathfrak{R}} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

$$= \int_{\mathfrak{S}} dS\left\{\alpha(Z_y - Y_z) + \beta(X_z - Z_x) + \gamma(Y_x - X_y)\right\},$$

wobei

$$\alpha = \cos(xN), \qquad \beta = \cos(yN), \qquad \gamma = \cos(zN)$$

gesetzt und die Umlaufsrichtung der Randlinie passend gewählt ist; im besonderen verstehen wir unter λ, μ, ν stetige Funktionen von x, y, z mit stetigen ersten Ableitungen, setzen

$$(4)\qquad X = \frac{\beta\nu - \gamma\mu}{r}, \quad Y = \frac{\gamma\lambda - \alpha\nu}{r}, \quad Z = \frac{\alpha\mu - \beta\lambda}{r},$$

und bezeichnen durch $\mathfrak{fc}$ eine auf dem betrachteten Gebiet stetige Funktion der beigefügten Unabhängigen. Dann erscheinen auf der rechten Seite der Gleichung (3) zunächst Glieder wie

$$\int_{\mathfrak{S}} \frac{dS}{r}\, \mathfrak{fc}(x, y, z),$$

also Potentiale der einfach belegt gedachten Fläche $\mathfrak{S}$, die als Funktionen von ξ, η, ζ überall stetig sind.

Ferner erscheinen Glieder mit den Ableitungen von $1/r$, z. B.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\{\gamma(\gamma\lambda-\alpha\nu)-\beta(\alpha\mu-\beta\lambda)\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\{\lambda(\beta^2+\gamma^2)-\alpha(\beta\mu+\gamma\nu)\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\{\lambda-\alpha(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)\},$$

wobei die Gleichung $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ benutzt ist. Faßt man mit diesem Gliede die entsprechenden zusammen, in denen y und z bevorzugt sind, und benutzt wieder die Beziehungen $\partial(1/r)/\partial x = -\partial(1/r)/\partial\xi$ usf., so erhält man eine Gliedergruppe

$$-\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)-\mu\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)-\nu\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$-(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)\left\{\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\},$$

oder, da man $\alpha = dx/dN$ usf. setzen kann,

$$-\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)-\mu\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)-\nu\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)-(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Die linke Seite der Gleichung (3) ist nun, wie die Werte (4) zeigen, in ξ, η, ζ immer stetig, solange der Punkt A nicht den Rand $\mathfrak{R}$ erreicht; man kann also die Gleichung (3) in folgender Form schreiben:

$$\mathfrak{c}(\xi,\eta,\zeta)=-\int_{\mathfrak{S}}\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\int_{\mathfrak{S}}\mu\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\int_{\mathfrak{S}}\nu\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$
$$-\int_{\mathfrak{S}}(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right)dS.$$

In dieser Gleichung stehen rechts sehr allgemeine Kraftkomponenten von Flächenpotentialen, verbunden mit dem Potential einer sehr allgemeinen Doppelschicht, also Größen wie $\partial V/\partial\xi$ und W; die Gleichung setzt daher die Unstetigkeiten der ersteren in Zusammenhang mit der nach II. bekannten Unstetigkeit der Größen W.

Sei z. B. $\mu=\nu=0$; dann folgt

$$\mathfrak{c}(\xi,\eta,\zeta)=-\int_{\mathfrak{S}}\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\int_{\mathfrak{S}}\alpha\lambda\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \tag{5}$$

Das erste Glied rechts ist $-\partial V/\partial\xi$, wenn $\sigma=\lambda$ gesetzt wird, das zweite $-W$ mit $\varrho=\alpha\lambda$. Bezeichnet man also auch bei ersterer

durch die Fußmarken N und $-N$ die Grenzwerte, denen sie zustrebt, wenn man von der Seite, nach der die Normale N hinweist, oder der entgegengesetzten den Punkt A an die Fläche $\mathfrak{S}$ heranrücken läßt, so folgt

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_N + W_N = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{-N} + W_{-N},$$

und der gemeinsame Wert dieser Größen ist auch der Wert von $\partial V/\partial \xi + W$, wenn man A in der Fläche $\mathfrak{S}$ selbst annimmt, was durch die Fußmarke 0 bezeichnet werde:

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_N + W_N = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_0 + W_0.$$

Die Gleichung (6) gibt aber nach II.

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_N - \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{-N} = -4\pi\sigma\cos(xN);$$

die Gleichungen (7) und (6) also zusammen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_N + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{-N} + W_N + W_{-N} = 2\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_0 + 2\,W_0,$$

und nach II.

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_N + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{-N}\right\} = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_0.$$

Da das Flächenpotential vom Bezugssystem unabhängig definiert wird, kann man in der Gleichung (8) unter der x- oder ξ-Achse eine beliebige Richtung verstehen. Ist diese in dem Punkte, wo die Fläche $\mathfrak{S}$ vom Punkte A durchschritten wird, zur Fläche $\mathfrak{S}$ tangential, so zeigt die Gleichung (8), da $\cos(xN) = 0$ wird, daß eine tangentiale Kraftkomponente sich stetig beim Durchgang durch die belegte Fläche ändert. Legt man dagegen die x-Achse mit der Richtung N zusammen, deren entgegengesetzte N' sei, so sind die Richtungen x und N' entgegengesetzt, und man kann schreiben

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_N = \frac{\partial V}{\partial N}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{-N} = -\frac{\partial V}{\partial N'},$$

also nach (8)

$$\frac{\partial V}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial N'} = -4\pi\sigma,$$

wobei nun die beiden Grenzwerte der normal zur belegten Fläche gerichteten Kraftkomponenten symmetrisch auftreten.

IV. Aus den Unstetigkeitseigenschaften der Kraftkomponenten von Flächenpotentialen folgt eine der Haupteigenschaften der Raumpotentiale, die Poissonsche Gleichung.

Hat ϱ stetige erste Ableitungen nach x, y, z, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right), \quad U = \int_{\mathfrak{K}} \frac{\varrho\, d\tau}{r}, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = \int_{\mathfrak{K}} \varrho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau$$

$$= -\int_{\mathfrak{K}} \varrho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = -\int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varrho}{r}\right) d\tau + \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{d\tau}{r},$$

und ergibt sich, indem man die Kugel, in welcher $r < \varepsilon$ ist, ausscheidet und den Rest des Raumes $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{K}_\varepsilon$ bezeichnet,

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\int_{\mathfrak{K}_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varrho}{r}\right) d\tau - \int_{r<\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varrho}{r}\right) d\tau + \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{d\tau}{r}.$$

Der zweite Summand verschwindet nach der vorletzten Gleichung und nach § 107, II. (2) mit ε; der dritte hat die Gestalt eines gewöhnlichen Körperpotentials; der erste kann im Raum $\mathfrak{K}_\varepsilon$, in welchem $1/r$ stetig bleibt, der Gaußschen Integraltransformation unterworfen werden, so daß sich ergibt

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \frac{\varrho \cos(xN)}{r}\, dS + (\varepsilon) + \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{d\tau}{r},$$

wobei $\lim\limits_{\varepsilon=0} (\varepsilon) = 0$ ist und $\mathfrak{S}_\varepsilon$ die Oberfläche des Raumes $\mathfrak{K}_\varepsilon$ bedeutet, also die ursprüngliche des Raumes $\mathfrak{K}$, die wir wieder $\mathfrak{S}$ nennen, und die Kugelfläche $r = \varepsilon$, N die äußere Normale des Raumes $\mathfrak{K}_\varepsilon$. Man erhält hiernach

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\int_{\mathfrak{S}} \frac{\varrho \cos(xN)}{r}\, dS + \lim_{\varepsilon=0} \int_{r=\varepsilon} \frac{\varrho \cos(xN)\, dS}{r} + \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{d\tau}{r}.$$

Der rechts erscheinende Grenzwert ist aber Null, da in ihm $r = \varepsilon$, und in den gewöhnlichen sphärischen Polarkoordinaten $dS = \varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ zu setzen ist; das Integral ist ein Produkt aus ε und einer beschränkten Größe, die bei abnehmendem ε unter einer festen Schranke bleibt. Somit folgt schließlich

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\int_{\mathfrak{S}} \frac{\varrho \cos(xN)}{r}\, dS + \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{d\tau}{r}$$

nebst ähnlichen Gleichungen, in denen x und ξ durch y und η oder z und ζ ersetzt sind.

Hier ist rechts ein Flächenpotential erschienen, das man außerhalb der Fläche $\mathfrak{S}$ unter dem Integralzeichen nach § 108 differenzieren darf, wobei

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\cos(xr) = \frac{\xi - x}{r}$$

zu setzen ist; also

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{\varrho \cos(xN)\cos(xr)}{r^2}\, dS + \frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{d\tau}{r},$$

und wenn man die entsprechenden Gleichungen in η und ζ hinzufügt, folgt, da die Kraftkomponenten beim Raumpotential überall stetig sind,

$$(9)\quad \varDelta U = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{\varrho \cos(rN)}{r^2}\, dS + \mathfrak{fc}(\xi, \eta, \zeta)$$
$$= W + \mathfrak{fc}(\xi, \eta, \zeta);$$

W ist wie oben das Potential der Doppelschicht auf der Fläche $\mathfrak{S}$. Die Größe $\varDelta U$ ist also unstetig wie W an der Fläche $\mathfrak{S}$ und verschwindet im Außenraum, so daß in der Bezeichnung des Absatzes III zu setzen ist

$$(\varDelta U)_N = 0.$$

Daraus folgt dann nach II.

$$(\varDelta U)_{-N} = -4\pi\varrho;$$

der Grenzwert von $\varDelta U$ bei Annäherung an die Oberfläche des mit Masse erfüllten Raumes von innen her ist also $-4\pi\varrho$.

Jetzt sei A_0 irgend ein Punkt im Innern des Raumes $\mathfrak{K}$, und werde durch ihn eine Fläche $\mathfrak{S}_1$ gelegt, die den Raum $\mathfrak{K}$ in die Teilgebiete $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zerlegt; das Potential U zerfällt dann in entsprechende Summanden U_1 und U_2, und wenn A im Gebiet $\mathfrak{K}_1$ liegt, folgt

$$\varDelta U_2 = 0, \quad \varDelta U = \varDelta U_1.$$

Nähert sich also A der Grenzlage A_0, so ist

$$\lim \varDelta U_1 = \lim \varDelta U = -4\pi\varrho.$$

Die Größe $\varDelta U$ ist aber der Gleichung (9) zufolge im Innern des Raumes $\mathfrak{K}$ stetig; also folgt aus der letzten Gleichung endgültig die Poissonsche Formel

$$\varDelta U = -4\pi\varrho.$$

Daß außerhalb des Raumes $\mathfrak{K}$ die Laplacesche Gleichung

$$\Delta U = 0$$

gilt, folgt unmittelbar daraus, daß man hier beim eigentlichen Integral einfach setzen darf

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \int_{\mathfrak{K}} \varrho \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau \text{ usf.,}$$

und daß die Gleichung

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

gilt, wie eine einfache Rechnung lehrt.

Kapitel XVII.

Grundlehren von den Differentialgleichungen.

§ 109. Die Differentialgleichung einer Kurvenschar.

I. Ist eine Kurvenschar durch eine Gleichung $y = F(x, c)$ gegeben, so kann man aus dieser und der aus ihr folgenden

$$y' = \frac{dy}{dx} = F_x(x, c)$$

im allgemeinen den Festwert c, der die verschiedenen Kurven der Schar unterscheidet, eliminieren, d. h. aus der einen ausrechnen und in die andere einsetzen, und erhält so eine Gleichung von einer der Formen

$$y' = f(x, y), \quad f(x, y, y') = 0,$$

eine Differentialgleichung, die eine geometrische Eigenschaft der Kurvenschar ausdrückt: sie ordnet jedem Punkte des betrachteten Gebiets der xy-Ebene eine bestimmte Richtung zu, die Richtung der Tangente derjenigen Kurve der Schar, die durch diesen Punkt hindurchgeht.

Differenzieren wir z. B. die Gleichung der konzentrischen Kreise $x^2 + y^2 = c^2$, so folgt

$$x\,dx + y\,dy = 0, \quad 1 + \frac{y}{x}y' = 0,$$

und diese Gleichung sagt aus, daß die Richtung einer Kurve der Schar auf der Geraden, deren Richtungskoeffizient y/x ist, senkrecht steht; letztere ist natürlich der Radius.

Die Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen, und die durch den Koordinatenanfangspunkt gehen, sind

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2, \quad x^2 + y^2 - 2cx = 0;$$

differenzierend erhält man

$$x + yy' - 2c = 0,$$

also, indem man c aus der letzten Gleichung in die vorletzte einsetzt,

$$y^2 - x^2 = 2\,x\,y\,y', \quad y' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right),$$

wodurch wiederum y', also die Richtung der Tangente als Funktion des Ortes erscheint.

II. Umgekehrt wird in der Geometrie und allen Anwendungen häufig die Aufgabe gestellt, eine Kurve oder Kurvenschar zu finden, die eine gegebene Differentialgleichung erfüllt; z. B. denke man an die Aufgabe der orthogonalen Trajektorie. d. h. die Aufgabe, Kurven zu finden, die eine gegebene Kurvenschar unter rechtem Winkel schneiden. Ist die nach I. gebildete Differentialgleichung der letzteren etwa $y' = f(x, y)$, und $\eta = \varphi(x)$ die gesuchte Kurve, so muß allgemein die Gleichung

$$1 + \eta' y' = 0$$

bestehen, und da der betrachtete Punkt Durchschnitt einer Scharkurve und der gesuchten Kurve sein soll, ist in ihm $y = \eta$ zu setzen, so daß die Gleichung

$$1 + \eta' f(x, \eta) = 0$$

folgt; setzt man wieder y für η, so kann man sagen, daß die gesuchten Kurven die Gleichung

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

erfüllen müssen.

Die Aufgabe, eine Kurvenschar zu finden, deren Differentialgleichung eine gegebene Form hat, nennt man die Integration der Differentialgleichung. Eine solche Aufgabe von besonderer Art ist die allgemeine Aufgabe der Integralrechnung, y als Funktion von x so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$y' = f(x) \tag{1}$$

gilt. Die allgemeinste Lösung dieser Aufgabe hat, wie wir wissen, die Form

$$y = \varphi(x) + c, \quad \varphi(x) = \int f(x)\,dx \tag{2}$$

mit c als willkürlichem Festwert; diese Gleichung stellt eine Kurvenschar dar, deren Differentialgleichung die Gleichung (1) ist.

Die Kurvenschar (2) hat nun eine besondere Eigentümlichkeit: ihre Kurven gehen auseinander hervor durch Verschiebung parallel der y-Achse: ist eine von ihnen $y = \varphi(x)$, so wird eine andere erhalten, indem man $\bar{y} = y + c$, $\bar{y} = \varphi(x) + c$ setzt. Jeder Punkt (x, y) der ersten Kurve geht, indem man x fest läßt und

y um den Festwert c vermehrt, in einen bestimmten Punkt der anderen über.

Bei beliebigen Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ strebt man zunächst danach, sie durch Einführung neuer Unabhängiger auf die Form (1) zu bringen. Setzt man

(3) $$x = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad y = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

so erhält man, indem man $\mathfrak{y}$ als Funktion von $\mathfrak{x}$ ansieht,

$$y' = \frac{dy}{d\mathfrak{x}} : \frac{dx}{d\mathfrak{x}} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \mathfrak{y}} \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}}{\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}} \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}} = f(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}),$$

woraus eine Gleichung wie

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

folgt. Man hat nun einen Erfolg erzielt, wenn F von $\mathfrak{y}$ frei ist; dann wäre

(4) $$\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = F(\mathfrak{x}), \quad \mathfrak{y} = \int F(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} + c,$$

und die Gleichung der gesuchten Kurvenschar wäre in den Veränderlichen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ausgedrückt. Diese Kurvenschar geht in sich über, wenn man $\mathfrak{y}$ um c vermehrt; tut man dies in den Gleichungen (3), so erhält man einen Punkt

(5) $$x_1 = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + c), \quad y_1 = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + c),$$

der, wenn $\mathfrak{y} = \varphi(\mathfrak{x})$ eine Kurve der Schar ist, und $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ dieser Gleichung gemäß sich ändern, ebenfalls eine Kurve der Schar (4) beschreibt, die in x und y ausgedrückt, die gegebene Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ integriert oder löst. Beschreibt der Punkt (x, y) eine Integralkurve dieser Gleichung, so beschreibt der bei festem c zugehörige Punkt (x_1, y_1) eine andere Kurve derselben Schar. Die Schar der Integralkurven gestattet, wie man sagt, eine Transformation in sich. Jeder solchen Transformation entsprechend erhält man eine Klasse integrierbarer Differentialgleichungen.

§ 110. Die einfachsten Integrationen.

a) Als erstes Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung, in der, wie man sagt, die Veränderlichen getrennt werden können; es sind die separierbaren Gleichungen, die in der Form

(1) $$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0$$

geschrieben werden können, oder, was offenbar dasselbe ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1'(y)}{f_2(x)},$$

oder etwas allgemeiner

$$f_1(x) f_2'(y)\, dx + F_1(x) F_2(y)\, dy = 0.$$

Schreibt man

$$(2) \qquad \mathfrak{y} = \int N(y)\, dy, \quad d\mathfrak{y} = N(y)\, dy, \quad x = \mathfrak{x},$$

so nimmt die Gleichung (1) sofort die gewünschte Form

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dx} + M(x) = 0$$

an und ergibt

$$\mathfrak{y} = -\int M(x)\, dx + \text{const.}$$

oder nach (2)

$$(3) \qquad \int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = c,$$

womit eine mit einer willkürlichen Konstanten behaftete Gleichung zwischen x und y, also die Gleichung einer Kurvenschar hergestellt ist, die offenbar die Gleichung (1) erfüllt; die linke Seite der letzteren ist ja das Differential der linken Seite der Gleichung (3).

Eine Kurve der Schar (3) sei $y = \varphi(x)$; sie geht in eine andere derselben Schar über, wenn man die Abszisse x festhält und y um ein solches Stück $\bar{y} - y$ vermehrt, daß dabei $\mathfrak{y}$ den von x unabhängigen Zuwachs c erhält. Setzt man nach (2) genauer

$$\mathfrak{y} = \int_{y_0}^{y} N(y)\, dy,$$

so muß

$$\mathfrak{y} + c = \int_{y_0}^{\bar{y}} N(y)\, dy, \quad c = \int_{y}^{\bar{y}} N(y)\, dy$$

sein.

Die Lösung der Gleichung (1) durch die Gleichung (3) ist sehr plausibel und beruht darauf, daß man in erstere einfach Integralzeichen hineinschreibt; man sagt, die Gleichung ist durch Quadraturen gelöst.

b) Die Klasse der homogenen Differentialgleichungen erhält man aus der elementar geometrischen Ähnlichkeitstransformation mit dem Ähnlichkeitszentrum im Koordinatenanfangspunkt. Bei dieser setzt man etwa

$$x_1 = a x, \quad y_1 = a y;$$

man führt dadurch jede aus Punkten (x, y) bestehende Figur in eine andere über, die zu ihr ähnlich und ähnlich gelegen ist. Offenbar vermehrt sich $\lg x$ bei dieser Transformation um eine Konstante, während y/x ungeändert bleibt; man wird daher

$$\mathfrak{y} = \lg x, \quad \mathfrak{x} = \frac{y}{x}, \quad x = e^{\mathfrak{y}}, \quad y = \mathfrak{x} e^{\mathfrak{y}}$$

setzen können. Die unmittelbar durch Quadraturen lösbare Gleichung § 107, (4) ist hier

$$(4) \qquad d\mathfrak{y} = F(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}, \quad \frac{dx}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{y}{x}\right) : F\left(\frac{y}{x}\right) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

und hier kann Φ ebensogut wie F als eine beliebige Funktion angesehen werden; ist $\Phi(u)$ gegeben, so setzt man

$$F(u) = \frac{1 + u}{\Phi(u)}, \quad \Psi(u) = \int F(u)\, du$$

und findet als Lösung der homogenen Gleichung

$$(5) \qquad y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

nach (4)

$$\mathfrak{y} = \int F(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} + c, \quad \lg x = \Psi\left(\frac{y}{x}\right) + c.$$

Die Gleichung (5) wird auch erhalten, wenn M und N in der Gleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

homogene Funktionen von x und y und von beliebiger, aber derselben Dimension sind.

c) Als Beispiel betrachten wir folgende Aufgabe. Sei eine Kurvenschar gegeben, die die Ähnlichkeitstransformation gestattet; es sollen Kurven gefunden werden, die die Kurven der gegebenen Schar unter dem Winkel α durchschneiden. Da die Winkel bei der Ähnlichkeitstransformation ungeändert bleiben, ist klar, daß die Differentialgleichung der gesuchten Kurven diese Transformation ebenfalls zuläßt, also homogen und nach b) integrierbar sein muß. Ist die gesuchte Kurve $\eta = \varphi(x)$, und $y' = F(x, y)$ die Differentialgleichung der gegebenen Kurven, sind ferner θ und τ die Richtungs-

winkel der Tangenten der einen und der anderen Kurve, so müssen die Gleichungen

$$\frac{\eta' - y'}{1 + \eta' y'} = \operatorname{tg} \alpha, \quad y' = \operatorname{tg} \tau, \quad \eta' = \operatorname{tg} \theta$$

bestehen, also auch, da $y = \eta$,

$$\frac{\eta' - f(x, \eta)}{1 + \eta' f(x, \eta)} = \operatorname{tg} \alpha;$$

wenn wieder y für η gesetzt wird, ist die Differentialgleichung der gesuchten Kurve

$$y' = \frac{\operatorname{tg} \alpha + f(x, y)}{1 - f(x, y) \operatorname{tg} \alpha}.$$

und die rechte Seite ist Funktion von y/x allein, wenn dies von $f(x, y)$ gilt.

Sind die gegebenen Kurven die Geraden $y/x =$ const., so ist auf ihnen

$$y' = \frac{y}{x}, \quad f(x, y) = \frac{y}{x};$$

wir setzen $y = x\mathfrak{x}$, $y' = \mathfrak{x} + x\mathfrak{x}'$, und finden

$$x\mathfrak{x}' + \mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{x} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mathfrak{x} \operatorname{tg} \alpha}.$$

Führen wir Polarkoordinaten $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ein, so kann, abweichend vom Verfahren unter b), auch

$$\mathfrak{y} = \lg r, \quad \mathfrak{x} = \operatorname{tg} \theta$$

gesetzt werden, da auch jetzt bei der obwaltenden Transformation $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{y} + c$ übergeht; wir finden

$$y' = \frac{dr \,.\, \sin \theta + r \cos \theta \, d\theta}{dr \,.\, \cos \theta - r \sin \theta \, d\theta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta} = \operatorname{tg} (\alpha + \theta),$$

und nach leichter trigonometrischer Rechnung

$$\frac{dr}{r} = \cot \alpha \,.\, d\theta, \quad r = c e^{\theta \cot \alpha}.$$

Die gesuchten Kurven sind ähnliche, ähnlich gelegene logarithmische Spiralen.

Geht man von der Schar der in § 109 betrachteten Kreise aus deren Differentialgleichung

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

ist, und nimmt $\alpha = 90^0$, so erhält man $\eta' y' + 1 = 0$, und die Differentialgleichung der Trajektorien ist

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Setzt man wie unter b)

$$y = x\mathfrak{x}, \quad y' = x\mathfrak{x}' + \mathfrak{x},$$

so folgt

$$x\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{x}\,dx = \frac{2\mathfrak{x}\,dx}{1 - \mathfrak{x}^2}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}}\,\frac{1 - \mathfrak{x}^2}{1 + \mathfrak{x}^2},$$

oder, wenn $\mathfrak{x}^2 = u$ gesetzt wird,

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\frac{du}{u} - \frac{du}{1 + u}, \quad \lg x = \lg \frac{\sqrt{u}}{1 + u} + c = \lg \frac{yx}{x^2 + y^2} + c,$$

$$x = \frac{Cxy}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 - Cy = 0.$$

Die letzte Gleichung gibt offenbar die Schar der Kreise, die durch den Koordinatenanfangspunkt gehen und ihren Mittelpunkt auf der y-Achse haben.

d) Setzt man $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, so besteht die Drehung einer Figur darin, daß man θ um eine Konstante c vermehrt, r ungeändert läßt. Man kann also $\mathfrak{y} = \theta$, $\mathfrak{x} = r$ setzen, und erhält als Differentialgleichungen, deren Integralkurven eine Drehung zulassen

$$d\mathfrak{y} = F(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}, \quad d\theta = F(r)\,dr,$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$x\,dy - y\,dx = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

oder gleichbedeutend

$$x\,dy - y\,dx = \Phi(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy),$$

$$[x\Phi(x^2 + y^2) + y]\,dx + [y\Phi(x^2 + y^2) - x]\,dy = 0.$$

Auch diese Gleichungen sind auf Quadraturen zurückführbar. Man kann sie drehbare Differentialgleichungen nennen.

Eine solche ergibt sich bei der Aufgabe, zu den Kreisen von festem Radius, die durch einen festen Punkt gehen, die orthogonalen Trajektorien zu finden. Da Winkel bei der Drehung ungeändert bleiben, ist sofort klar, daß die gesuchten Kurven eine Drehung zulassen. In r und θ ist die Gleichung der Kreise vom Radius $\frac{1}{2}$, die durch den Anfangspunkt gehen,

$$r = \sin(\theta + \alpha), \quad \theta + \alpha = \arcsin r;$$

die Differentialgleichung ist also

$$d\theta = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}. \tag{6}$$

Die Größe

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi + \frac{r\,d\theta}{dr}\cos\varphi}{\cos\varphi - \frac{r\,d\theta}{dr}\sin\varphi}$$

geht nun in $-1/y'$ über, wenn man $r\,d\theta/dr$ durch $-dr/r\,d\theta$ ersetzt; durch diese Operation geht also die Gleichung der Kreisschar in die der Trajektorien über, und letztere ist, wie die zweite Gleichung (6) zeigt,

$$-\frac{dr}{r\,d\theta} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \quad d\theta = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{dr}{r^2\sqrt{1-r^2}}.$$

Setzt man $r = \sin t$, so folgt

$$d\theta = dt - \frac{dt}{\sin^2 t}, \quad \theta + c = t + \cot t.$$

Diese Gleichungen geben r und θ als Funktionen von t und zeigen, wenn man t von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0 gehen läßt, daß die Größe θ unendlich anwächst, die Kurve also den Nullpunkt unendlich oft umkreist.

e) Lineare Differentialgleichungen sind die Gleichungen

$$y' + Py = Q, \tag{7}$$

wobei P und Q gegebene Funktionen von x sind. Verschwindet Q, so heißt die Gleichung linear-homogen. Die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + Pz = 0, \quad \frac{dz}{z} + P\,dx = 0 \tag{8}$$

ist separierbar und gibt als Lösung

$$\lg z + \int P\,dx = \text{const.}$$

oder auch

$$z = Ce^{-\int P\,dx}.$$

Es ist nun klar, daß aus jeder Lösung y der Gleichung (7) eine andere in der Form $y + cz$ abgeleitet werden kann; oder wenn die Gleichung (7) durch eine Kurvenschar $y = \varphi(x)$ erfüllt wird, so ist $y = \varphi(x) + cz$ eine neue Kurve der Schar. Beim Übergang von

der einen zur anderen vermehrt sich y/z um c, während x fest bleibt; man setze demnach

$$\mathfrak{y} = \frac{y}{z}, \quad \mathfrak{x} = x, \quad y = z\mathfrak{y};$$

dann ist zu erwarten, daß die Gleichung (7) durch Quadraturen lösbar sein wird.

In der Tat findet man

$$\mathfrak{y}'z + z'\mathfrak{y} + P\mathfrak{y}z = Q,$$

also nach (8)

$$\mathfrak{y}' = \frac{Q}{z}, \quad \mathfrak{y} = \int \frac{Q\,dx}{z} + \text{const.}, \quad y = z\left\{\int \frac{Q}{z}\,dx + \text{const.}\right\},$$

dabei kann z eine beliebig gewählte Lösung der Gleichung (8) sein, etwa

$$z = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P\,dx};$$

dann ist die allgemeinste Lösung der Gleichung (7)

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P\,dx} \left\{\int\limits_{x_1}^{x} Q\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} P\,dx}\,dx + c\right\},$$

wobei c eine willkürliche Konstante, und die Werte x_0 und x_1 irgendwie, aber so gewählt werden, daß die Funktionen P und Q auf den Strecken $x_1 \ldots x$ und $x_0 \ldots x$ stetig sind.

§ 111. Multiplikator und exakte Differentialgleichungen.

I. Die Differentialgleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1}$$

heißt exakt, wenn ihre linke Seite, x und y beide als unabhängig betrachtet, das vollständige Differential einer Funktion $\varphi(x, y)$ ist, so daß die Gleichungen

$$d\varphi = M\,dx + N\,dy, \quad M = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{2}$$

gelten, aus denen sofort folgt

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{3}$$

da $\partial^2 \varphi/\partial x\,\partial y$ der gemeinsame Wert dieser beiden Größen ist. Umgekehrt, wenn die letzte Gleichung bei unabhängig gedachten x und y gilt, läßt sich eine Funktion φ den Gleichungen (2) gemäß bestimmen;

wir haben diese Bestimmung schon mehrfach, z. B. in § 98, III. durchgeführt; sind die Funktionen M und N nebst den beiden in der Gleichung (3) vorkommenden Ableitungen in einem Rechteck

$$|x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b$$

stetig und ist (x_1, y_1) eine Stelle dieses Rechtecks, so braucht man nur

$$\varphi(x_1, y_1) = \int_{x_0}^{x_1} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y_1} N(x_1, y)\,dy$$

anzusetzen, um die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi(x_1, y_1)}{\partial y_1} = N(x_1, y_1)$$

unmittelbar und die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi(x_1, y_1)}{\partial x_1} &= M(x_1, y_0) + \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{y_0}^{y_1} N(x_1, y)\,dy \\
&= M(x_1, y_0) + \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial M(x_1, y)}{\partial x_1}\,dy \\
&= M(x_1, y_0) + \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial M(x_1, y)}{\partial y}\,dy \\
&= M(x_1, y_0) + M(x_1, y)\Big|_{y_0}^{y_1} = M(x_1, y_1)
\end{aligned}$$

mit Benutzung der Regeln des § 95 und der Formel (3) zu erhalten.

Ist die Funktion $\varphi(x, y)$ gefunden, so ist auch die Differentialgleichung (1) integriert; man braucht nur jetzt y als Funktion von x durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \varphi(x, y) = c, \qquad c = \text{const.}$$

zu bestimmen, um durch Differentiation die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

also die Gleichung (1) zu erhalten. Exakte Differentialgleichungen, d. h. Gleichungen (1), bei denen die Beziehung (3) gilt, können also durch Quadraturen integriert werden.

II. Auf die Form (4) läßt sich die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung immer bringen. Sei durch $y = f(x, c)$ eine Kurvenschar definiert; genauer nehmen wir an, in einem Gebiet der

xy-Ebene und wenn c einer gewissen Strecke angehört, sei f mit den Ableitungen $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial c$ stetig und letztere von Null verschieden. Alsdann kann man c nach § 9 ausrechnen als stetige mit stetigen Ableitungen versehene Funktion von x und y, also $c = \varphi(x, y)$, so daß für ein gewisses xy-Gebiet $\mathfrak{G}$ die Gleichung

$$y = f[x, \varphi(x, y)]$$

gilt, also durch jeden Punkt (x_0, y_0) eine bestimmte Kurve

$$(5) \qquad y = f(x, c), \qquad \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) = \text{const.}$$

hindurchgeht. Erfüllt nun diese Kurvenschar die Differentialgleichung

$$(6) \qquad Y dx - X dy = 0, \qquad Y - Xy' = 0,$$

so kann man y' aus der zweiten Gleichung (5) ausrechnen und findet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

und letztere Gleichung gilt für jeden Punkt des xy-Gebiets $\mathfrak{G}$. Sieht man in ihr φ als Unbekannte an, so hat man eine partielle Differentialgleichung, Teildifferentialgleichung, genauer lineare homogene partielle Differentialgleichung von erster Ordnung; ihre Lösung ist geleistet, wenn die gewöhnliche Differentialgleichung (6) durch eine Kurvenschar gelöst ist, und umgekehrt.

Aus der Gleichung

$$X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

folgt nun, daß eine derartige Größe μ oder $\mu(x, y)$ existiert, daß in unabhängigen x und y die Gleichungen

$$\mu Y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad -\mu X = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad d\varphi = \mu(Y dx - X dy)$$

gelten; man nennt sie den Multiplikator der Gleichung $Y dx - X dy = 0$, die mit μ multipliziert in die exakte Gleichung

$$\mu(Y dx - X dy) = 0$$

übergeht, in der nach (3), da jetzt μY für M und $-\mu X$ für N geschrieben ist, die Gleichung

$$(7) \qquad \frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Y)}{\partial y} = 0$$

gilt. Kann man μ dieser Gleichung gemäß bestimmen, so ist die Gleichung (6) auf eine exakte Form gebracht, also nach I. durch Quadraturen lösbar.

III. Sei im besonderen die Gleichung $Y dx - X dy = 0$ schon exakt, also $\mu = 1$ ein besonderer Multiplikator, $\varphi(x, y) = c$ die allgemeine Lösung in einem gewissen Gebiet $\mathfrak{G}$; dann fragen wir nach dem allgemeinsten Multiplikator μ, der die Gleichung (7) erfüllt; diese Gleichung wird jetzt

$$X \frac{\partial \mu}{\partial x} + Y \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \tag{8}$$

da die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad d\varphi = Y dx - X dy$$

erfüllt sein soll; es handelt sich also zugleich um die allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichung (8).

In dem Gebiet $\mathfrak{G}$ sei y' stetig, also φ_y von Null verschieden, so daß man aus der Gleichung $\varphi = \varphi(x, y)$ etwa y durch x und φ ausdrücken kann. So erscheint denn auch

$$\mu = \mu(x, y) = \mu_0(x, \varphi);$$

dabei ist

$$\mu(Y dx - X dy) = d\Phi(x, y) = \mu\, d\varphi$$

ein vollständiges Differential; man kann also auch hier y durch x und φ ausdrücken und erhält, indem $\Phi(x, y) = \Phi_0(x, \varphi)$ gesetzt wird,

$$d\Phi(x, y) = d\Phi_0(x, \varphi) = \mu_0(x, \varphi)\, d\varphi$$

oder

$$d\Phi_0 = \mu_0 \cdot d\varphi + 0 \cdot dx.$$

Hier gibt aber die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial x} = 0,$$

d. h. $\mu = \mu_0(\varphi)$ ist als Funktion von φ allein darstellbar.

Ist also $d\varphi(x, y) = Y dx - X dy$, so ist $F(\varphi)$ die allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0;$$

daß dabei F willkürlich gewählt werden kann, ist ersichtlich, da

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial x} = F'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F(\varphi)}{\partial y} = F'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

hieraus folgt

$$X \frac{\partial F(\varphi)}{\partial x} + Y \frac{\partial F(\varphi)}{\partial y} = 0.$$

Ist jetzt die Differentialgleichung $Y dx - X dy = 0$ nicht exakt, aber $\varphi(x, y) = c$ ihre allgemeine Lösung, und μ der entsprechende, μ_1 ein zweiter Multiplikator, also

$$d\varphi(x, y) = \mu(Y dx - X dy),$$

so ist $\mu Y dx - \mu X dy = 0$ eine exakte Gleichung. Wäre etwa

$$d\psi(x, y) = \mu_1(Y dx - X dy) = \frac{\mu_1}{\mu} d\varphi(x, y),$$

so wäre μ_1/μ ein Multiplikator der exakten Gleichung, also nach dem obigen Ergebnis

$$\mu_1 = \mu \Phi(\varphi);$$

auf diese Weise also drückt sich jeder Multiplikator einer Differentialgleichung durch einen bestimmten aus. Zugleich ist μ_1/μ nach (8) die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

hat diese also die Lösung $\varphi(x, y)$, die natürlich nicht überall verschwinde, so ist $\Phi(\varphi)$ ihre allgemeinste Lösung.

Als Methode zur Lösung dieser Gleichung ergibt sich also die Vorschrift: man bringe die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $Y dx - X dy = 0$ auf die Form $\varphi(x, y) = \text{const.}$; dann ist $\Phi(\varphi)$ mit willkürlicher Funktion Φ die gesuchte allgemeinste Lösung.

Ist die Gleichung z. B.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

so offenbar $x + y = \text{const.}$ eine Lösung der Gleichung $dx + dy = 0$; die allgemeine Lösung ist $\Phi(x + y)$.

§ 112. Transformationsgruppen und Multiplikator.

Geht man mittels der Gleichungen

$$(1) \qquad x = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \qquad y = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

vom Punkte (x, y) zum Punkte (x_1, y_1) über, für den

$$(2) \qquad x_1 = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + a), \qquad y_1 = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + a)$$

sei, so hat man entsprechend den verschiedenen Werten von a unzählige Transformationen, die die Eigenschaft haben, wieder eine Transformation derselben Art zu liefern, wenn man zwei von ihnen

nacheinander ausführt; das bezeichnet man dadurch, daß man sagt, die Transformationen bilden eine **Gruppe**. Offenbar kann man nach der **Taylorschen** Reihe entwickeln:

$$x_1 = x + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}} a + \cdots, \quad y_1 = y + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \mathfrak{y}} a + \cdots$$

und die weggelassenen Glieder enthalten a in mindestens zweiter Potenz. Annähernd kann man also, wenn $a = \varepsilon$ gesetzt und der Null genähert wird,

$$x_1 = x + \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}}, \quad y_1 = y + \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \mathfrak{y}}$$

setzen. Denken wir uns $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus den Gleichungen (1) als Funktionen von x und y ausgedrückt, so erhalte man

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}} = \xi(x, y) = \xi, \quad \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \mathfrak{y}} = \eta(x, y) = \eta;$$

der Übergang vom Punkte (x, y) zum Nachbarpunkte $(x + \varepsilon \xi, y + \varepsilon \eta)$ heißt dann die in der Gruppe vorkommende **infinitesimale Transformation**; die Strecke mit den Komponenten $\xi \varepsilon$, $\eta \varepsilon$ ist tangential gelegen zu der Kurve $\mathfrak{x} =$ const., auf der der Punkt (x, y) den Gleichungen (1) gemäß bei geänderten Werten $\mathfrak{y}$ fortschreitet, und ε ist nichts anderes als $d\mathfrak{y}$, das Differential der Größe, die bei jeder Transformation um eine Konstante vermehrt wird.

Ist die Transformation ihrem Wesen nach bekannt und übersichtlich, so sind die Größen ξ und η angebbar. Bei der Verschiebung längs der y-Achse ist $\xi = 0$, $\eta = 1$; bei der Ähnlichkeitstransformation konnte nach § 110, I., b) gesetzt werden

$$x = e^{\mathfrak{y}}, \quad y = \mathfrak{x} e^{\mathfrak{y}},$$

also folgt $\xi = x$, $\eta = y$; bei einer kleinen Ähnlichkeitstransformation geht der Punkt (x, y) in die Lage $(x + \varepsilon x, y + \varepsilon y)$ über. Bei der Drehung hat man etwa

$$x = \mathfrak{x} \cos \mathfrak{y}, \quad y = \mathfrak{x} \sin \mathfrak{y}, \quad \xi = -y, \quad \eta = +x;$$

bei kleiner Drehung um den Koordinatenanfangspunkt geht der Punkt (x, y) in die Lage $(x - \varepsilon y, y + \varepsilon x)$ über; $\varepsilon = d\mathfrak{y}$ ist der kleine Drehungswinkel in der üblichen Maßeinheit. Bei den linearen Differentialgleichungen geht y in $y + \varepsilon z$ über, also $\xi = 0$, $\eta = z$.

Wird nun die Transformationsgruppe von der Differentialgleichung $Y dx - X dy = 0$ zugelassen, und ist $\varphi(x, y) = c$ das allgemeine Integral, so soll jede durch letztere Gleichung dargestellte

Kurve wieder in eine Kurve desselben Systems übergehen, wenn man x und y durch x_1 und y_1 ersetzt; also von den Gleichungen

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = c, \quad \varphi(x_1, y_1) = c_1$$

folgt die zweite aus der ersten, und c_1 wird offenbar von a abhängen, nicht von x und y oder $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Da nun offenbar nach (2)

$$\frac{\partial x_1}{\partial a} = \frac{\partial x_1}{\partial \mathfrak{y}}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial a} = \frac{\partial y_1}{\partial \mathfrak{y}}$$

zu setzen ist, so kann man in der zweiten Gleichung (3) nach a differenzieren und schreiben

$$(4) \qquad \frac{\partial \varphi(x_1, y_1)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\partial \varphi(x_1 y_1)}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial \mathfrak{y}} = \frac{d c_1}{d a},$$

und wenn man jetzt $a = 0$ setzt, folgt

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{d c_1}{d a}\right)_{a=0} = \text{const.}$$

als Folge der ersten Gleichung (3). Die letzte Gleichung stellt also auch eine allgemeine Lösung der Gleichung $Y dx - X dy = 0$ dar; also folgt nach § 109

$$(5) \qquad \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Phi[\varphi(x, y)].$$

Zu demselben Ergebnis führt auch folgende Erwägung. Wenn die Differentialgleichung $Y dx - X dy = 0$ die Transformationsgruppe zuläßt, muß auch jede Lösung der Gleichung

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

etwa $f = \varphi(x, y)$, durch die Transformation in eine andere Lösung übergehen; also muß nach § 111 sein

$$\varphi(x_1, y_1) = \Psi[\varphi(x, y)],$$

oder ausführlicher, da der Parameter a bedingt, in welche Lösung $\varphi(x, y)$ übergeht,

$$\varphi(x_1, y_1) = \Psi(\varphi, a);$$

hieraus folgt, indem man nach a differenziert und $a = 0$ setzt, wie bei den Gleichungen (4) und (5),

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \Psi(\varphi, a)}{\partial a}\right)_{a=0} = \Phi(\varphi).$$

Diese Gleichung verbinden wir mit der vorausgesetzten Gleichung

$$X\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

und finden

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Y}{\xi Y - \eta X}, \quad \frac{1}{\Phi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-X}{\xi Y - \eta X}$$

Setzt man also allgemein

$$\int \frac{du}{\Phi(u)} = \Theta(u),$$

so erhält man

$$\frac{\partial \Theta(\varphi)}{\partial x} = \frac{Y}{\xi Y - \eta X}, \quad \frac{\partial \Theta(\varphi)}{\partial y} = \frac{-X}{\xi Y - \eta X},$$

$$d\Theta[\varphi(x, y)] = \frac{Y dx - X dy}{\xi Y - \eta X}.$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\mu = \frac{1}{\xi Y - \eta X}$$

ein Multiplikator der Differentialgleichung $Y dx - X dy = 0$ ist. Kennt man also eine Transformationsgruppe, die von einer Differentialgleichung zugelassen wird, so hat man unmittelbar auch einen Multiplikator, und die Differentialgleichung kann gegenüber den in § 110 gebrauchten Methoden auf eine neue Weise gelöst, d. h. auf Quadraturen zurückgeführt werden.

So hat die homogene Gleichung

$$Y dx - X dy = 0$$

den Multiplikator $1/(xY - yX)$; die drehbare

$$[x\Phi(x^2 + y^2) + y]\,dx + [y\Phi(x^2 + y^2) - x]\,dy = 0,$$

da $\xi = -y$, $\eta = x$ ist, den Multiplikator $1/(x^2 + y^2)$.

§ 113. Differentialgleichungen und Berührungstransformation.

I. Ein Punkt und eine durch ihn gehende Gerade zusammen mögen ein Element heißen; dasselbe ist durch drei Größen x, y, p bestimmt, die Koordinaten des Punktes und den Richtungskoeffizienten der Geraden; ist diese Tangente einer vom Punkte (x, y) beschriebenen Kurve, so ist $p = y'$. Die Aufgabe, eine Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ zu integrieren, kann jetzt in folgender Weise formuliert werden: es sind durch die Gleichung $f(x, y, p) = 0$ zweifach

unendlich viele, d. h. von zwei Unabhängigen abhängende Elemente gegeben; es sollen Kurven gefunden werden, bei denen jeder Punkt mit seiner Tangente eins der gegebenen Elemente bildet.

Jetzt mögen die betrachteten Elemente einer Polartransformation an einem Kegelschnitt unterworfen werden; dann geht ein Punkt A in seine Polare a_1, eine Gerade a in ihren Pol A_1 über; geht a durch A, so liegt A_1 auf a_1. Ein Element geht also wieder in ein Element über. Beschreibt der Punkt A eine Kurve und ist a dabei seine Tangente, so umhüllt die Polare a_1 eine Kurve und dabei ist immer A_1 ihr Berührungspunkt, das Berührungsverhältnis erhält sich beim Übergang von der A, a-Figur zur A_1, a_1-Figur; man nennt die ganze Verwandlung eine Berührungstransformation. Gehört erstere Kurve einer Schar an, so erhalten wir auch eine Schar solcher vom Punkte A_1 beschriebenen Kurven; sind erstere Integralkurven einer Differentialgleichung, so sind letztere Integralkurven einer transformierten Differentialgleichung.

Werde z. B. die Parabel $x^2 + 2y = 0$ zugrunde gelegt, dann ist

$$xx_1 + y + y_1 = 0, \tag{1}$$

wenn man x, y als laufende Koordinaten ansieht, die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1); sind x_1, y_1 die laufenden Koordinaten, so gibt dieselbe Gleichung die Polare des Punktes (x, y).

Durchläuft nun der Punkt A eine Kurve und ist $p = dy/dx$ der Richtungskoeffizient seiner Tangente, so durchläuft der Punkt A_1 eine Kurve, deren Tangente a_1 ist, also durch die Gleichung (1) in der letzten der beiden möglichen Auffassungen dargestellt wird; schreiben wir sie demgemäß

$$y_1 = -xx_1 - y,$$

so folgt, daß ihr Richtungskoeffizient dy_1/dx_1 den Wert

$$p_1 = -x \tag{2}$$

hat. Ebenso ergibt sich, da a die Polare von A_1 ist, für die Tangente der vom Punkte A beschriebenen Kurve die Gleichung (1) oder

$$y = -x_1 x - y_1;$$

ihr Richtungskoeffizient ist p und man findet also

$$p = -x_1. \tag{3}$$

Die drei Gleichungen (1), (2), (3) erlauben, vom Element (x, y, p) ausgehend, das entsprechende Element (x_1, y_1, p_1) anzugeben; man findet, indem man x_1 in der Gleichung (1) durch $-p$ ersetzt,

$$x_1 = -p, \quad y_1 = xp - y, \quad p_1 = -x, \tag{4}$$

und ebenso umgekehrt

$$x = -p_1, \quad y = x_1 p_1 - y_1, \quad p = -x_1.$$

Das ist, analytisch ausgedrückt, der Übergang vom Element (A, a) zum Element (A_1, a_1) oder umgekehrt.

II. Sei ersteres durch die lineare Gleichung

$$(5)\quad f(x)y' + \varphi(x)y + \psi(x) = 0, \quad p f(x) + y\varphi(x) + \psi(x) = 0$$

bestimmt; dann finden wir für das Element (A_1, a_1) die Gleichung

$$-f(-p_1)x_1 + \varphi(-p_1)(x_1 p_1 - y_1) + \psi(-p_1) = 0,$$

also eine Gleichung, die x_1 und y_1 im ersten Grade enthält und in der Form

$$(6)\quad \Phi(p_1)x_1 + \Psi(p_1)y_1 + \Theta(p_1) = 0, \quad p_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$$

geschrieben werden kann. Eine solche Gleichung heißt die allgemeine Clairautsche. Sie ist integrierbar; denn ihre Integralkurven entstehen durch Polartransformation aus denen einer linearen Gleichung.

Sind Φ, Ψ, Θ gegeben, so findet man

$$\Phi(p_1) = p_1\varphi(-p_1) - f(-p_1), \quad \Psi(p_1) = -\varphi(-p_1),$$
$$\Theta(p_1) = \psi(-p_1),$$

oder auch

$$(7)\quad \Phi(-x) = -x\varphi(x) - f(x), \quad \Psi(-x) = -\varphi(x),$$
$$\Theta(-x) = \psi(x),$$

und bestimmt hieraus die Funktionen f, φ, ψ, also die zur Lösung der Gleichung (6) führende lineare Differentialgleichung. Sie wird besonders einfach, nämlich eine von der Ableitung freie Gleichung, wenn $f(x) = 0$, also nach (7), wenn

$$\Phi(p_1) = -p_1\Psi(p_1);$$

dann erhält die Gleichung (6), indem wir

$$F(x) = -\frac{\Theta(x)}{\Psi(x)}$$

setzen, die Form

$$(8)\quad y_1 = p_1 x_1 + F(p_1), \quad p_1 = \frac{dy_1}{dx_1},$$

und das ist die gewöhnliche, besondere Clairautsche Gleichung.

Als Lösung der Gleichung (6) ergibt sich nach den Formeln (4) die Parameterdarstellung

$$x_1 = -p = -y', \quad y_1 = xy' - y,$$

wobei y und y' nach (5) als Funktionen von x zu bestimmen sind.

Im Falle der Gleichung (8) wird p durch die Gleichung (5) nicht bestimmt; die Elemente, die in die Elemente der Integralkurven der Gleichung (8) übergehen, sind nur durch die Gleichung

$$y\,\varphi(x) + \psi(x) = 0 \tag{9}$$

bestimmt; ihre Punkte sind die Punkte dieser Kurven, ihre Geraden sind durch die zugehörigen Punkte willkürlich zu legen. Hält man einen Punkt fest, etwa $x = -c$, und läßt p beliebig, so ergibt sich nach (4) und (8)

$$p_1 = c, \quad y_1 = c\,x_1 + F(c); \tag{10}$$

als Integralkurven erhalten wir also Gerade.

Gehen wir aber die Kurve (9) entlang, so erhalten wir als entsprechende Figur die Hülle der Geraden (10); sie wird nach der Regel des § 28 erhalten, indem man die Gleichung (10) nach c differenziert:

$$y_1 = x_1 c + F(c), \qquad x_1 + F'(c) = 0,$$
$$y_1 = F(c) - c\,F(c), \qquad x_1 = -F'(c).$$

Das ist eine weitere, eine singuläre Lösung der Gleichung (8).

Unter einer singulären Lösung der Gleichung $f(x, y, y') = 0$ versteht man überhaupt eine Lösung, die auch die Gleichung $\partial f / \partial y' = 0$ erfüllt. Sie kann eine Hülle von Integralkurven sein, braucht es aber nicht zu sein.

III. Wie aus den linearen kann man auch aus den anderen in den vorhergehenden Paragraphen behandelten Gleichungsklassen andere, die auch integrierbar sind, ableiten.

Man kann ferner zu ähnlichen Zwecken die Polartransformation mittels des Kreises $x^2 + y^2 - 1 = 0$ benutzen, bei welcher den Gleichungen (1), (2), (3) die folgenden entsprechen:

$$x\,x_1 + y\,y_1 - 1 = 0;$$
$$p_1 = -\frac{x}{y}, \quad p = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Die allgemeine Berührungstransformation besteht in drei Gleichungen

$$x_1 = \mathfrak{f}(x, y, p), \quad y_1 = \mathfrak{g}(x, y, p), \quad p_1 = \mathfrak{h}(x, y, p),$$

in denen aber $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ so gewählt sein müssen, daß allgemein eine Gleichung

$$d\,x_1 - p_1\,d\,y_1 = \varrho\,(d\,x - p\,d\,y) \tag{11}$$

besteht, in der ϱ eine Funktion von x, y, p ist. Nur unter dieser Voraussetzung erhält man aus den Elementen, die aus Punkt und zugehöriger Tangente einer Kurve, etwa

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{12}$$

bestehen, wieder Elemente, die in derselben Weise einer Kurve angehören. Zwar werden x_1, y_1, p_1 immer Funktionen von t, aber mit Sicherheit folgt die Gleichung

$$p_1 = \frac{dy_1}{dx_1}, \quad dy_1 - p_1\,dx_1 = 0$$

nur bei der Annahme (11) aus den Gleichungen (12) oder $dy - p\,dx = 0$. Die Gleichung (11) verbürgt also, daß man nicht nur Elemente in Elemente, sondern auch Kurven in Kurven transformiert, wie bei der Polartransformation.

§ 114. Differentialgleichungen höherer Ordnung, besonders lineare.

I. Eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist die Forderung, y als Funktion von x so zu bestimmen, daß eine Gleichung von einer der Formen

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots y', y, x) = 0, \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) \tag{1}$$

besteht. Man übersieht im allgemeinen, daß die Lösung dieser Aufgabe n willkürliche Konstante enthalten wird. Vermöge der zweiten Gleichung (1) sieht man, daß auch $y^{(n+1)}$ in ähnlicher Form wie $y^{(n)}$ darstellbar ist, wenn f stetige Teilableitungen besitzt:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \cdot f \\ &= f_1(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}), \end{aligned}$$

ebenso $y^{(n+2)}$ usf. Nimmt man also an irgend einer Stelle $x = x_0$ die n Werte der Größen $y, y', \ldots y^{(n-1)}$, die wir $y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$ nennen, beliebig an, so sind dadurch die übrigen Werte $y^{(n)}, y^{(n+1)}, \ldots$ an dieser Stelle bestimmt; in der Taylorschen Reihe

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \tag{2}$$

sind also alle Koeffizienten durch jene n willkürlichen Größen bestimmt; konvergiert die so gebildete Reihe, so kann auch die Größe

$y^{(n)} - f(x, y, \ldots) = Y$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt werden und sie verschwindet für $x = x_0$; ebenso dann ihre Ableitung für $x = x_0$, nämlich die Größe $y^{(n+1)} - f_1(x, y, \ldots)$ usf.; in der Entwicklung von Y nach Potenzen von $x - x_0$ verschwinden also alle Koeffizienten, und für alle Werte von x, die in Betracht kommen, ist demnach $Y = 0$; d. h. die Reihe (2) erfüllt die Gleichung (1). Hierdurch erscheint die Vermutung gerechtfertigt, daß die Gleichung (1) eine Lösung wie

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots c_n)$$

hat, in der c in gewissen Grenzen willkürliche Konstante, etwa die Werte $y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$ bedeuten.

II. Die wichtigste Klasse von Differentialgleichungen höherer Ordnung sind die linearen, deren Form ist

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_n y = Q,$$

wobei P_ν und Q gegebene Funktionen von x sind. Verschwindet Q, so ist die Gleichung homogen-linear, ein Fall, auf den wir uns zunächst beschränken.

Eine homogen-lineare Gleichung habe die Lösungen $y_1, y_2, \ldots$; so daß die Gleichungen

$$y_\nu^{(n)} + P_1 y_\nu^{(n-1)} + \cdots + P_n y_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

bestehen. Multipliziert man diese Gleichung mit der Konstanten C_ν und setzt

$$z = \sum_\nu C_\nu y_\nu,$$

so folgt

$$z^{(n)} + P_1 z^{n-1} + \cdots + P_n z = 0,$$

d. h. z ist ebenfalls eine Lösung der Gleichung, also jeder Ausdruck, der aus beliebig vielen einzelnen Lösungen linear mit konstanten Faktoren zusammengesetzt ist. Umgekehrt gibt es, wie wir zeigen wollen, immer n solche Lösungen, die linear unabhängig sind, d. h. keine Gleichung wie

$$\sum_\nu^{1,n} A_\nu y_\nu = 0$$

bei festen A_ν und beliebigem x erfüllen, und durch diese, d. h. durch jedes solche Lösungssystem kann eine beliebige Lösung der Gleichung

$$(1) \qquad y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_n y = 0$$

in der Form

$$\sum_\nu^{1,n} C_\nu y_\nu$$

ausgedrückt werden.

Nehmen wir vorweg, was wir in § 116 beweisen werden, daß die Gleichung (1) in einem gemeinsamen Stetigkeitsgebiet der Größen P_ν stets eine mit ihren Ableitungen stetige Lösung besitzt, die an einer gegebenen Stelle und in einer gewissen Umgebung derselben absolut über einer positiven Schranke liegt, so können wir die ausgesprochene Behauptung durch Schluß von $n-1$ auf n beweisen.

Sei y_1 diese besondere Lösung der Gleichung (1); man setze allgemein in ihr $y = z y_1$ und findet dann, indem man $y^{(\nu)} = (z y_1)^{(\nu)}$ nach der Leibnizschen Formel (§ 11) entwickelt, für z mit stetigen Koeffizienten Q die eine Gleichung

$$(2) \qquad z^{(n)} + Q_1 z^{(n-1)} + \cdots + Q_{n-1} z' + Q_n z = 0;$$

dabei ist $Q_n z y_1$ die Summe aller z enthaltenden Glieder in $(y_1 z)^{(n)}$ und $P_\nu (y_1 z)^{n-\nu}$, also

$$y_1 Q_n = y_1^{(n)} + \sum_\nu^{1,n} P_\nu y_1^{(n-\nu)},$$

also $Q_n = 0$, da y_1 eine Lösung der Gleichung (1) und in dem betrachteten Gebiet nicht verschwindet. Führt man also $z' = u$ als neue Unbekannte ein, so erhält man nach (2) die Gleichung

$$(3) \qquad u^{(n-1)} + Q_1 u^{(n-2)} + \cdots + Q_{n-1} u = 0,$$

und für diese sei unser gewünschtes Ergebnis bewiesen. Es gibt also $n-1$ linear unabhängige Lösungen dieser Gleichung, etwa $u_2, u_3, \ldots u_n$, und durch jedes solche System ist jede beliebige Lösung in der Form $C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n$ ausdrückbar. Dann sind die Größen

$$(4) \qquad 1, \quad \int u_2\, dx, \quad \int u_3\, dx, \ldots, \quad \int u_n\, dx$$

n Lösungen der Gleichung (2), die linear unabhängig sind; denn hätte man mit konstanten Werten c_ν eine Gleichung

$$c_1 + c_2 \int u_2\, dx + \cdots + c_n \int u_n\, dx = 0.$$

so folgte durch Differentiation

$$c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0,$$

was ausgeschlossen ist. Ferner ergibt sich jede Lösung der Gleichung (2) aus einer solchen der Gleichung (3) durch Integration

$$z = \int u\, dx;$$

da nun $u = C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n$ gesetzt werden kann, folgt

$$(5) \qquad z = C_1 + C_2 \int u_2\, dx + \cdots + C_n \int u_n\, dx;$$

also ist z, d. h. eine beliebige Lösung der Gleichung (2), durch die Größen (4) mit konstanten Faktoren ausdrückbar.

Was nun die Gleichung (1) betrifft, so ist jede ihrer Lösungen in der Form $y_1 z$ darstellbar, wobei z die Gleichung (2) erfüllt und umgekehrt; die Größen (4) multipliziert mit y_1, d. h.

$$y_1, \quad y_2 = y_1 \int u_2\, dx, \ldots y_n = y_1 \int u_n\, dx,$$

sind also linear unabhängig; durch sie ist jede Lösung der Gleichung (1) ausdrückbar. Sind nun

$$(6) \qquad Y_\nu = c_{\nu 1} y_1 + c_{\nu 2} y_2 + \cdots + c_{\nu n} y_n, \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

andere Lösungen, so besteht eine lineare Abhängigkeit, d. h. eine Gleichung $\gamma_1 Y_1 + \cdots + \gamma_n Y_n = 0$, in der die Größen γ nicht alle verschwinden, dann und nur dann, wenn die Gleichungen

$$\gamma_1 c_{1\varrho} + \gamma_2 c_{2\varrho} + \cdots + \gamma_n c_{n\varrho} = 0, \quad \varrho = 1, 2, \ldots n$$

durch solche Werte γ zu erfüllen sind. Ist dies nicht der Fall, so kann man die Gleichungen (6) nach den Größen y_ν auflösen; sie erscheinen durch die Größen Y_ν linear mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt, und dasselbe gilt somit von jeder Lösung der Gleichung (1).

Damit ist die ausgesprochene Behauptung für eine Gleichung n^{ter} Ordnung bewiesen, wenn sie für eine Gleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gilt. Für den Fall $n = 1$ gilt sie aber sicher, denn die Gleichung

$$y' + Py = 0$$

hat ein nicht verschwindendes Integral

$$y_1 = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P\,dx},$$

und eine beliebige Lösung y ist, da sie offenbar die Gleichung

$$y_1 y' - y_1' y = 0, \quad \left(\frac{y}{y_1}\right)' = 0$$

erfüllt, in der Form $y = C_1 y_1$ darstellbar. Hiermit ist die ausgesprochene Behauptung im Falle $n = 1$ schon völlig bewiesen; sie gilt also allgemein.

II. Jetzt ist auch die nicht homogene oder komplette Gleichung

$$(7) \qquad y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_n y = Q = Q(x)$$

aufzulösen. Sei $y = \varphi(x, \alpha)$ diejenige Lösung der homogenen Gleichung, die an der Stelle $x = \alpha$ die Gleichungen

$$(8) \qquad \varphi(\alpha, \alpha) = 0, \quad \varphi'(\alpha, \alpha) = 0, \ldots \varphi^{(n-2)}(\alpha, \alpha) = 0,$$
$$\varphi^{(n-1)}(\alpha, \alpha) = Q(\alpha)$$

erfüllt, in denen allgemein

$$\varphi^{(\nu)}(x, \alpha) = \frac{\partial^\nu \varphi(x, \alpha)}{\partial x^\nu}$$

gesetzt ist; $\varphi(x, \alpha)$ ist, wie sich in § 116, I. zeigt, in α und x ebenso wie $\varphi'(x, \alpha)$, $\varphi''(x, \alpha)$, ... stetig, so daß

$$Y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha)\, d\alpha$$

gebildet werden kann. Dann findet man nach § 95 und nach (8)

$$Y' = \varphi(x, x) + \int_{x_0}^{x} \varphi'(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{x_0}^{x} \varphi'(x, \alpha)\, d\alpha,$$

$$Y'' = \varphi'(x, x) + \int_{x_0}^{x} \varphi''(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{x_0}^{x} \varphi''(x, \alpha)\, d\alpha \quad \text{usf.},$$

schließlich

$$Y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n-1)}(x, \alpha)\, d\alpha,$$

$$Y^{(n)} = \varphi^{(n-1)}(x, x) + \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x, \alpha)\, d\alpha = Q(x) + \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x, \alpha)\, d\alpha;$$

setzt man also Y für y in die Gleichung (7), so findet man dieselbe erfüllt. Dabei kann man nach I. setzen

$$\varphi(x, \alpha) = C_1(\alpha) y_1 + C_2(\alpha) y_2 + \cdots + C_n(\alpha) y_n, \tag{9}$$

wobei, wenn $u_\nu' = C_\nu(x)$ ist, nach (9) und (8) folgende Gleichungen gelten:

$$u_1' y_1^{(\nu)} + u_2' y_2^{(\nu)} + \cdots + u_n' y_n^{(\nu)} = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots n - 2,$$

$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = Q(x).$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Größen u_ν' als stetige Funktionen von x, also $C_\nu(\alpha)$ als stetige Funktionen von α, und nach (9) folgt

$$u_\nu = \int_{x_0}^{x} C_\nu(\alpha)\, d\alpha = \int_{x_0}^{x} u_\nu'\, dx, \quad Y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n.$$

Diese Darstellungsweise nennt man das Verfahren der Variation der Konstanten, da in dem Ausdruck der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also dem Ausdruck $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots$, die Konstanten durch passend gewählte Funktionen von x ersetzt werden.

Ist Y_1 eine weitere Lösung der nicht homogenen Gleichung (7), so ist offenbar

$$(Y - Y_1)^{(n)} + P_1 (Y - Y_1)^{(n-1)} + \cdots + P_n (Y - Y_1) = 0,$$

also $Y - Y_1$ eine Lösung der homogenen Gleichung, mithin

$$Y_1 = Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

womit die komplette Gleichung vollständig gelöst ist.

§ 115. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

I. Besonderes Interesse bietet die Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(1) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0,$$

die immer vollständig integriert werden kann. Sei ihre linke Seite, mit einer beliebigen Funktion y gebildet, $\Phi(y)$; enthält y außer x noch einen Parameter α, so merken wir zunächst die Gleichung

$$(2) \qquad \Phi\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial \Phi(y)}{\partial \alpha}$$

an, die daraus folgt, daß z. B.

$$\frac{\partial y''}{\partial \alpha} = \frac{\partial^3 y}{\partial \alpha \, \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)'' \text{ usf.}$$

gesetzt werden kann, woraus die Gleichung (2) folgt.

Wir versuchen nun, die Gleichung (1) zu erfüllen durch den Ansatz $y = e^{\alpha x}$; da

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}, \quad (e^{\alpha x})'' = \alpha^2 e^{\alpha x} \text{ usf.,}$$

finden wir, wenn

$$f(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots + a_n$$

gesetzt wird,

$$\Phi(e^{\alpha x}) = f(\alpha) e^{\alpha x}.$$

Nun ist die Gleichung $f(\alpha) = 0$ nach § 59 durch mindestens einen reellen oder komplexen Wert α_1 zu erfüllen; ist $f(\alpha_1) = 0$, so folgt

$$\Phi(e^{\alpha_1 x}) = 0,$$

also ist $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ eine erste Lösung der Gleichung (1), die aber komplex sein kann. Sind, wie wir natürlich annehmen, a_ν reelle Größen und $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1 i$, β_1 und γ_1 ebenfalls reell, so hat die

Gleichung $f(\alpha) = 0$ nach § 59 auch die Wurzel $\alpha_2 = \beta_1 - \gamma_1 i$, die Gleichung (1) die Lösung $e^{\alpha_2 x}$; aus den Gleichungen

$$\Phi(e^{\alpha_1 x}) = 0, \quad \Phi(e^{\alpha_2 x}) = 0$$

folgt aber, wenn a eine Konstante ist,

$$\Phi[a(e^{\alpha_1 x} \pm e^{\alpha_2 x})] = 0,$$

oder im besonderen mit $a = \frac{1}{2}$ oder $a = 1 : 2i$

$$\Phi(\bar{y}_1) = \Phi(\bar{y}_2) = 0,$$

wobei

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(e^{\alpha_1 x} + e^{\alpha_2 x}) = e^{\beta_1 x} \cos \gamma_1 x, \tag{3}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}) = e^{\beta_1 x} \sin \gamma_1 x;$$

d. h. einem Paar konjugierter Wurzeln der Gleichung $f(\alpha) = 0$ entsprechen zwei reelle Lösungen der Gleichung (1) oder $\Phi(y) = 0$. Hat die Gleichung $f(\alpha) = 0$ also n verschiedene Wurzeln, so erhält man auf diese Weise n reelle Lösungen, einem Paar komplexer Wurzeln wie α_1 und α_2 entsprechend $\bar{y}_1$ und $\bar{y}_2$, einer reellen Wurzel α_3 entsprechend die Lösung $y_3 = e^{\alpha_3 x}$.

II. Hat die Gleichung $f(\alpha) = 0$ die k-fache Wurzel α_1, so ist $f(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)^k f_1(\alpha)$, $f_1(\alpha)$ ein Polynom und $f_1(\alpha_1) \neq 0$; man ersieht hieraus sofort, daß die Größen

$$f(\alpha), \quad f'(\alpha), \quad f''(\alpha) \ldots f^{(k-1)}(\alpha)$$

alle den Faktor $\alpha - \alpha_1$ haben, so daß sie für $\alpha = \alpha_1$ verschwinden, während $f^{(k)}(\alpha_1) \neq 0$ ist.

Jetzt gehen wir auf die Gleichung

$$\Phi(e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} f(\alpha) \tag{4}$$

zurück, differenzieren sie $k - 1$ mal nach α und finden nach (2)

$$\frac{\partial^\nu \Phi(e^{\alpha x})}{\partial \alpha^\nu} = \Phi\left\{\frac{\partial^\nu (e^{\alpha x})}{\partial \alpha^\nu}\right\} = \Phi(x^\nu e^{\alpha x});$$

die Gleichung (4) ergibt also nach der Leibnizschen Formel

$$\Phi(x e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}[x f(\alpha) + f'(\alpha)],$$

$$\Phi(x^2 e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}[x^2 f(\alpha) + 2x f'(\alpha) + f''(\alpha)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi(x^\nu e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}\left\{x^\nu f(\alpha) + \binom{\nu}{1} x^{\nu-1} f'(\alpha) + \binom{\nu}{2} x^{\nu-2} f''(\alpha) + \cdots + f^{(\nu)}(\alpha)\right\}.$$

Setzt man nun $\alpha = \alpha_1$, so verschwinden rechts alle Glieder, solange $\nu < k$; also folgt

$$\Phi(x^\nu e^{\alpha_1 x}) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots k - 1.$$

Die Gleichung (1) hat also jetzt die Lösungen

(5) $$e^{\alpha_1 x}, \quad x e^{\alpha_1 x}, \quad x^2 e^{\alpha_1 x}, \ldots x^{k-1} e^{\alpha_1 x};$$

ist α_1 komplex, so ist die konjugierte Größe α_2 ebenfalls k-fache Wurzel der Gleichung $f(\alpha) = 0$; man erhält die Lösungen

$$e^{\alpha_2 x}, \quad x e^{\alpha_2 x}, \quad x^2 e^{\alpha_2 x}, \ldots x^{k-1} e^{\alpha_2 x},$$

und in Verbindung mit der Reihe (5) erhält man die reellen Lösungen

$$x^\nu e^{\beta_1 x} \cos \gamma_1 x, \quad x^\nu e^{\beta_1 x} \sin \gamma_1 x, \quad \nu = 0, 1, \ldots k - 1,$$

also einem Paar konjugiert imaginärer k-facher Wurzeln der Gleichung $f(\alpha) = 0$ entsprechend genau $2k$ reelle Lösungen. Da nun n die Summe der bei allen Wurzeln der Gleichung $f(\alpha) = 0$ vorkommenden Vielfachheitszahlen k sein muß, hat man in jedem Falle n verschiedene Lösungen der Gleichung (1) oder $\Phi(y) = 0$ hergestellt.

III. Diese Lösungen sind, wie wir zeigen wollen, linear unabhängig. Denn bestünde zwischen ihnen eine identische Gleichung mit konstanten Koeffizienten, so könnte diese, indem für Größen wie $e^{\beta_1 x} \cos \gamma_1 x$ und $e^{\beta_1 x} \sin \gamma_1 x$ wieder die Ausdrücke (3) eingesetzt werden, eine Gleichung von der Form

(6) $$\sum_\nu^{1,h} P_\nu(x) e^{\alpha_\nu x} = 0$$

sein, in der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$ verschiedene Wurzeln der Gleichung $f(\alpha) = 0$ und $P_\nu(x)$ Polynome oder Festwerte wären, die nicht verschwinden.

Wir beginnen mit der Bemerkung, daß ein Produkt wie

(7) $$P(x) e^{\alpha x},$$

in welchem $P(x) = a x^m + b x^{m-1} + \cdots$ und $\alpha \neq 0$, $a \neq 0$ ist, beliebig oft, etwa νmal, nach x differenziert immer eine Größe derselben Form ergibt, in der an Stelle von $P(x)$ ein Polynom $P_0(x) = a_0 x^m + b_0 x^{m-1} + \cdots$ tritt, in welchem der Koeffizient der höchsten Potenz $a_0 = a\alpha^\nu$ ist. Man hat offenbar

$$D_x \{P(x) e^{\alpha x}\} = e^{\alpha x} [\alpha P(x) + P'(x)] = e^{\alpha x} (\alpha a x^m + \cdots),$$

wobei rechts nur niedrigere als die m^{te} Potenz von x weggelassen sind; ebenso weiter

$$D_x^2 [P(x) e^{\alpha x}] = e^{\alpha x} (\alpha^2 a x^m + \cdots) \quad \text{usf.},$$

woraus das Behauptete ersichtlich ist.

Jetzt schreiben wir die Gleichung (6) in der Form

$$0 = P_1(x) + \sum_{\nu}^{2,h} P_\nu(x)\, e^{(\alpha_\nu - \alpha_1)x}$$

und differenzieren einmal mehr, als der Grad des Polynoms $P_1(x)$ angibt; dann bleibt von diesem keine Spur, und da die Differenzen $\alpha_\nu - \alpha_1$ von Null verschieden sind, folgt nach der über die Größe (7) angestellten Hilfsbetrachtung eine Gleichung

$$0 = \sum_{\nu}^{2,h} \overline{P}_\nu(x) e^{(\alpha_\nu - \alpha_1)x},$$

in der $\overline{P}_\nu$ ein Polynom desselben Grades wie $P_\nu(x)$ ist, also eine Gleichung derselben Form wie (6), aber mit einer Exponentialgröße weniger; die Größen $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_1, \ldots$ sind auch alle verschieden. So fortschließend erhält man schließlich eine Gleichung

$$P_0(x)\, e^{\alpha_0 x} = 0,$$

in der das Polynom $P_0(x)$ ebensowenig wie eines der Polynome P_ν, $\overline{P}_\nu$ sich auf Null zurückführt. Diese Gleichung ist offenbar nur für endlich viele Sonderwerte von x möglich, also als identische Gleichung, wie die Gleichung (6) gemeint war, unmöglich. Die letztere ist also auch unmöglich; die aufgestellten n Integrale der Gleichung $\Phi(y) = 0$ sind linear unabhängig. Sind sie $y_1, \ldots y_n$, so ist jedes Integral der Gleichung in der Form $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$ mit konstanten Faktoren C darstellbar.

IV. Auf die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten können die Gleichungen von der Form

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0,$$

in denen a_ν Festwerte sind, zurückführen, indem man $x = e^t$ setzt und t als Unabhängige nimmt. Sie lassen sich aber auch unmittelbar und selbständig nach dem Verfahren der Absätze I und II behandeln, indem man ihre linke Seite durch $\Phi(y)$ bezeichnet und nun die allgemeine Identität

$$\Phi(x^\alpha) = f(\alpha)\, x^\alpha$$

zugrunde legt, in der gesetzt ist

$$f(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) + a_1 \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 2) + \cdots + a_n;$$

man erhält auch hier, indem man nach α differenziert,

$$\Phi(x^\alpha \lg x) = f'(\alpha)\, x^\alpha + x^\alpha f(\alpha) \lg x \quad \text{usw.}$$

und schließt hieraus ganz ähnlich wie oben, daß, wenn die Gleichung $f(\alpha) = 0$ die k-fache Wurzel α_1 besitzt, die Gleichung $\Phi(y) = 0$ die k Integrale

$$x^{\alpha_1}, \quad x^{\alpha_1} \lg x, \quad x^{\alpha_1} (\lg x)^2, \ldots x^{\alpha_1} (\lg x)^{k-1}$$

besitzt; bei k-fachen konjugiert imaginären Wurzeln $\alpha_1 = \beta + \gamma i$ und $\alpha_2 = \beta - \gamma i$ erhält man die reellen Integrale

$$(\lg x)^\nu x^\beta \cos(\gamma \lg x), \quad (\lg x)^\nu x^\beta \sin(\gamma \lg x), \quad \nu = 0, 1, \ldots k - 1.$$

§ 116. Existenz der Integrale linearer Differentialgleichungen und simultaner linearer Systeme.

I. Die Gleichung

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_n y = 0$$

erscheint, wenn wir

$$y = y_1, \quad y^{(\nu)} = y_{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots n - 1$$

setzen, als Sonderfall des Gleichungssystems

$$(1) \qquad \frac{dy_\nu}{dx} = P_{\nu 1} y_1 + P_{\nu 2} y_2 + \cdots + P_{\nu n} y_n, \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

eines linearen simultanen Differentialgleichungssystems, in welchem gleichzeitig n unbekannte Funktionen bestimmt werden sollen. Seien $P_{\nu\varrho}$ stetige Funktionen von x auf einer beliebigen Strecke, zunächst etwa der Strecke $0 \ldots 1$; dann, zeigen wir, gibt es ein Lösungssystem der Gleichungen (1), das ebenfalls auf dieser Strecke stetig ist und an der Stelle $x = 0$ die willkürlichen Werte $y_\nu = y_{\nu 0}$ annimmt.

Um dies nachzuweisen, nehmen wir an, auf der Strecke $0 \ldots 1$ sei allgemein

$$(2) \qquad |P_{\nu\varrho}| < A, \quad A > |y_{\nu 0}|,$$

und werde gebildet

$$(3) \qquad y_{\nu 1} = y_{\nu 0} + \int_0^x \sum_\varrho^{1,n} P_{\nu\varrho} y_{\varrho 0} \, dx, \quad \nu = 1, \ldots n,$$

$$y_{\nu 2} = y_{\nu 0} + \int_0^x \sum_\varrho^{1,n} P_{\nu\varrho} y_{\varrho 1} \, dx,$$

$$\ldots y_{\nu,\sigma+1} = y_{\nu 0} + \int_0^x \sum_\varrho^{1,n} P_{\nu\varrho} y_{\varrho\sigma} \, dx,$$

dann ist
$$|y_{\nu 1} - y_{\nu 0}| \leqq n A^2 x,$$
$$y_{\nu 2} - y_{\nu 1} = \int_0^x \sum_{\varrho}^{1,n} P_{\nu\varrho}(y_{\varrho 1} - y_{\varrho 0})\, dx,$$
$$|y_{\nu 2} - y_{\nu 1}| \leqq n^2 A^3 \int_0^x x\, dx$$
oder

(4)
$$|y_{\nu 2} - y_{\nu 1}| \leqq n^2 A^3 \frac{x^2}{1\,.\,2};$$
ist allgemein die Ungleichung
$$|y_{\nu,\sigma} - y_{\nu,\sigma-1}| \leqq n^\sigma A^{\sigma+1} \frac{x^\sigma}{\sigma!}$$
bewiesen, so folgt, da nach (3) offenbar die Gleichung
$$y_{\nu,\sigma+1} - y_{\nu\sigma} = \int_0^x \sum_{\varrho}^{1,n} P_{\nu\varrho}(y_{\varrho\sigma} - y_{\nu,\sigma-1})\, dx$$
gilt, die weitere Ungleichung
$$|y_{\nu,\sigma+1} - y_{\nu\sigma}| \leqq n^{\sigma+1} A^{\sigma+2} \int_0^x \frac{x^\sigma}{\sigma!}\, dx$$
$$\leqq n^{\sigma+1} A^{\sigma+2} \frac{x^{\sigma+1}}{(\sigma+1)!},$$
die hiermit, da sie für $\sigma = 1$ nach (4) gilt, allgemein bewiesen ist.

Hieraus folgt, daß die Reihe
$$Y_\nu = y_{\nu 0} + (y_{\nu 1} - y_{\nu 0}) + (y_{\nu 2} - y_{\nu 1}) + \cdots$$
unbedingt konvergiert (§ 38), und zwar besser als die Reihe
$$\sum_{\sigma}^{0,\infty} \frac{A(nAx)^\sigma}{\sigma!} = A e^{nAx},$$
und erst recht besser als die von x unabhängige Reihe Ae^{nA}. Die Reihe Y_ν konvergiert also auf der Strecke $0 \ldots 1$ unbedingt und gleichmäßig, und stellt (§ 41) eine auf dieser Strecke stetige Funktion von x dar; da nach (3) allgemein
$$y_{\nu\sigma}|^0 = y_{\nu 0},$$
so folgt
$$(y_{\nu,\sigma+1} - y_{\nu\sigma})|^0 = 0, \quad Y_\nu|^0 = y_{\nu 0}.$$

Ferner ist die Summe der ersten $k+1$ Glieder der Reihe Y_ν offenbar $y_{\nu k}$, so daß
$$Y_\nu = y_{\nu k} + \varepsilon_{\nu k}$$

gesetzt werden kann, und $|\varepsilon_{\nu k}|$ ist auf der Strecke $0 \ldots 1$ so klein, wie man will, sobald k hinreichend groß gewählt ist. Hieraus folgt

$$\int_0^x \sum_\varrho^{1,n} P_{\nu\varrho} Y_\varrho dx = \int_0^x \sum_\varrho^{1,n} P_{\nu\varrho} y_{\varrho k} dx + \int_0^x \sum_\varrho^{1,n} P_{\nu\varrho} \varepsilon_{\varrho k} dx$$

$$= y_{\nu, k+1} - y_{\nu 0} + \varepsilon' = Y_\nu - y_{\nu 0} + \varepsilon' + \varepsilon_{\nu, k+1},$$

und auch $|\varepsilon'|$ sowie $|\varepsilon_{\nu, k+1}|$ sind so klein, wie man will, bei passender Wahl von k. Von dieser Größe sind die linke Seite und die Differenz $Y_\nu - y_{\nu 0}$ unabhängig; also gibt die letzte Gleichung nach dem Exhaustionssatze

$$\int_0^x \sum_\varrho^{1,n} P_{\nu\varrho} Y_\varrho dx = Y_\nu - y_{\nu 0}, \quad Y'_\nu = \sum_\varrho^{1,n} P_{\nu\varrho} Y_\nu;$$

Y_ν sind also genau die geforderten Lösungen der Gleichungen (1), die auf der Strecke $0 \ldots 1$ stetig sind und an der Stelle $x = 0$ die beliebig gegebenen Werte $y_{\nu 0}$ annehmen.

Jetzt kann die Strecke $0 \ldots 1$ durch eine beliebige x-Strecke $a \ldots b$ ersetzt werden, indem man $(x - a)/(b - a)$ als Unabhängige einführt, die die Strecke $0 \ldots 1$ durchläuft, wenn x von a bis b geht. Unsere Behauptung ist also vollständig bewiesen; insbesondere ist jetzt auch klar, daß bei einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf jeder Stetigkeitsstrecke der Koeffizienten eine Lösung existiert, die an einer gegebenen Stelle jener Strecke mit ihren ersten $n - 1$ Ableitungen vorgeschriebene, übrigens beliebige Werte annimmt.

Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe Y_ν bleibt auch erhalten, wenn in den Größen P veränderliche Parameter vorkommen oder die Werte $y_{\nu 0}$ veränderlich gedacht werden, solange nur die Ungleichungen (3) erhalten bleiben; Y_ν ist also auch in bezug auf diese Größen stetig. So kann man z. B. auch $P_{\nu\varrho}$ und $y_{\nu 0}$ von a und b abhängen lassen; auch nach diesen Größen wird Y_ν stetig sein, wovon bei der Bildung der Größe $\varphi(x, \alpha)$ in § 112, II. Gebrauch gemacht wird; sie ist eine stetige Funktion von α.

II. Die Lösungen Y_ν sind endlich die einzigen stetigen Lösungen der Gleichung (1), die an der Stelle $x = 0$ die Werte $y_{\nu 0}$ annehmen. Denn gäbe es noch ein zweites solches System von Lösungen $\overline{Y}_\nu$, die auf einer Strecke $0 \ldots c$ mit Y_ν zugleich stetig wären, so bildeten die Differenzen

$$Z_\nu = Y_\nu - \overline{Y}_\nu$$

ein System von Lösungen, die an der Stelle $x = 0$ verschwinden; die Gleichungen (1) geben daher

$$Z_\nu = \int_0^x \sum_\varrho^{1,n} P_{\nu\varrho} Z_\varrho \, dx. \tag{5}$$

Seien die Größen $|Z_\nu|$ auf der Strecke $0 \ldots c$, was nach Einleitung IV, 2. angenommen werden darf, kleiner als C, und B der größere der Werte A und C; dann gibt die Gleichung (5) sofort

$$|Z_\nu| \leqq n B^2 x;$$

benutzt man dies Ergebnis noch einmal in der Gleichung (5), so folgt

$$|Z_\nu| \leqq n^2 B^3 \int_0^x x \, dx, \quad |Z_\nu| \leqq n^2 B^3 \frac{x^2}{1 \cdot 2};$$

weiter ergibt sich wiederum nach (5)

$$|Z_\nu| \leqq n^3 B^4 \frac{x^3}{3!} \quad \text{usf.,}$$

allgemein

$$|Z_\nu| \leqq n^k B^{k+1} \frac{x^k}{k!}.$$

Diese Größen nehmen aber mit wachsenden Werten von k bei irgend einem auf der Strecke $0 \ldots c$ festgehaltenen Wert von x unbegrenzt ab; also folgt für diesen Wert, d. h. allgemein, $Z_\nu = 0$.

Damit ist die Einzigkeit der Lösungen Y_ν in bestimmtem Sinne erwiesen.